

# 斜面上を流下する液体の非圧縮 SPH シミュレーション

Incompressible SPH Simulation of a Liquid Flowing down an Inclined Plane

- 阿川 雅教, 東北大・院, 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail : agawa@fluid.mech.tohoku.ac.jp  
 茂田 正哉, 東北大・工, 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail : shigeta@fluid.mech.tohoku.ac.jp  
 伊澤 精一郎, 東北大・工, 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail : izawa@fluid.mech.tohoku.ac.jp  
 福西 祐, 東北大・工, 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail : fushi@fluid.mech.tohoku.ac.jp  
 Masanori AGAWA, Grad. School of Eng., Tohoku University, Sendai 980-8579, JAPAN  
 Masaya SHIGETA, Dept. of Machine Intel. and Sys. Eng., Tohoku University, Sendai 980-8579, JAPAN  
 Seiichiro IZAWA, Dept. of Machine Intel. and Sys. Eng., Tohoku University, Sendai 980-8579, JAPAN  
 Yu FUKUNISHI, Dept. of Machine Intel. and Sys. Eng., Tohoku University, Sendai 980-8579, JAPAN

Behavior of liquid flowing down on an inclined plane was simulated by Smoothed Particle Hydrodynamics method (SPH method) together with algorithms to treat incompressibility and free surface. The incompressible flow algorithm adjusts the locations of all particles to satisfy the homogeneous density condition and the free surface algorithm applies surface tension to surface particles. The Laplace pressure model was used for the surface tension. The result showed that the flowing speed of liquid becomes slower with time which matched the experimental results. The solidification process of a flowing liquid was also simulated.

## 1. 緒言

本研究の目的は、斜面上に沿って凝固しながら流下する液体の運動を数値シミュレーションにより再現することにある。例えば、寒冷地で真冬に滝の水が凍ったり、不凍効果をうたっているウィンドウウォッシャー液が外気温の低下により、フロントガラス上で凍り付くことなどはその一例であり、我々にも身近な自然現象である。工業的には自動車用鋼板製造プロセスの一つである溶融亜鉛めっき処理や、ボディの表面塗装処理などの際に見られる現象である。

このような現象を数値計算により再現するためには、自由表面や相変化の扱いに加え、基材表面の濡れ性も考慮に入れる必要がある。グリッドレスのラグランジュ解法である粒子法は、気体・液体・固体といった物質の状態によらず、液体の運動は全て粒子の運動として表すため、原理的に自由表面や相変化が扱いやすいという特徴がある。我々の研究グループでは、粒子法の一つである SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を非圧縮性流れに拡張し、二重拡散対流<sup>(1)</sup>、液柱の崩壊やスロッシング<sup>(2)</sup>、相変化のある流れ<sup>(3)</sup>などへ適用し、良好な結果を得ている。

本研究では、まずこの非圧縮性 SPH 法を用いて、斜面上を流下する液体の 2 次元数値計算を試みた。また、あわせて実験も行い、両者を比較することで計算の妥当性についても検証した。さらに、液体と斜面の温度変化を評価し、冷却凝固しながら流下する現象の計算も試みた。

## 2. 計算方法

### 2.1 SPH 法 の 概 念

SPH 法は、連続体を粒子の集合体として近似している。各粒子はカーネル関数を持ち、質量などの物理量はカーネル関数によって粒子のまわりの空間に分布している。

SPH 法は、もともと圧縮性流体を対象に発展してきた経緯があり、密度を媒介変数として運動が記述される。任意の位置  $r$  における密度  $\rho(r)$  は粒子の持つ質量分布の重ね合わせとして式 (1) で与えられる。

$$\rho(r) = \sum_b m_b W(r - r_b, h) \quad (1)$$

ここで  $b$  は粒子番号、 $m$  は粒子の質量、 $W$  はカーネル関数であり、本研究では M4 スプライン関数を用いた。 $h$  はカーネル関数の広がりを規定するパラメータで、粒子直径の 2 倍とした。

### 2.2 支配方程式

本計算では、カーネル関数  $W$  で離散化した圧縮性 Navier-Stokes 方程式に相当する式 (2)、および熱伝導方程式 (3) を支配方程式として用いた。

$$\frac{dv_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_b}{\rho_b^2} + \frac{p_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W(r_a - r_b, h) + \sum_b \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (\mu_a + \mu_b) v_{ab} \frac{r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{|r_{ab}|^2} + F \quad (2)$$

$$\frac{dT_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \left( \frac{K_a}{C_a \rho_a} + \frac{K_b}{C_b \rho_b} \right) (T_a - T_b) \frac{r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{|r_{ab}|^2} \quad (3)$$

式 (2) の右辺第 1 項が圧力項、第 2 項が粘性項であり、外力項  $F$  には表面張力項と重力項がある。熱伝導方程式 (3) において、 $T$  は温度、 $K$  は熱伝導率、 $C$  は比熱であり、 $W_{ab}$  は

$$W_{ab} = W(r_a - r_b, h) \quad (4)$$

を表す。

### 2.3 密度均一化アルゴリズム

非圧縮性流れでは、密度場は至る所で一様として扱われる。しかし、従来の SPH 法のように単に運動方程式を解いて局所流速を求め、粒子を移動させるだけでは、密度場が音速で規定されるため計算の時間刻みを小さくする必要がある。そこで本計算では、岡地ら<sup>(4)</sup>が提案した粒子移動を 2 つのステップに分ける密度均一化アルゴリズムを導入した。2 つのステップとは、各粒子を現在の速度ベクトルに従い移動させる慣性移動ステップと、その結果生じた密度場の不均一をならす粒子位置補正ステップである。

慣性移動ステップでは、オイラー法を用いて式 (5) に従って粒子を移動させる。

$$\mathbf{r}_a^{*(n)} = \mathbf{r}_a^{(n-1)} + \mathbf{v}_a^{(n-1)} \Delta t \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{r}_a^{(n)}$ 、 $\mathbf{v}_a^{(n)}$  は  $n$  ステップにおける粒子  $a$  の位置、速度であり、 $\Delta t$  は実時間ステップである。後で粒子位置補正ステップによって粒子位置を調整するため、式 (5) で得られる粒子位置は仮の位置として  $\mathbf{r}_a^{*(n)}$  と表している。

慣性移動ステップの計算後、実時間  $t$  の進行を一旦凍結し、仮想的な時間  $t^*$  の中で粒子位置補正ステップの計算を行う。粒子位置補正ステップでは圧力勾配に従い、従来の SPH 法の支配方程式 (6) を使用して粒子の位置を補正する。

$$\frac{d\mathbf{v}_a^*}{dt^*} = - \sum_b m_b \left( \frac{p_b}{\rho_b^2} + \frac{p_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) \quad (6)$$

$p$  は圧力であり、音速  $c$  の式 (7) を用いて密度  $\rho$  から求める。

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (7)$$

$\mathbf{v}_a^*$  は粒子  $a$  の補正速度であり、式 (8) に従って粒子位置  $\mathbf{r}_a^*$  を補正する。 $(\mathbf{r}_a^*)_{\text{adjusted}}$  は 1 回の補正後の粒子位置である。

$$(\mathbf{r}_a^*)_{\text{adjusted}} = \mathbf{r}_a^* + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}_a^*}{dt} \Delta t^{*2} \quad (8)$$

粒子位置の密度が平均密度の  $\pm 1\%$  に収まるまで、仮想時間の中で補正を繰り返す。粒子位置の補正が終了したら、実時間の進行を再開し、最終的な粒子位置  $\mathbf{r}_a^{(n)}$  と前時刻の粒子位置  $\mathbf{r}_a^{(n-1)}$  の差から、その時刻における粒子の速度ベクトル  $\mathbf{v}_a^{(n)}$  を式 (9) で定義する。

$$\mathbf{v}_a^{(n)} = \frac{\mathbf{r}_a^{(n)} - \mathbf{r}_a^{(n-1)}}{\Delta t} \quad (9)$$

このように粒子を仮の速度で一旦移動させてから、密度場が一様になるようにその位置を調整するという考え方は、速度と圧力が変化する流れ場の差分法でしばしば用いられるフラクショナルステップ法と似ている。

### 2.4 自由表面アルゴリズム

本研究では、粒子数を削減し短時間で計算できるように液体と平板のみを粒子の集合体として表し、気体の占める部分には粒子を配置しない。そのため、式 (1) を用いて液体表面の粒子の密度を計算すると、内部の粒子の密度よりも小さく見積もられてしまう。そこで、液体表面の粒子密度については式 (1) で計算する代わりに液体内部の平均密度を与えた。また、表面張力の計算に林<sup>(5)</sup>が提案した自由表面アルゴリズムを用いた。

自由表面アルゴリズムは、表面粒子の特定と表面張力計算から構成される。表面粒子の場合には粒子  $a$  の中心位置  $\mathbf{r}_a$  と式 (10) で得られる重心位置  $\mathbf{r}_{g|a}$  に差が生じるので、その値が粒子直径の 0.15 倍を超えるものを表面粒子と見なした。

$$\mathbf{r}_{g|a} = \frac{\sum_b \mathbf{r}_b W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h)}{\sum_b W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h)} \quad (10)$$

$\mathbf{r}_b$  は粒子  $a$  の周囲にある粒子  $b$  の位置である。

表面張力の計算は、まず表面と特定された粒子  $a$  の周囲にある表面粒子を探し、曲率中心を勾配法により求める。次に曲率中心と粒子位置から曲率半径  $R$  を計算し、式 (11) で求まるラプラス圧力  $p_l$  を粒子に与えることで、2 次元問題における表面張力を模擬する。

$$p_l = \frac{\gamma}{R} \quad (11)$$

ここで、 $\gamma$  は表面張力であり、本研究ではシリコン油の表面張力の値  $\gamma = 20.9 \times 10^{-3}$  N/m を用いた。

### 2.5 計算手順

本計算のフローチャートを図 1 に示す。まず、重力の影響を考慮して慣性で粒子を移動させ、密度均一化アルゴリズムを用いて各粒子位置を修正する。この粒子位置の修正には運動方程式 (2) の右辺第 1 項の、つまり式 (6) を用いる。その後、自由表面アルゴリズムを用いて表面張力を計算し、前ステップの粒子位置からの移動距離から速度を算出する。最後に、式 (2) の右辺第 2 項および式 (3) から粘性と伝熱の影響を計算して次の時間ステップへと計算を進めていく。また、実時間の時間進行には Jameson-Baker の 4 段階 Runge-Kutta 法を用いた。

### 2.6 計算条件

本計算の計算領域を図 2 に示す。計算領域は斜面、液体および液体を蓄えるタンクから構成されている。液体の初期配置は縦 10mm、横 50mm の長方形形状とし、2,000 個の粒子で構成されている。液体に作用する重力加速度は  $9.8 \text{ m/s}^2$  とした。液体はシリコン油を仮定し、表面張力を  $20.9 \times 10^{-3}$  N/m、動粘性係数を  $98.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  とした。時間ステップは  $1.0 \times 10^{-3}$  sec とし、斜面の傾斜角  $\theta = 12.7^\circ \sim 33.1^\circ$  の間で計算を行った。はじめに斜面、タンクおよびシリコン油の温度を一定の  $26.4^\circ \text{C}$  とし計算を行い、流下速度が正しく計算されているかど

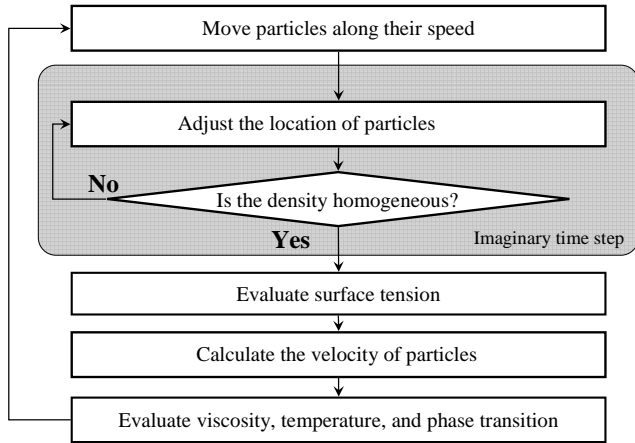


Fig. 1: Flowchart of calculation

うかを実験結果と比較して検証した．次に，斜面とタンクの温度をそれぞれ  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$  と  $5.0\text{ }^{\circ}\text{C}$  に一定に保ち，シリコン油の初期温度を  $5.0\text{ }^{\circ}\text{C}$  として，シリコン油が凝固しながら流下する様子を計算した．なお，シリコン油の凝固に関する物性値が不明であったので，水の値で代用した．表 1 に液体の凝固に関するパラメータを示す．

Tab. 1: Parameters of liquid for solidification

Parameters	Value
Latent heat	333.5 kJ/kg
Freezing point	0.0 $^{\circ}\text{C}$
Specific heat	4.179 kJ/kg · K
Density after frozen	917.0 kg/m <sup>3</sup>
Specific heat after frozen	2.0 kJ/kg · K

Tab. 2: Physical properties of silicone oil and water

Properties	Silicone oil (water)
Kinematic viscosity	98.0 ( 0.867 ) $\times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
Density	965.0 ( 997.0 ) kg/m <sup>3</sup>
Specific heat	1.5 ( 4.18 ) kJ/kg · K
Thermal conductivity	0.16 ( 0.606 ) W/m · K
Surface tension	20.9 ( 72.0 ) $\times 10^{-3}$ N/m
Speed of sound	985.2 ( 1453 ) m/s

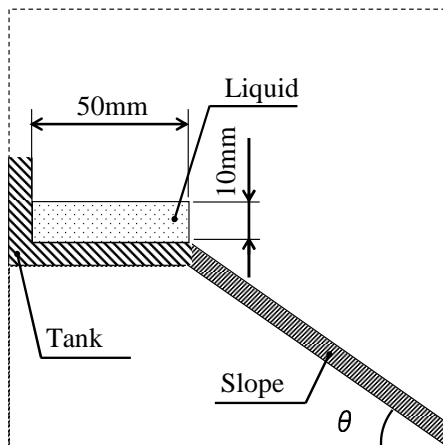


Fig. 2: Computational domain

### 3. 実験方法

数値計算結果の妥当性を検証するための実験を行った．実験に用いた液体はシリコン油（信越シリコン製，KF-96-100cs）である．表 2 は室温におけるシリコン油および水の物性値である．なお，計算は 2 次元であるので，実験では斜面を流下するシリコン油の流下面が 2 次元性を保つ範囲に着目して比較を行った．

図 3 は実験装置の概略図である．実験装置はシャッター，タンクおよび斜面で構成されている．シャッターは厚さ 2 mm の硬質塩化ビニル製で，シャッターとタンクによって区切られた部分にシリコン油を溜めてある．シャッター

の幅は約 150 mm で，スプリング式になっており瞬時に上方に動き，シリコン油を 2 次的に斜面に流下させる．斜面はガラス板でできており，斜面の傾斜角は  $\theta$  を  $\theta = 12.7^{\circ}, 19.5^{\circ}, 26.3^{\circ}, 33.1^{\circ}$  に設定した．斜面であるガラス板の下には背景として 1 cm の方眼紙を置いた．シリコン油が斜面を流下する様子はビデオカメラにより撮影した．撮影は斜面に対して垂直な方向から行った．実験時の室温は  $26.4 \pm 0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$  である．

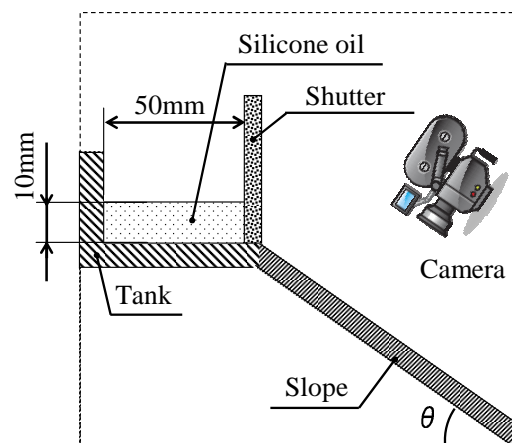


Fig. 3: Experimental setup

#### 4. 結果と考察

##### 4.1 斜面上を流下する液体の実験結果

図 4 は傾斜角  $\theta = 19.5^\circ$  の斜面上にシリコン油を流したときの時刻  $t = 0.0 \sim 5.0$  sec における実験の様子である。図の左側にシャッターおよびタンクがあり、シリコン油は左から右へ向かって流れている。  $t = 2.0$  sec までは流下する油の前縁部がスパン方向にほぼ一定で、2 次元の形状が保たれているが、  $t = 3.0$  sec 以降では両側面の流下速度が増し、やがて中央部の流れが不安定となって 3 次元になる。これは、油膜の両端において壁面の濡れ性の違いにより内側へまわり込むような流れが発生するためである。本研究では、中央付近の流れが 2 次元のとみなせる時間範囲において、計算結果との比較を行った。

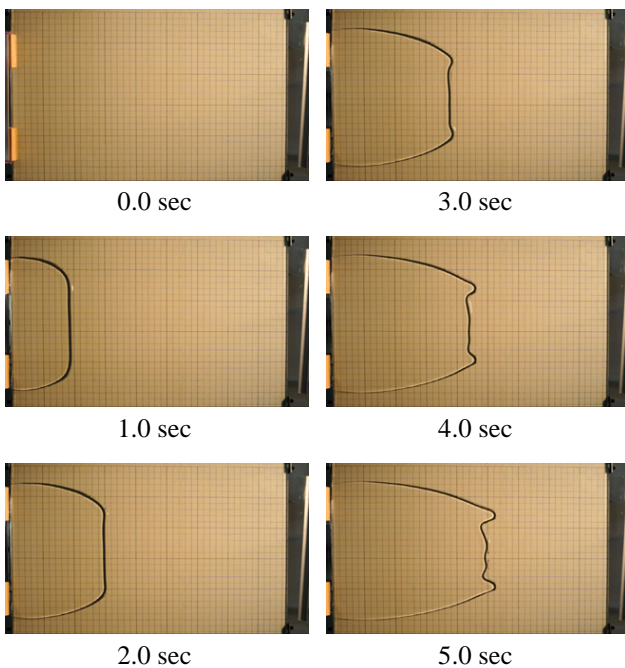


Fig. 4: Shapes of oil flowing on the inclined plane at  $\theta = 19.5^\circ$  and  $t = 0.0 \sim 5.0$  sec

##### 4.2 斜面上を流下する液体の計算結果

まず、斜面、タンクおよび液体の温度を一定の  $26.4^\circ\text{C}$  としたときの計算結果について述べる。図 5 に傾斜角  $\theta = 19.5^\circ$  における時刻  $t = 0.0 \sim 2.5$  sec の斜面上の液体の様子を示す。

青色の部分に液体、灰色の部分に斜面を表している。シャッターが開くとともに液体が斜面を流下する様子が再現されている。そこで、図 6 に示すように斜面開始点を原点とし、流下する液体の先端までの距離を先端到達距離  $L$  と定義して、実験結果と比較してみた。図 7 は傾斜角  $\theta = 12.7^\circ \sim 33.1^\circ$  の場合の結果である。線が計算結果、プロット点が実験結果である。傾斜角  $\theta$  が大きいほど、短時間で先端到達距離が増大することがわかる。ま

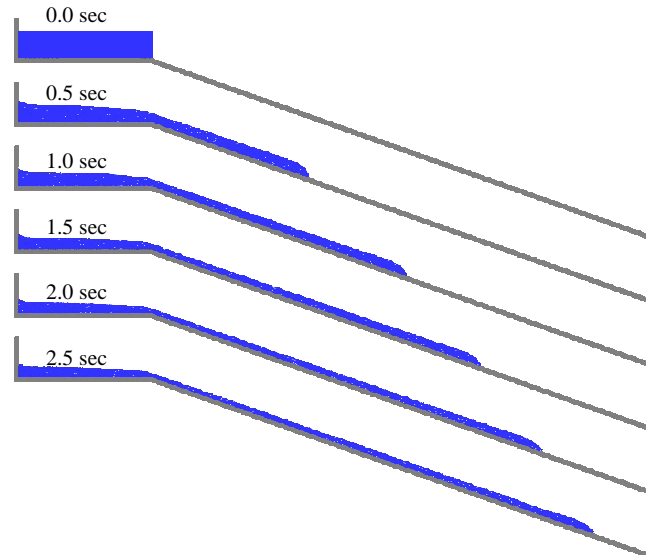


Fig. 5: Liquid particles on the inclined plane at  $\theta = 19.5^\circ$  and  $t = 0.0 \sim 2.5$  sec

た、時間が経過し、液体が流下するにつれてグラフの傾きが減少し、液体先端の速度が遅くなっていることがわかる。図 7 より、計算によって得られた先端到達距離が実験結果に近い値を示していることがわかる。ただし、 $\theta = 19.5^\circ$  の場合を除き、計算によって得られた先端到達距離が実験結果よりも若干小さく見積もられている。これは密度均一化アルゴリズムによって、数値粘性が増大してしまったためと考えている。

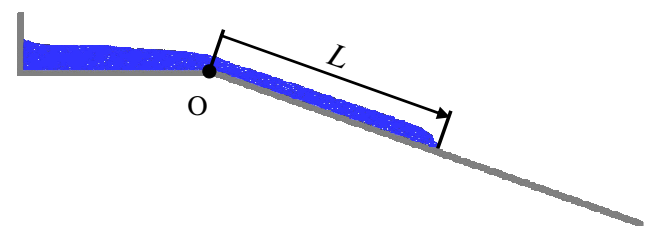


Fig. 6: Definition of distance from the tank exit to the leading edge  $L$

##### 4.3 凝固しながら斜面上を流下する液体の計算結果

液体が相変化しない場合において、計算によって得られた先端到達距離が実験結果に近い値を示したことを踏まえ、次に凝固しながら斜面上を流下する液体の計算を行った。図 8 はその結果である。青色の部分に液体、灰色の部分に斜面を表している。また、青色と灰色に囲まれた赤色の部分が凝固した液体を表している。時間の経過とともに液体が冷却され、壁面に接した部分から凝固しながら流下している様子が捉えられた。今後実験により、本計算結果の妥当性についても検証する予定である。

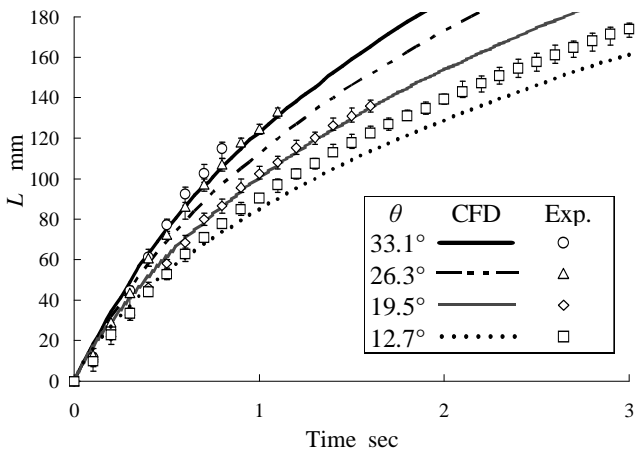


Fig. 7: Time evolution of distance from the tank exit to the leading edge of the oil flow

## 5. 結言

非圧縮性 SPH 法を用いて、斜面を流下する液体の 2 次元数値計算を行い、実験と比較したところ、比較的良い一致が得られた。また、液体が凝固しながら斜面を流れる様子の計算も試み、凝固しながら流下する様子が捉えられた。

## 参考文献

- (1) 渡辺, 茂田, 伊澤, 福西, "非圧縮 SPH 法による二重拡散対流場の数値シミュレーション," 日本機械学会 2006 年度年次大会講演論文集, 2 (2006), pp. 7-8.
- (2) 佐野, 伊澤, 熊, 福西, "非圧縮性流体に拡張した SPH 法による自由表面および移動境界を有する流れの数値シミュレーション," 第 83 期日本機械学会流体工学部門講演会論文集, (2005), pp. 312.
- (3) 原田, 茂田, 伊澤, 福西, "SPH 法による MHD 流の数値シミュレーション," 日本機械学会 2007 年 年次大会・講演論文集, (2007), pp. 333-334.
- (4) 岡地, 伊澤, 熊, 福西, "SPH 法をベースにした非圧縮流れの計算手法の提案," 第 16 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (2002), pp. 23.
- (5) Hayashi, H., "Numerical Simulation of Incompressible Flows with Complicated Behavior Using a Particle Method," Master thesis in Tohoku Univ. (2008).

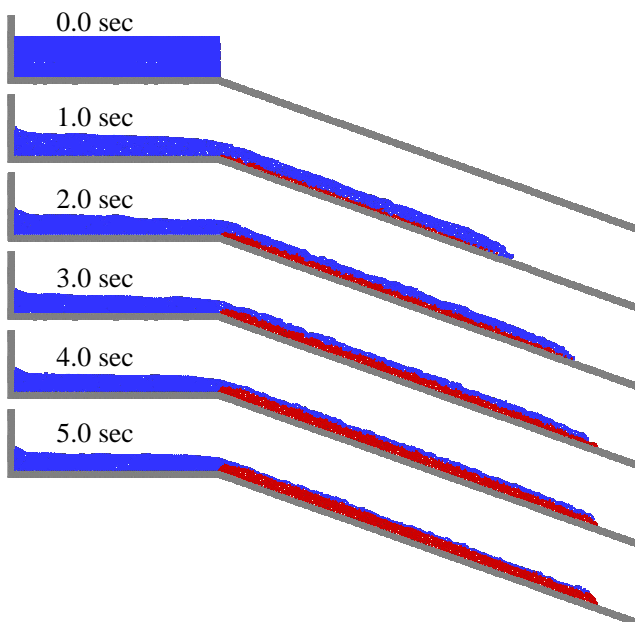


Fig. 8: Flowing and frozen liquid particles on the inclined plane at  $\theta=19.5^\circ$  and  $t=0.0 \sim 5.0$  sec