複雑･複数界面に対する符号付距離関数値算定アルゴリズム

Computations of Signed Distance Function for Complex/Plural Surfaces

今村 純也, IMI 計算工学研究室, 〒351-0114 和光市本町 31-9-803, jimamura@ra2.so-net.ne.jp
Junya IMAMURA, IMI Computational Eng.Lab., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN

In this paper, a computational algorithm is proposed to obtain the singed distance function (SDF) value on arbitrary spatial point $a(x,y,z)$ for complex and/or plural surfaces. In the previous paper, “Finite Patch Elements Method” is proposed, in which a usual finite element function f_b called base system is further modified with patch elements system f_a and f_c as follows; $f = f_a \cdot f_b + f_c$. It means that the method explains arithmetic operations among basis functions of plural elements under definite constraints. This concept is extended in this paper to logical arithmetic operations to obtain the shortest distance to the surfaces. The acquisition of SDF values is very important, because this values are used as an independent variable in many schemes of computational engineering; e.g. in level-set method as level-set function, in SPM and MLSM to define weight function and so on.

1．目的と背景

本稿では複雑な界面や複数界面から法線方向に測る符号付距離関数（SDF）値を空間の任意の点 $a(x,y,z)$で求める技法を提案する。

既報[(1)] [(2)]で“有限パッチ要素法”を提案している。すなわち、従来からの有限要素系を基本系 f_b とし、パッチ系 f_a，f_c で $f = f_a \cdot f_b + f_c$ のごとく修飾するものである。ここにパッチ系 f_a ,f_c は局所系とし、外周ノードは固定（*0.* や *1.*など）とするものである。この方法は左辺の系 f を新たな系の f_b として適用して多重化する概念で以って、一般化した方法として説明できる。

これは複数の有限要素の関数間の四則演算を説明することに等しく、演算結果の適用範囲や連続性の規則をパッチ要素法として説明するものである。また、和演算 $f_b + f_c$ でアダプティブ h 法を説明でき、積演算 $f_a \cdot f_b$ でアダプティブ p 法を説明できる。

数値計算の進め方は f_a ,f_b ,f_c のうちの 2 者に固定値（反復計算の過渡値）を与え、残りの 1 者を連立方程式で解いて反復計算するのを基本とする。つまりは SOR 法など反復計算の基本的技法と同じ考え方を採る。

本稿では有限パッチ要素法の演算概念を論理演算に押し広げ、符号付距離関数値の算定に結びつけて説明する。符号付距離関数自身は C_0 -連続な関数であり、点 $a(x,y,z)$から界面への最短距離に符号を付した値が関数値となる。特長はスカラーという点にある。

SDF 値は計算工学の様々なスキームで独立変数（スカラーゆえに 1 次元）として用いられ、その正確な捕捉はたいへん重要である。例えば、レベルセット法の概念で組まれたスキームではレベルセット関数と呼ばれる独立変数として用いられる。また、粒子法（SPM）や移動最小二乗法（MLSM）では重み関数の独立変数である粒子点や移動点への距離値として、等などである。

2．方 法

(1) 2D の符号付距離関数

本稿での符号は相の外側を正、内側を負とする。また、界面は 2D では折れ線などの簡単な関数で表現されているものとし、3D でも不完全双 3 次面程度で考える。

したがって、2D での SDF コンターは平行線を円弧で繋ぐことで表され、最短距離を r とすれば $\pm r_0$ 値の SDF コンターラインは Fig.1 となる。

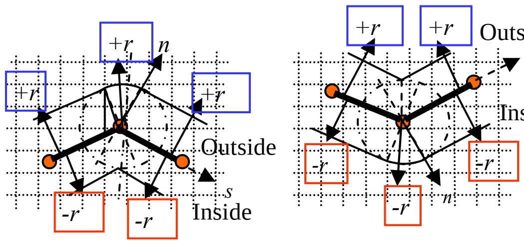


Fig.1 Contour lines of the signed distance function $\pm r_0$

すなわち、右回りの線分の連続で界面を定義すれば、凸のノード点 A では界面に平行な外側コンターライン $+r_0$ は半径 r_0 の円弧で繋がれ、Fig.1(a)で示されるようになる。内側コンターライン $-r_0$ は交点までとなる。凹のノード点 B では反対称となり、Fig.1(b)で示される。

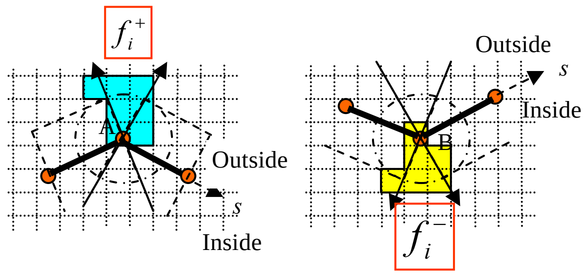


Fig.2 Patch elements system for f_i^+ and for f_i^-

いま外側円弧内の SDF を f_i^+ と記号して(1)式で定義し、内側の場合を f_i^- と記号して(2)式で定義する。

$$f_i^+ = +\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (1)$$

$$f_i^- = -\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2)$$

これら関数の定義域を幅 $\pm c$ までとし、定義域に少しでも掛かる要素（Fig.2 の塗りつぶし部分）をパッチ要素系として選ぶものとし、それぞれ関数を定義する常数を保管する。（同様にして放物面などの界面も追加できる）

また、界面に平行な矩形内の関数を f_i と記号して(3)式で定義し、同様にしてパッチ系を Fig.3 のように選ぶ。

$$f_i = (x - x_0) + (y - y_0) + \alpha_x (x - x_0) + \alpha_y (y - y_0) \quad (3)$$
$$\{s:\ o \le s < s_1\}$$

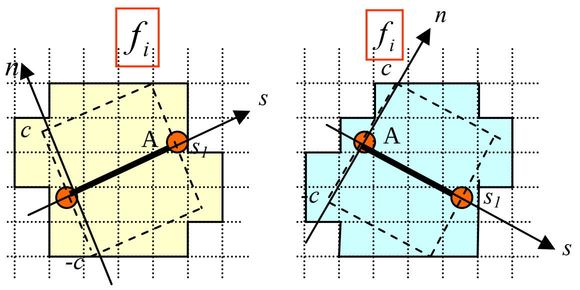
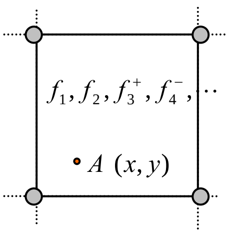


Fig.3 Patch elements system for f_i

これらパッチ系を重ね合わせるとひとつの要素に複数の関数が掛かる。その要素内でそれら関数値を比較することで SDF 値を得る。SDF は界面に立てた垂線方向に 1.0 の勾配を持つとして定義した。したがって、符号に拘わらず勾配一定である。よって、絶対値最小の値を持つ SDF が A 点の SDF 値となる。すなわち、ある要素内での論理演算は Fig.4 のとおりとなる。ただし、p は SDF 値を独立変数として代入して求まる目的関数で、確率関数などである。

An element has plural functions.



The singed distance value on point A

$$= f_m,\ \ where\ \ |f_m| = \min(|f_1|, |f_2|, |f_3^+|, \cdots |f_m^-|, \cdots)$$
$$if\ \ f_m > c\ \ then\ \ p_A = 1$$
$$if\ \ f_m < -c\ \ then\ \ p_A = 0$$

Fig.4 Logical operation in a patch element

(2) 3D の符号付距離関数

3D では$+r_0$のコンター面は Fig.5 となるので、2D のアルゴリズムを拡張して適用する。四辺形部分には工夫が必要となり、簡単な方法としては三角形平面に分割する方法が選択できる。

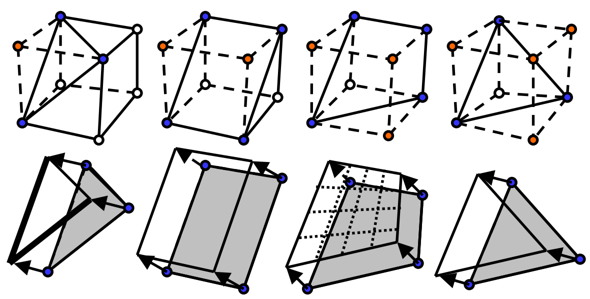


Fig.5 Contour plane of $+r_0$ in 3D

3．レベルセット法での体積の保存

(1) レベルセット関数値について

符号付距離関数値はスカラーである点が長所で、スカラーゆえに独立変数として適用すれば 2D,3D でも 1 次元モデルで考えを進められる。

ここでは界面からの距離を念頭に論を進めたが、具体的に何の界面を取扱うかでその用途は異なってくる。つまり独立変数を SDF 値として、何をモデル化しようとして次ぎの従属変数を定めるかで関数形は異なる。

通常は亀裂面や接触面、また自由表面などの不連続面を想定してそのモデル化に充てる。そのため従属変数を定めるための関数にはヘビサイド関数[3]、など[4] が当てられる。

X-FEM（拡張有限要素法）では従属変数の分布（エンリッチ関数）の概念が先ずあって、それをスカラーであるレベルセット関数値の概念との組み合わせで応用する、と説明[4]される。さらに不連続線 Γ を、空間で定義されるレベルセット関数値ゼロの等値線として定義する。

この定義からは SDF もその従属変数としてのヘビサイド関数などもレベルセット関数と呼べることになる。しかし、本稿ではこれを厳格に区別し、従属変数を確率と呼び、その関数を確率関数と呼んで SDF と区別する。($0.$～$1.$の値をとるので確率と呼ぶ。重みと呼んでもよい。)

(2) 確率関数 (重み関数)

有限要素法は要素間境界に等価集中力(ECF: Equivalently Concentrated Force）モデルを導入して連続体理論に有限級数を適用する技法である。([付録]参照)

正確な ECF 導入は厳密な数値積分によってのみ達成され、厳密な数値積分はべき級数でのみ可能である。したがって、確率関数（重み関数）にヘビサイド関数を適用する場合は、勾配の緩やかな、べき級数展開して積分しても精度把握可能なモデルに留めるべきと考える。

ECF モデルが連続体を不連続体として取扱う技法であるのに対し、レベルセット法はその等価集中力を再び等価分布力に置き直して取扱おうとする技法と解釈できる。

したがって、等価分布力は厳密に積分できるモデルで表現すべきである。この意味で確率関数を 3 次式とする。簡単な例としてバネ支持反力によるせん断力分布を 3 次式モデルで Fig.6 に示す。(反力分布は 2 次式)

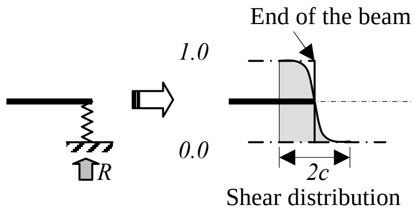


Fig.6 Level-set model for beam reaction

亀裂の発生や接触の過程に適用すれば Fig.7 となり、オーバーラップ部分にボディーフォースとして相互作用力が

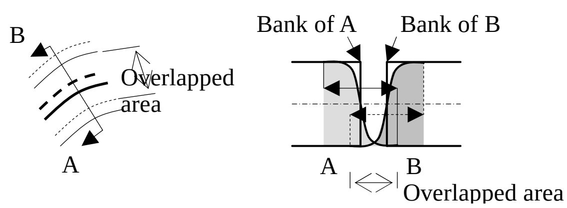


Fig.7 Level-set model for crack or contact problems

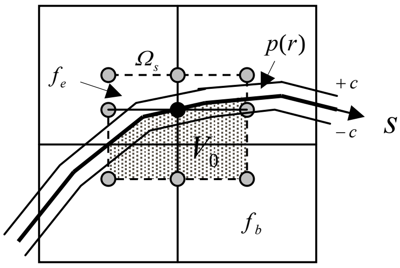
働くことになる。(時間軸にも連続モデル)

接触問題では、確率関数を乗じてモデル化するのは具体的には密度や剛性、あるいは体積となる。

(3) 体積の保存

体積の場合で考えれば、1D 問題の場合には 3 次式モデルで厳密に保存できる。しかし、2D,3D 問題では一般的には体積は保存できない。

そこで、C_1-連続なパッチ系 f_e を Fig.8 のように積形式で当てて体積を保存する。



○ : $\{f_e^{(00)}, f_e^{(10)}, f_e^{(01)}\}_k = \{1,0,0\}$

● : $\lambda_0\{f_e^{(00)}, f_e^{(10)}, f_e^{(01)}\}_k = \{\lambda_0, 0,0\}$

where f_e: C_1- continuity patch system applied in sub-domain Ω_s
V_0: original volume to be conserved
p: weight function (provability of the volume) in range ±c
r: SDF (independent variable for p)

Fig.8 Conservation technique of the volume V_0 using finite patch elements method

λ_0 はパッチ系の中心ノードの値であり、V_0 を保存するよう(4)式で求める。

$$\int_{\Omega_S} \lambda_0 f_e p(r) = V_0 \quad (\lambda_0 : parameter\ ) \qquad (4)$$

C_1-連続なパッチ要素を適用することで、パッチ後も外周上は f_b 値となり、勾配も変わらない。

$$\begin{Bmatrix} f \\ f^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \cdot f_b \\ f_a^{(1)} \cdot f_b + f_a \cdot f_b^{(1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_b \\ f_b^{(1)} \end{Bmatrix} \ \ if \begin{Bmatrix} f_a \\ f_a^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} on \Gamma_a \qquad (5)$$

4．まとめ

符号付距離関数は C_0 -連続な関数で、レベルセット関数としても選ばれる。その値は、計算工学のさまざまなスキームで重み関数の独立変数として採用され、その効率的な計算はたいへん重要である。そこで、そのアルゴリズムのひとつを提案した。流れ場のみならず固体など計算工学一般に活用できると考え、敢えてこのテーマのみに焦点を絞って報告した。

粒子法では近傍粒子のサーチと粒子間距離算定に応用できる。また、固体では亀裂問題や接触問題のレベルセット関数として適用できる。

流れ場ではレベルセット法による移動界面の重み関数などに適用されよう。その際、重み関数 w としては界面Ω±の領域に C_1 -連続な 3 次関数、ヘビサイド関数、tangent 関数などが採用される。いずれも VOF（Volume of Fluid）関数を連続化しようとするものであり、一般には $w=0.5$ 点を界面上にセットする。重み関数の重要な特性は質量保存性を具備すること[5]である。非圧縮では体積の保存である。

上述の重み関数は 1D ではこれを満足するが 2D,3D では満足しない。対して、VOF 関数は密度法の体積保存の概念に根ざす。

重み関数や独立変数の工夫で体積保存するアルゴリズムの確立は困難であろう。そこで、別途区分領域で体積保存する技法が必要である。その技法についても示した。

以上のように重み関数は SDF 値を独立変数とする 1D 関数であるから、SDF を考えることは重み関数を考えることでもある。

不連続を空間に連続化することは時間軸に連続化することでもあり、数値計算を容易にする。固体の接触問題では触覚機能を果たす。

[付録] 等価集中力モデル

無限級数を前提とする連続体理論に対し、有限要素法は要素間境界に等価集中力を導入することで有限級数を適用する技法である。

ラプラシアンは通常(a)式⇒右側のようにモデル化する。これは(b)式⇒右側としても同じであり、第 2 項以下が与式にないモデルとしての等価集中力である。(a)式ではモデル化項が陽に表れていないので陰的表現式と呼び、(b)式を陽的表現式と呼ぶ。

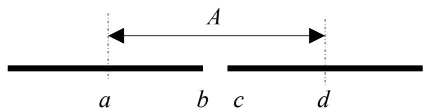


Fig.Ⅰ Equivalently concentrated force model In case of control volume method

$$-\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA \ \Rightarrow\ -(\frac{\partial u}{\partial x})_d + (\frac{\partial u}{\partial x})_a \qquad (a)$$

$$-\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA \ \Rightarrow\ -\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA + (\frac{\partial u}{\partial x})_b - (\frac{\partial u}{\partial x})_c \qquad (b)$$

ガレルキン法の陽的表現式を(c)式左辺に示す。右辺は陰的表現式である。(通常の有限要素法では右辺を適用する。)

Ω は系、S は要素の辺を表す。左辺第 2 項が等価集中力である。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega + \oint_S \delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds = \int_\Omega \delta \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega \qquad (c)$$

無限級数では(d)式であり、右辺第 1 項は隣接要素どうしで相殺して消える。

したがって、(c)式左辺第 2 項が等価集中力モデルであり、第 1 項の部分積分項を符号変更して機械的に加えればよい。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega = -\oint_S \delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds + \int_\Omega \delta \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega \qquad (d)$$

(c)式左辺の陽的モデルが便利なのは、任意の関数 f, g が掛った高次の非線形式も、同じように(e)式で計算できる。(c)式右辺の陰的モデルでは煩雑になる。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega \Rightarrow -\int_\Omega \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega + \oint_S \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds \qquad (e)$$

参考文献

(1) 今村 “N回連続的微分可能な有限パッチ要素のアダプティブ適用法” 計算工学講演会論文集、Vol.3, No.2, pp.501-504,1998
(2) 今村・棚橋, “ボクセル解析における境界適合技法と数値積分法” 計算工学講演会論文集、Vol.10, No.2, (2005), pp.703-704
(3) 橋本・小野・野口, “レベルセット仮想粒子による界面処理を用いた固定メッシュに基づく流体構造連成解析手法の開発” 計算工学会論文集、Paper No.20080028, 2008
(4) 矢川・宮崎 編集, “計算力学ハンドブック, 1.有限要素法, 1.1 X-FEM (拡張有限要素法)” 朝倉書店, 2007
(5) 姫野武洋, “CIP、MARS法、Level Set法を協調した自由表面流解析法” 計算工学講演会論文集, Vol.12, No.2, (2007), pp.869-872