

翼周り渦挙動が羽ばたき翼性能に与える効果 Effects of vortices around a flapping wing on wing performances

- 山崎佑希, 東理大・院, 東京都千代田区九段北 1-14-6, E-mail:yamazaki@flab.isas.jaxa.jp
野々村拓, ISAS/JAXA, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail:nonomura@flab.isas.jaxa.jp
大山聖, ISAS/JAXA, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail:oyama@flab.isas.jaxa.jp
藤井孝藏, ISAS/JAXA, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail:fujii@flab.isas.jaxa.jp
山本誠, 東理大, 東京都千代田区九段北 1-14-6, E-mail:yamamoto@rs.kagu.tus.ac.jp
Youki YAMAZAKI, Tokyo Univ. of Science, 1-14-6 Kudankita, Chiyoda-ku, Tokyo, JAPAN
Taku NONOMURA, ISAS/JAXA, 3-1-1 Yoshinodai, Sagami-hara, Kanagawa, JAPAN
Akira OYAMA, ISAS/JAXA, 3-1-1 Yoshinodai, Sagami-hara, Kanagawa, JAPAN
Kozo FUJII, ISAS/JAXA, 3-1-1 Yoshinodai, Sagami-hara, Kanagawa, JAPAN
Makoto YAMAMOTO, Tokyo Univ. of Science, 1-14-6 Kudankita, Chiyoda-ku, Tokyo, JAPAN

Three-dimensional numerical simulations of a flapping wing in low Reynolds number ($Re=10^3$) are conducted, and the effects of vortices around a flapping wing on its performance are investigated using unsteady simulation. Flapping motion makes a few discriminative vortices, for instance, leading-edge vortex (LEV) and tip vortex. Both vortices are mainly generated from down stroke motion. Firstly, flow is separated from the tip of wing and creates the tip vortex. Secondly, LEV is generated on upper surface of wing from tip side of leading edge. LEV spread over the upper surface along downstroke. This LEV remains until upstroke at root side, and makes strong negative pressure. The large lift force is created by the generation of tip vortex and LEV staying at the upper surface.

1. 序論

近年、飛行タイプの火星探査機（火星航空機）が様々な国で提案され^[1-3], 注目を集めている (Fig.1). しかし、火星大気密度は地球に比べ非常に薄く、想定される火星航空機の飛行条件ではレイノルズ数 (Re 数) が非常に小さくなる。

一般に、固定翼タイプの航空機翼の空力特性は Re 数の低下と共に悪化することが知られており、想定される火星航空機の Re 数 ($10^3 \sim 10^4$ 程度) では、流れは容易に剥離を起こし高い揚力を出すことが出来ない。従って、火星航空機には高い揚力を確保するような何らかの工夫が必要であると考えられている。

現在、火星航空機システムとして考えられているのが、固定翼機・回転翼機・羽ばたき機・気球などである。それぞれの飛行システムには長所・短所がある。この内、羽ばたき機は想定される Re 数が 10^3 程度で地球上での昆虫のそれとおおよそ一致しており、昆虫などが低 Re 数下で羽ばたき飛行を行う事実から、火星のような低 Re 数でも高い揚力を発生させること、空中静止（ホバリング）を行いながらの観測などが可能であるという期待がされている。しかしながら、羽ばたき運動の空力メカニズムが十分に明らかになっていないため、自動制御が難しいという問題点がある。羽ばたき翼の自動制御を行うためには、想定される火星羽ばたき航空機の Re 数に於いて、特徴的な羽ばたき運動である、

- ・ ホバリング運動
- ・ 巡航時の運動

の 2 つの空力メカニズムの理解が不可欠であると考えられる。



Fig.1 Example of Mars explorer (Entomopter^[3])

ホバリング運動については、これまでに地球上の昆虫をモデルにして多くの研究がなされており、昆虫はホバリング時に流れを翼前縁で剥離させ、生じる強い前縁剥離渦の負圧を利用することで高い揚力を発生させていることが実験や数値計算を用いた研究により明らかになっている^[4,6]。

一方巡航時の運動については、小型探査機 MAV (Micro Air Vehicle) 開発に向けた羽ばたきの研究の中で行われている。これらの研究での Re 数は $10^4 \sim 10^5$ であり、高い推進効率を出すような羽ばたき運動は、前縁剥離渦を発生させるといった大規模剥離を伴わない運動であるという報告がなされている^[7,8]。しかし火星航空機にこれらの結果を適用するには以下の 2 点で問題がある。

- ・ 火星航空機の想定される 10^3 程度の Re 数での巡航時に於ける運動に関して多くの研究はなされておらず、この領域でどのようなメカニズムで揚力・推力が発生されているかについては議論が不十分である。
- ・ MAV 設計に向けた 3 次元羽ばたき運動の流れ場に関する研究の多くは、翼の上下運動のみを主な運動の定義としているが、実際の羽ばたき運動には、鳥や昆虫に見られるように翼の迎角を変化させるような複雑な運動であり、このような運動に対しては議論が不十分である。

これまでに岡部ら^[9]は火星航空機の羽ばたき運動を調査するため、火星航空機を想定した 10^3 程度の Re 数で CFD を用いて 2 次元羽ばたき運動を解析・議論している。また、最適化手法^[10]と組み合わせ数値計算結果から得られる翼性能に優劣を付けることにより、揚力を増大させるような羽ばたき方や、推力を増大させるような羽ばたき方について流れ場を分類し、それぞれの流れ場について議論を行った。この研究から、 10^3 程度の Re 数での 2 次元羽ばたき運動では、揚力を大きくしたい場合はダウンストローク（打ち下ろし運動）時に強い前縁剥離渦を発生させる必要があり、推力を大きくしたい場合はダウンストローク・アップストローク（打ち上げ運動）時共に前縁剥離渦の存在が重要であり、翼を傾けることにより垂直力の推力への寄与分を大きくすることがあることが分かっている。

一方で、翼の迎角を変化させるような 3 次元羽ばたき運動に関して、

どの様な流体現象が羽ばたき翼性能に寄与しているかを議論した研究は、実験・数値計算共に少ない。そこで、本研究では、上下運動とピッチ運動の両方を同時に表現した3次元羽ばたき運動を定義し、複雑になり得る翼運動に於いて発生する翼周りの渦が、どの様に翼性能に影響するかを議論する。実験でのアプローチは詳細な渦構造を捉えるには不向きであると考え、本研究では数値計算を用いることにより流れ場の詳細な理解を目指した。

本研究では2次元羽ばたき運動最適化の結果^[9]を参考にし、そのパラメータを用いて翼の運動を定義した3次元羽ばたき翼のシミュレーションを行って流れ場を議論した。2次元羽ばたき運動最適化結果で得られたパラメータは必ずしも最適な3次元羽ばたき翼の運動を与えるとは限らないが、特徴的な運動の議論には十分であると考えている。

2. 数値解析手法

(1) 計算対象

本研究では、扱う翼の寸法を Michelson らが NASA に提案した火星探査ミッション^[3]を参考にした。翼のコード長を 0.1[m]、スパン長を 0.5[m] とし、火星を約 10[m/s] の速度で巡航している状態を想定している。解析に用いた Re 数は 10^3 であり、翼のコード長を代表長さとしている。翼型には、低 Re 数に於いても空力特性が良いといわれている^[11]薄翼 NACA0002 を用いた。翼平面は矩形となっている。また、翼は剛体翼を仮定している。

(2) 3次元羽ばたき運動の定義

上下運動とピッチ運動を組み合わせた3次元羽ばたき運動は、計算格子を変形させることによって表現している (Fig.2)。上下運動は対称面を基準とした格子変形で表し、ピッチ運動は前縁を中心とした格子の回転を用いて表している。以下にこの2つの運動を表現した式を示す。

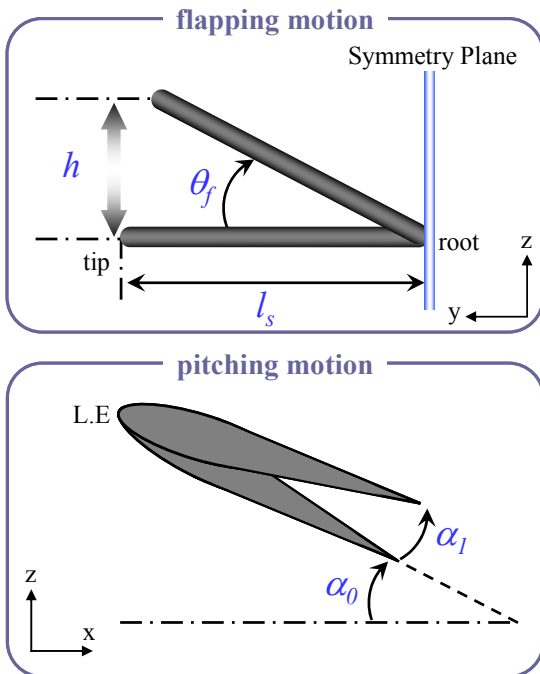


Fig.2 Schematic of flapping motion

・フラッピング運動 (上下運動)

$$\theta_f = \sin^{-1}\left(\frac{h}{l_s}\right) \quad (1)$$

$$\alpha_{flap} = \theta_f \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

・ピッチ運動

$$\alpha_{pitch} = \alpha_1 \sin\left(kt + \phi - \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_0 \quad (3)$$

ここで、

$$k = \frac{2\pi fc}{U_\infty} \quad (4)$$

である。これらの式の中の変数 $k, h, \alpha_0, \alpha_1, \phi$ を適当に変化させることにより羽ばたき運動を実現する。 α_{flap} はフラッピング角を表しており、 θ_f が最大のフラッピング角である。 k は式(4)で表される羽ばたきの周波数 f を無次元化したものであり、 h はコード長 c で無次元化された翼端での上下運動振幅の大きさである。 α_0 はオフセット角であり、 α_1 は翼前縁を中心に回転させるピッチ運動の変化を表すピッチ角である。 ϕ は上下運動とピッチ運動の位相差を示している。 U_∞ は一様流の速度であり、 t は一様流速度とコード長で無次元化された時間である。

上述の運動は岡部らの2次元計算と同様のパラメータ設定を施しており、変数 $k, h, \alpha_0, \alpha_1, \phi$ の値は2次元多目的最適化結果で得られた最適解の1つを選んだ。前述したように2次元羽ばたき運動最適化結果で得られたパラメータは、必ずしも最適な3次元羽ばたき翼の運動を与えるとは限らないが、特徴的な運動の議論には十分であると考えている。以下に今回使用した運動パラメータを示す。これは2次元計算に於いて、揚力を最も多く増大させる運動のパラメータである。揚力を稼ぐ羽ばたき運動では前縁剥離渦の存在が重要であることが様々な研究で提唱されており、このパラメータを用いることで本解析でも大きな前縁剥離渦が発生することが推測される。

Table.1 Parameter of flapping motion

k	0.93
h	2.33
α_0	23.8
α_1	47.1
ϕ	86.5

(3) 3次元羽ばたき運動の概要

まず、本解析で設定したパラメータによる羽ばたき翼の運動を説明する。1周期あたりのフラッピング角、ピッチ角の変化を Fig.3 に示す。

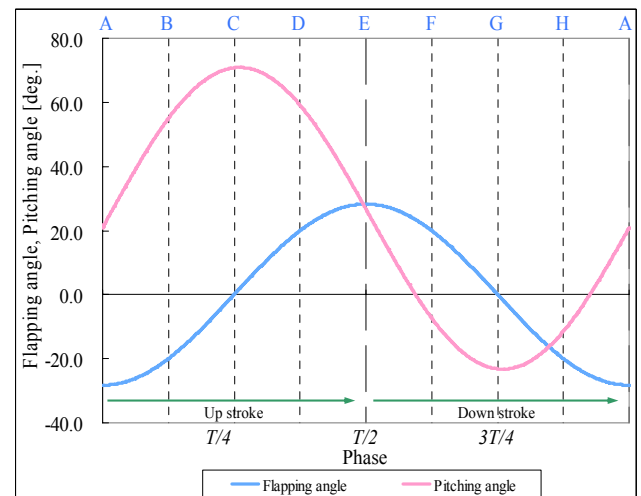


Fig.3 Time histories of flapping angle, pitching angle

Fig.3 中のフェーズ A からフェーズ E までをアップストローク、フェーズ E からフェーズ A に戻るまでの運動がダウンストロークである。これら 1/8 周期毎の運動の様子を Fig.4 に示す。それぞれ

の時刻での左図は上流側から、右図は翼根側から翼を見た図である。ここで、赤線は翼前縁を、青線は翼後縁を表しており、赤色の面が翼上面を、青色の面が翼下面を表している。本解析で設定したパラメータでは、翼の上下運動にピッチ運動が複雑に入り込むような運動となっており、横から眺めると8の字を描くような運動となっている。

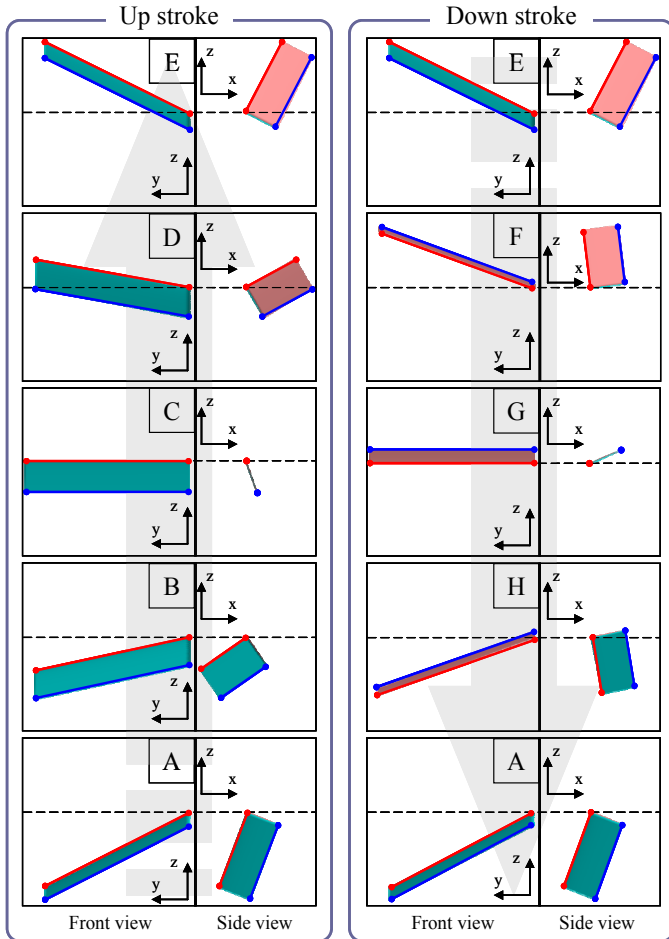


Fig.4 Instantaneous flapping wing position for each phases

(4) 計算手法

3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式と連続の式を支配方程式とした CFD 解析を行った。本解析では、圧縮性の計算プログラムからの書き換えが比較的容易である点、また空間の圧力分布を求める際にベクトル化が容易である点を考慮し、支配方程式の解法に擬似圧縮性解法^[12]を採用した。この手法で用いる擬似的な圧縮率 β には 20 を用いた。対流項の離散化には Roe スキームを MUSCL 法により高次精度化したものを用い、粘性項は 2 次精度中心差分により評価した。

本研究で扱った羽ばたき運動による流れ場は、物体が動き、流れ場が常に変化する非定常な流れである。そのため時間方向の精度が重要となる。そこで本解析では、2 次精度クランク・ニコルソン法を用いて LU-SGS 陰解法^[13]と Dual Time Stepping 法とを組み合わせ時間発展をさせることにより時間方向の精度を保っている。本研究では低 Re 数であることに加え、乱流に伴って発生する細かな渦を解く必要は無く、剥離により生ずる比較的大きな渦構造を捉えればよいと考えたため、乱流モデルは使用せず層流計算とした。

(5) 計算格子

本研究で用いた計算格子を Fig.5~7 に示す。計算格子には Fig.5

に示すような C-H 型格子を用いた。格子点数は $201 \times 99 \times 101$ の合計約 200 万点である。翼の前後上下の外部境界はコード長の 20 倍とした。本研究では、3 次元羽ばたき運動特有の現象であるスパン方向流れが重要な渦構造の 1 つであると考え、翼スパン方向の外部境界は、コード長の 50 倍をとっている。また、翼周りの渦を詳細に捉える必要があることから、Fig.6, Fig.7 に示すように翼面付近に格子を集中させ、更には翼端部で密となるような格子分布とし、十分な格子解像度を保った。

本研究では左右対称の羽ばたき運動を想定しているため、翼根は対称面と同じ面としている。

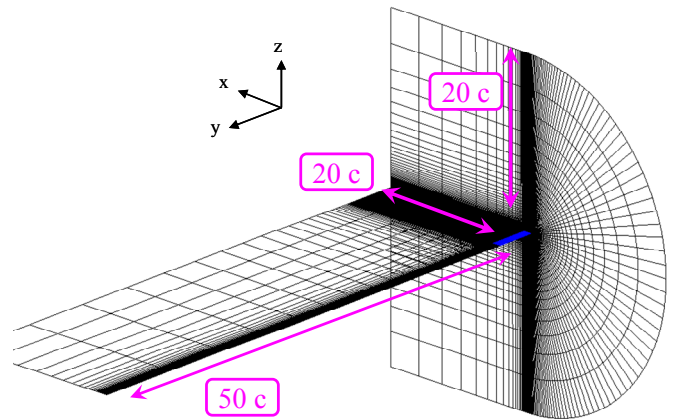


Fig.5 Whole image of computational grid

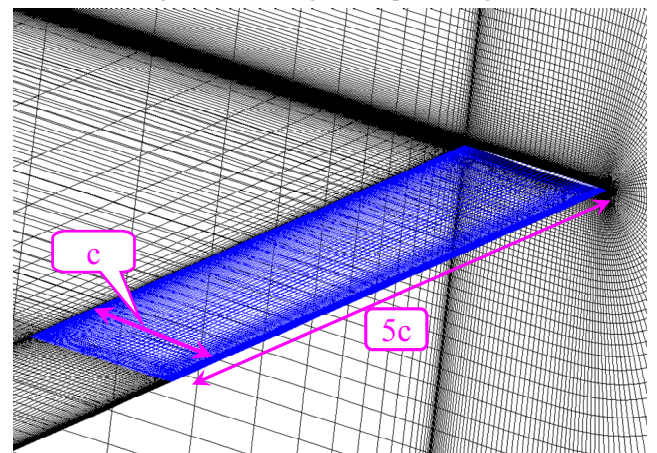


Fig.6 Computational grid (close-up view)

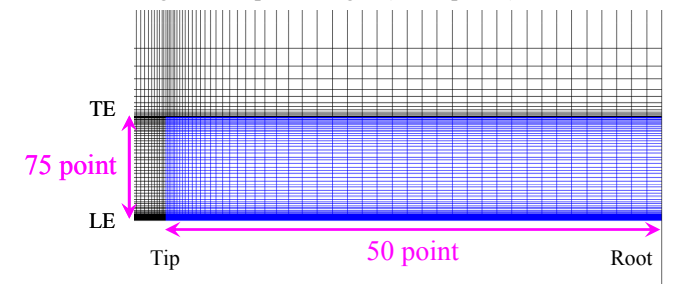


Fig.7 Computational grid (top view)

(6) 空気力の評価方法

本解析では、アップストロークとダウンストロークを 1 回ずつ行った運動を 1 周期と定義し、初期条件の影響が無くなるまで周期を繰り返して計算した。定性的な議論が可能な 6 周期目での羽ばたき運動を空気力の評価に用いている。平均揚力 $C_{L_{ave}}$ や、平均推力 $C_{T_{ave}}$ を議論する際には、1 周期目からの平均値を用いるのではなく、6 周期目のみの平均値として算出した。

3. 結果及び考察

(1) 羽ばたき運動中の翼性能の推移

次の Fig.8 に本解析での 1 周期あたりの揚力係数・推力係数の推移を示し、Table 2 に 1 周期の平均値を記す。図から分かるように、この運動では主にダウンストローク運動中に揚力を発生させており、ダウンストロークからアップストロークに切り替わる直前に最大の揚力となっている。また、推力に関しては増減を複数回繰り返しており、アップストロークからダウンストロークに切り替わる際には大きな抵抗力となっている。

Table.2 Average value of lift and drag coefficient

$C_{L,ave}$	2.26
$C_{T,ave}$	-0.01

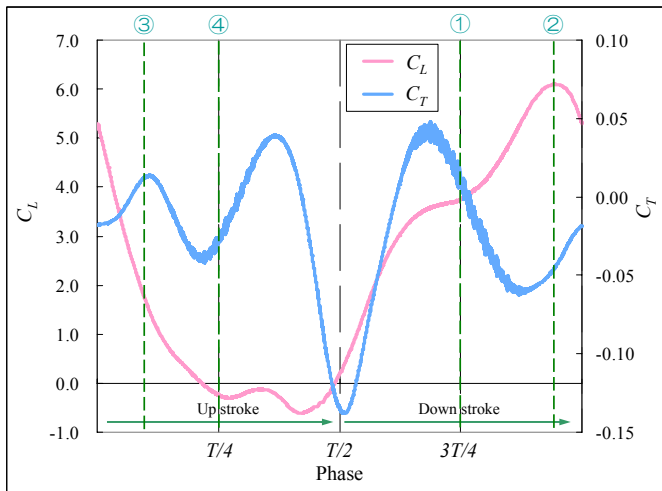


Fig. 8 Time histories of Lift coefficient and Thrust coefficient

Fig.8 でのフェーズ①～④に於ける翼周りの圧力分布、翼表面の圧力係数分布、速度勾配テンソル第 2 不変量の等値面を用いて渦構造を表したもの (x 方向渦度で面塗り) を、Fig.9～12 にそれぞれ示す。

・T= ① (Fig.9)

フェーズ①は 3/4 周期にあたる時刻であり、ダウンストローク運動の丁度中間である。ここでは前縁から剥離した大きな渦が翼上面に存在しており、大きな負圧を稼いでいることが分かる。大きな前縁剥離渦の形成後、翼前縁には次の前縁剥離渦が形成され始めており、前縁剥離渦は複数存在することが分かる。また翼端では、翼の打ち下ろしの影響で翼端から剥離した渦（これ以降本論文ではこれを翼端渦と呼ぶ）が発生しており、その構造が非常に複雑に入り組んでいることが伺える。更に渦の等値面の面塗りから、この翼端渦は縦渦であると考えられ、翼端で剥離した流れがその後縦渦を形成していることが分かる。また、翼上面が前方に向くような瞬間であることから、翼に発生する垂直力は流れに対して逆らう方向の成分を持つことになり、推力に寄与していると考えられる。

・T= ② (Fig.10)

フェーズ②は揚力が最大を迎える時刻であり、ダウンストローク運動からアップストローク運動に切り替わる直前である。ここではフェーズ①で見られた前縁剥離渦が翼上面の広範囲に分布しており、翼上面に大きな負圧部を形成していることがわかる。また下面の圧力分布が高いことから、翼に発生する垂直力は大きくなり、周期の中で最大の揚力を生じていることが裏付けされる。フェーズ①では翼端にて大きく存在していた翼端渦は、後流へと流れ去ってしまっている。

・T= ③ (Fig.11)

フェーズ③はアップストロークに切り替わったやや後の瞬間場であり、揚力が徐々に減少している瞬間である。ここでは、翼根側上面で大きな前縁剥離渦が残っており、翼根付近で負圧を稼いでいることが分かる。しかし翼端側では前縁剥離渦も翼端渦も存在せず、アップストローク運動により翼上面の圧力が高くなっていることが分かる。

・T= ④ (Fig.12)

フェーズ④は 1/4 周期にあたる時刻であり、揚力は最小値付近まで減少している。前縁剥離渦は存在しているものの、翼から若干の距離を置いて存在しているため翼面上への影響は少ない。また、翼下面の圧力分布と、翼構造の図から、翼下面方向へ前縁から剥離する渦の存在が確認され、翼下面に負圧部を形成している。

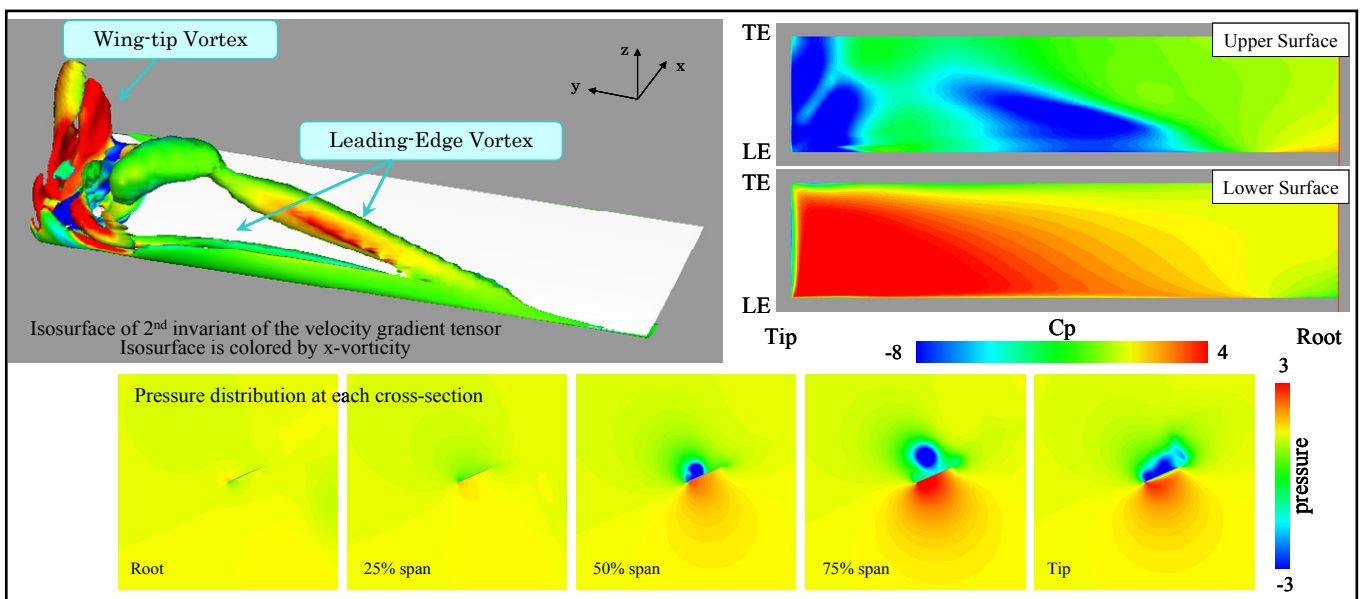


Fig.9 Pressure distribution and vortex structure (phase ①)

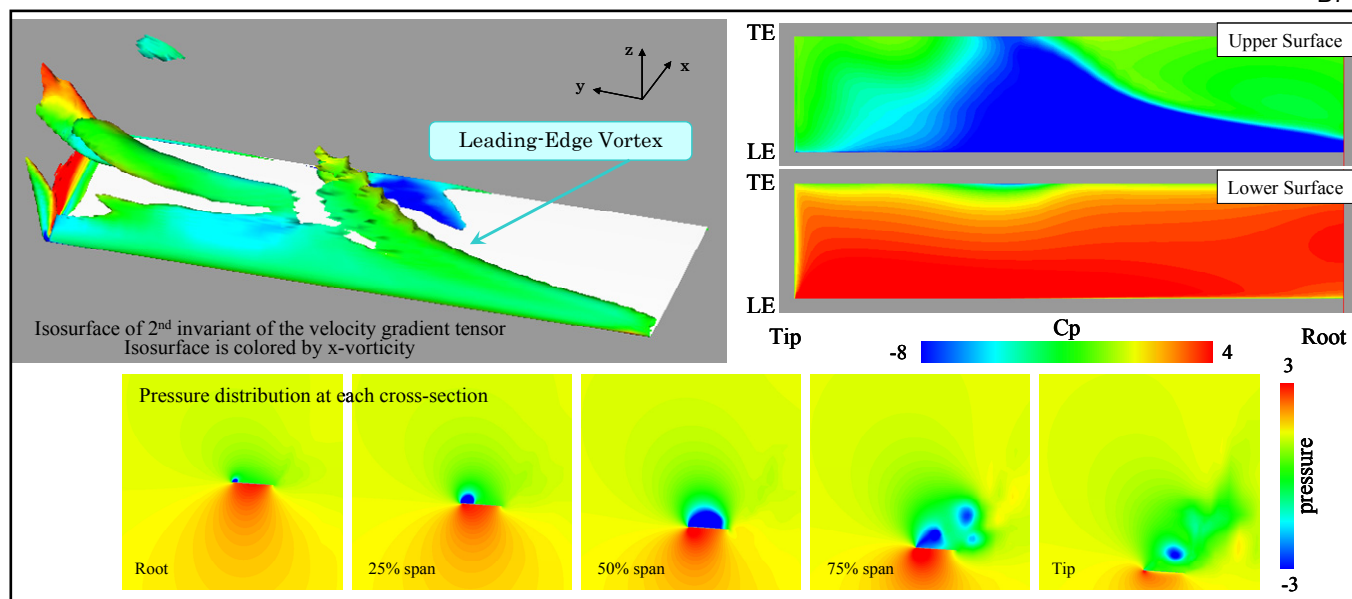


Fig.10 Pressure distribution and vortex structure (phase ②)

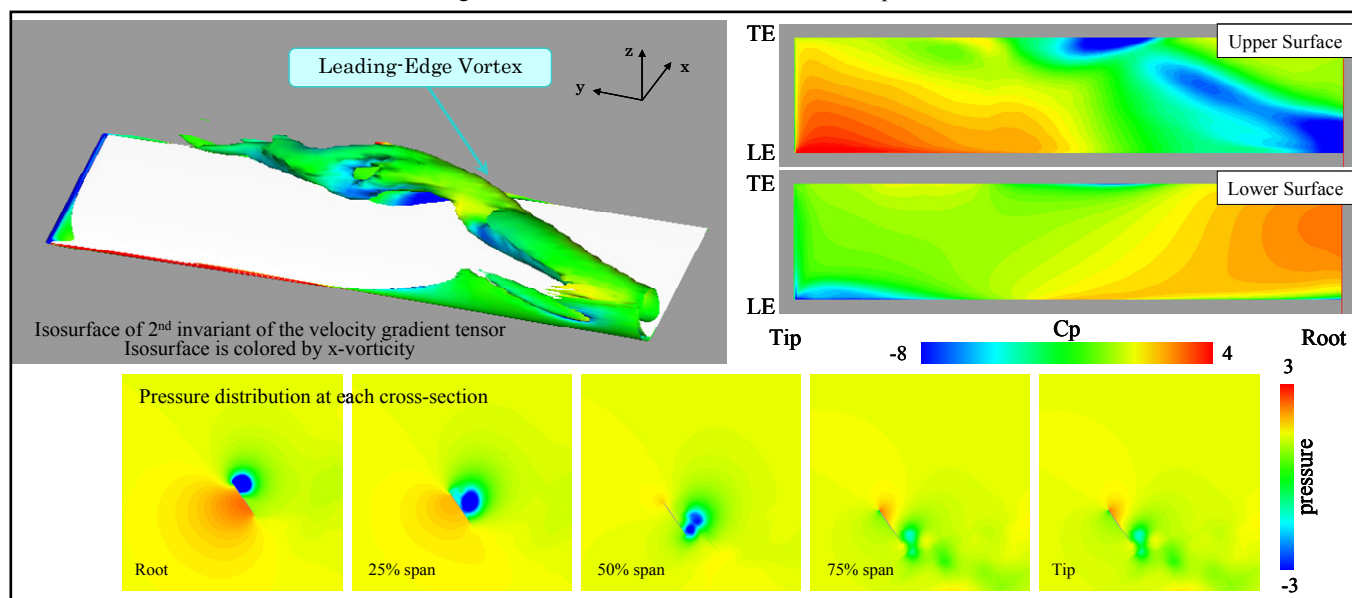


Fig.11 Pressure distribution and vortex structure (phase ③)

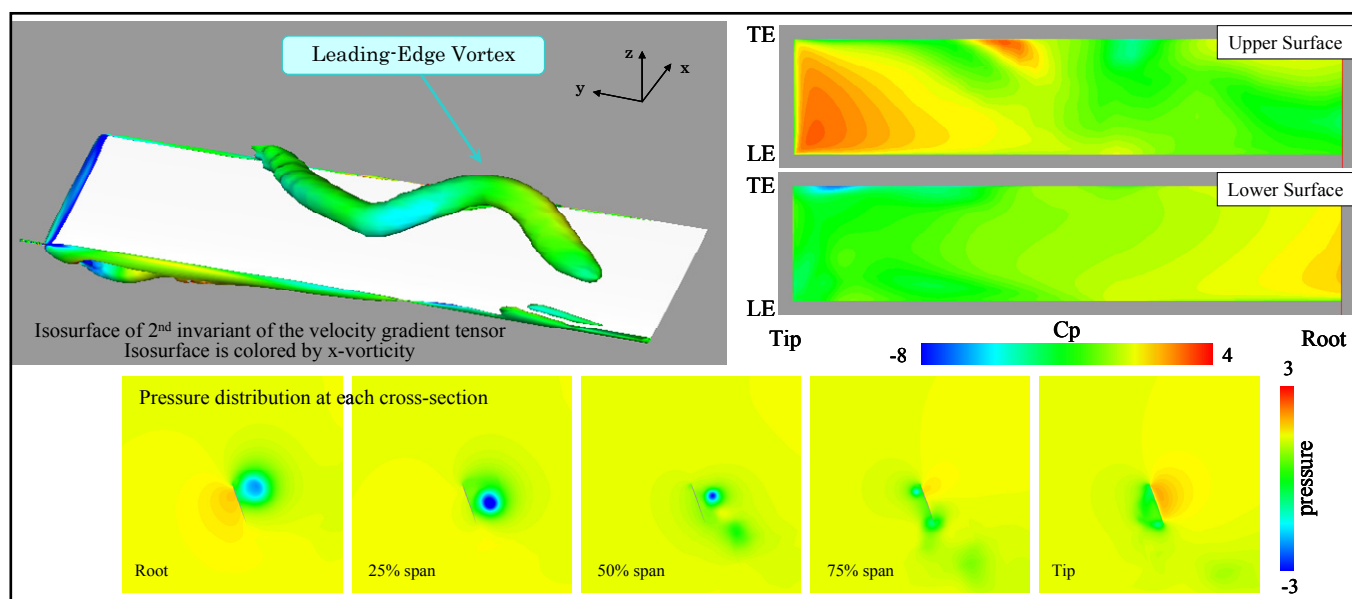


Fig.12 Pressure distribution and vortex structure (phase ④)

(2) スパン方向の揚力分布

以下では、翼周りの渦発生と、その渦が揚力の発生にどう寄与しているかをより詳細に議論する。まず、Fig.13 の様に翼をスパン方向に4分割し、それぞれの領域毎の揚力係数の分布を考える。この領域毎の揚力係数の時間履歴を Fig.14 に示す。

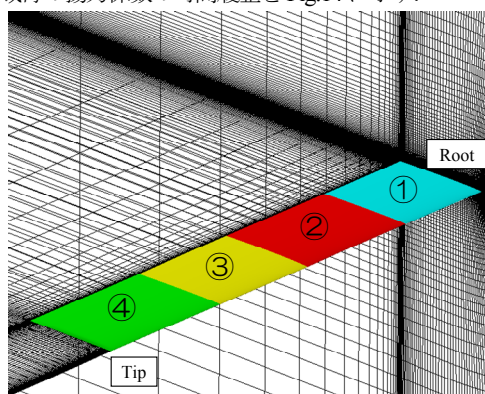


Fig.13 Splitted region

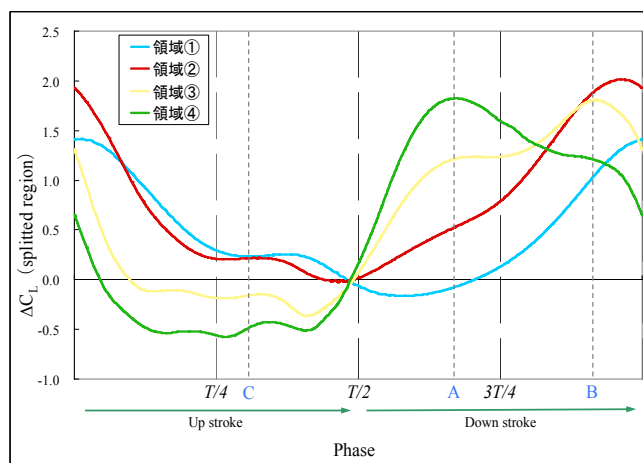


Fig.14 Time histories of ΔC_L at splitted region

1 周期の間で揚力はダウンストローク時に増大することは先に示したが、Fig.14 より翼端側から徐々に揚力はピークを迎えていることが分かる。まずダウンストロークが始まると一番翼端側の領域④から揚力が上昇し、その後③、②、①と徐々に翼根側へと揚力の増大がシフトしていく。この翼面上での揚力の発生要因を翼周りに発生する渦と関連させて以下に示す。

Fig.14 に於いて、翼端側の領域④が最大の揚力を稼ぐフェーズをA、翼端から2つ目の領域③が最大の揚力を稼ぐフェーズをB、翼根側の2つの領域①・②の揚力の減少が一度落ち着く点をCとし、それぞれのフェーズのスパン方向の単位長さあたりの揚力分布と、翼周り渦構造を Fig.15 に示す。翼端側の揚力が最大となるフェーズAでは、前縁から剥離した前縁剥離渦が翼端側の領域から発生しており、それよりも更に翼端側に翼端渦が発生している。また、揚力の分布を見ると、渦の発生領域と揚力の上昇している領域が一致しており、前縁剥離渦が存在するミッドスパンから翼端にかけての揚力が大きく、更には翼端付近の揚力上昇が大きいことから、このフェーズでは前縁剥離渦に加え、翼端渦の揚力への寄与が大きいことが分かる。

次に、領域③が最大揚力を迎えるフェーズBでは、フェーズAで発生した前縁剥離渦が翼端側から徐々に翼根側に移動している。この前縁剥離渦の移動と共にスパン方向の揚力ピークも翼根側へと移動しており、前縁剥離渦が広範囲に負圧部を作り出すことが

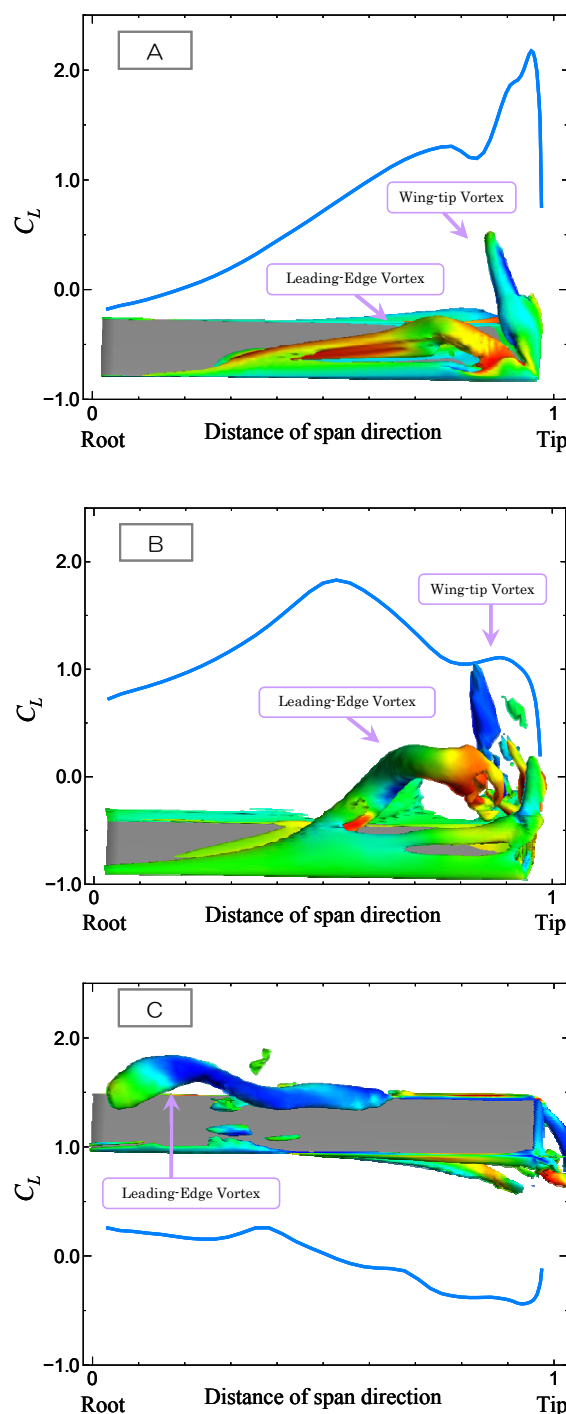


Fig.15 C_L distribution for span direction and Isosurface of 2nd invariant of the velocity gradient tensor

わかる。また、フェーズAでは大きな縦渦となって存在していた翼端渦は、この時刻では細かく複雑な形状となっているが、未だ揚力への寄与分は大きい。

アップストローク運動に関して、ミッドスパンから翼端側の領域③・④では負の揚力になってしまう期間が多い。しかし、翼根側の領域①・②ではほぼ正の揚力を保っている。これはフェーズCでの渦構造の様に、ダウンストローク時に発生し翼根側に徐々に移動していた前縁剥離渦が、流れ去ること無く翼根付近に停滞していることが要因であると考えられる。Fig.15 に於いても、翼の打ち上げにより翼下面に流れが回りこみ、領域③・④では翼下

面側に剥離渦が形成され負の揚力となっているが、領域①・②では大きな剥離渦が翼上面に存在しており、この剥離渦のある箇所では正の揚力となっていることが分かる。

以上の様に、羽ばたき運動に際して、翼面上に発生する渦が翼性能に与える影響は大きいと考えられる。ダウンストローク運動では翼端から剥離した流れが翼上面に流れ込み、翼端部における正の揚力発生に大きく寄与している。また、高迎角に起因して発生する前縁剥離渦は、スパン方向流れによりその安定性が保たれることが知られている^[14]。しかし、本解析で設定した様な上下運動を行いながらピッチ運動を行う翼の運動では、前縁剥離渦の形成は流れとは逆に翼端側から徐々に形成され、翼上面で広がりながら翼根側へとその形成がシフトしていた。この翼根側の前縁剥離渦が長時間残ることにより揚力の低下を防いでいることが分かった。また、前縁剥離渦が大きく形成される以前は、翼端で剥離した翼端渦による負圧が揚力の維持に貢献していることが分かった。

4. 結言

上下運動とピッチ運動を同時に行う複雑な羽ばたき運動について 3 次元 CFD 解析を行い、渦の挙動とその翼性能への影響について調査を行った。本研究で得られた知見は以下の通りである。

- ・ダウンストローク運動の始まりとほぼ同時に翼端渦が形成され始め、前縁剥離渦形成前の時間帯で大きく揚力に寄与している。
- ・ダウンストローク運動を通じて、複数の前縁剥離渦が発生していることが確認された。
- ・前縁剥離渦は翼端側から形成され始め、徐々に翼根側の翼上面に形成されていく。
- ・最後に翼根付近に強い前縁剥離渦が形成され、これがアップストローク運動の際にも翼上面に長く停滞することで大きな負圧を稼ぎ、揚力の低下を防いでいる。

以上の様に本解析では、従来羽ばたき運動の揚力確保に支配的とされていた前縁剥離渦の効果に加え、翼端渦の寄与分も大きいことを示した。しかし、今回設定した羽ばたき運動のパラメータは一例に過ぎず、他の運動ではどの様に渦が振舞うかは未知である。そこで、今後は最適化手法と組み合わせることにより、3 次元羽ばたき運動の流れ場を分類し、それぞれの特徴に合わせ、流れ場と翼性能の関係を調査する予定である。

参考文献

- [1] Guynn, M. D., Croom, M. A., Smith, S. C., Parks, R. W. and Gelhausen, P. A., "Evolution of a Mars Airplane Concept for the ARES Mars Scout Mission," AIAA Paper 2003-6578, 2003.
- [2] 田中義輝, 岡部能幸, 鈴木大晴, 中村久美子, 久保大輔, 徳弘雅世, 李家賢一, 地質・地形探査用火星航空機の概念設計について, 日本航空宇宙学会第 36 期年会講演会講演集 (2005), 61-64.
- [3] Robert C. Michelson, Messan A. naqvi, Extraterrestrial Flight (Entomopter-Based Mars surveyor), Low Re Aerodynamics on Aircraft Including Applications in Emerging UAV Technology RTO-AVT von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series Nov. 24-28, 2003.
- [4] Weis-Fgh, T., "Quick Estimate of Flight Fitness in Hovering Animals, Including Novel Mechanism for Lift Production," *Journal of Experimental Biology*, Vol. 59, 1973, pp. 169-230.
- [5] Ellington, C. P., Usherwood, J. R., "Lift and Drag Characteristics of Rotary and Flapping Wings," edited by Thomas J. Mueller, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2001.
- [6] Liu, H., Ellington, C. P., Kawachi, K., Van den Berg, C., and Willmott, A. P., "A Computational Fluid Dynamic Study of Hawkmoth Hovering," *Journal of Experimental Biology*, Vol. 201, No. 4, 1998, pp. 461-477.
- [7] Isogai, K., Shinmoto, Y., "Effects of dynamic stall phenomena on propulsive efficiency and thrust of a flapping airfoil," AIAA Paper 97-1926, 1997.
- [8] Ramamurti, R., Sandberg, W., "Simulation of Flow About Flapping Airfoils Using Finite Element Incompressible Flow Solver," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 2, February 2001.
- [9] 岡部能幸, 下山幸治, 藤井孝藏, "羽ばたき型火星航空機の羽ばたき運動に関する考察", 第 19 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, B2-2, 2005
- [10] Deb, K., *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, Ltd., 2001.
- [11] Peter J. Kunz, Analysis and Design of Airfoils for Use at Ultra-Low Reynolds numbers, Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications (Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 195) Chapter 3, p35-60, 2001
- [12] Chorin, A. J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, Vol.2, August 1967, pp.12-26.
- [13] Yoon, S., Kwak, D., Chang, L., "LU-SGS Implicit Algorithm for Three Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations with Source Term" AIAA Paper 89-1964-CP, 1989.
- [14] Ellington, C. P., Usherwood, J. R., "Lift and Drag Characteristics of Rotary and Flapping Wings" edited by Thomas J. Mueller, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2001