

軸方向磁場下における回転円板と静止円板間の非圧縮性流れの厳密解

Exact solution for an incompressible flow between a rotating disk and a stationary disk in the presence of an axial magnetic field

○ 田川俊夫, 首都大, 日野市旭が丘 6-6, E-mail: ttgawa@cc.tmit.ac.jp
Toshio Tagawa, Tokyo Metropolitan University, 6-6 Asahigaoka, Hino, Japan

Exact numerical solutions have been obtained for the laminar flow between a rotating and a stationary disk, whose radii are sufficiently large in comparison with the gap between the two disks. The gap space is assumed to be filled with an electric conducting fluid that has a small magnetic Prandtl number in order to control the fluid flow by the Lorentz force and to neglect the influence of the induced magnetic field. The flow depends on both the Reynolds number and the Hartmann number. As the Reynolds number increases, the region of rigid body rotation is observed between the two boundary layers, whose thickness becomes thinner in proportional to the square root of the Reynolds number. On the other hand, as the Hartmann number increases, the Lorentz force tends to suppress the secondary flow significantly and boundary layer thickness of the azimuthal component of velocity is proportional to the inverse of the Hartmann number.

1. はじめに

静止流体中において無限回転円板により誘起される流れの研究は、von Kármán⁽¹⁾が流れの相似性（半径に比例して、半径方向と周方向の速度成分が大きくなる）に着目したことにより始まり、その後Cochran⁽²⁾がNavier-Stokes方程式の数値解を求めている。それとは逆に、一様回転流中の軸に対して直交するように置かれた静止円板近傍に発達する境界層は、Bödewadt *et al.*⁽³⁾により初めて調べられ、現在では、回転円板近傍の境界層よりも容易に不安定化することが知られている。これらの境界層流れは、Navier-Stokes方程式の非線形相似厳密解として知られている。一方で、同軸回転二円板間の流れはより複雑で、Batchelor⁽⁴⁾以降、いくつか研究されている^(5,6)。2つの円板が各々異なる角速度で回転する場合が一般性を有すると考えられるが、ここでは、Fig.1に示されるように、一方が静止で他方のみが一定角速度 ω で回転する場合を想定する。一円板の回転流とは違って、この二円板の隙間流は、半径位置に対して流れ場は相似であるものの、隙間長を基準にしたReynolds数（ $=\omega d^2/\nu$ ）に依存して、速度分布が様々に変化するという点で非常に興味深い。あるReynolds数以上になると、静止円板近傍に発達するBödewadt境界層と回転円板近傍に発達するKármán境界層との間のコア領域においては、半径方向速度成分はほぼ0になり、弱い軸方向流を伴う一様回転流が観察される。この一様回転流の角速度は、回転円板のその約0.3倍である。一方で、一円板の回転流に対する磁場効果については、例えば、Attia⁽¹⁰⁾、Davidson and Pothérat⁽¹¹⁾、Moresco and Alboussière⁽¹²⁾によって調べられている。本研究では、対流制御に資するために、作動流体は低磁気プラントル数近似が成立する導電性流体であるとし、回転差のある無限二円板の隙間流に対する一様な軸方向磁場の影響について報告する。

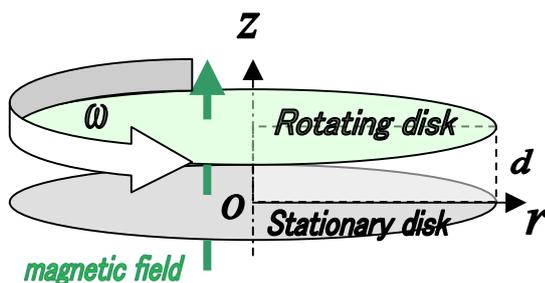


Fig. 1 Schematic model for the system considered.

2. 支配方程式と解析方法

導電性流体は非圧縮性のニュートン流体であると仮定し、粘性散逸、ジュール熱および誘導磁場は無視できるものとする。また、流れ場と電磁場は軸対称かつ半径位置に依らずに相似とする。差分法を用いた数値解析を行う上では、まず半径方向の圧力勾配、および半径方向の電場を求める必要がある。ただし後述のように、これらの半径方向の圧力勾配および電場は、流れ場や電磁場の半径方向の相似性を考慮することにより、軸方向には変化せず一定値であることがわかる。常微分化された無次元支配方程式は、以下のように表される。

<連続の式>

$$2U + W' = 0 \quad (1)$$

<運動方程式>

$$U^2 + WU' - V^2 = -P_R + (1/Re)U'' + (Ha^2/Re)J_\theta \quad (2)$$

$$2UV + WV' = (1/Re)V'' - (Ha^2/Re)J_r \quad (3)$$

$$WW' = -P' + (1/Re)W'' \quad (4)$$

<電荷保存則>

$$2J_r + J_z' = 0 \quad (5)$$

<Ohmの法則>

$$J_r = -\Psi_R + V, \quad J_\theta = -U, \quad J_z = -\Psi' \quad (6,7,8)$$

ここで、プライム記号はZ微分を表し、 P_R 、 Ψ_R はそれぞれ半径方向の圧力勾配及び電位勾配を表すものとする。無次元数および無次元の変数の定義は以下の通りである。

$$Z = \frac{z}{d}, \quad U = \frac{u}{\omega r}, \quad V = \frac{v}{\omega r}, \quad W = \frac{w}{\omega d}, \quad P = \frac{p}{\rho \omega^2 d^2}, \quad (9)$$

$$P_R = \frac{p_R}{\rho \omega^2 r}, \quad J_r = \frac{j_r}{\sigma b_0 \omega r}, \quad J_\theta = \frac{j_\theta}{\sigma b_0 \omega r}, \quad J_z = \frac{j_z}{\sigma b_0 \omega d},$$

$$\Psi = \frac{\psi}{b_0 \omega d^2}, \quad \Psi_R = \frac{\psi_R}{b_0 \omega r}, \quad Re = \frac{\omega d^2}{\nu}, \quad Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} b_0 d$$

(4)で、両辺Rで偏微分すると、WのR微分はゼロなので、

$$P'_R = \partial^2 P / (\partial R \partial Z) = 0 \quad (10)$$

が得られる。(10)をZで積分することにより、(2)における半径方向

の圧力勾配 P_R は、単に半径位置 R に比例して大きくなり (von Kármánの相似性)、 Z に依存しないことは注目すべきである。同様にして、電位勾配 Ψ_R も Z に依存しないことがわかる。

$$\Psi'_R = \partial^2 \Psi / (\partial R \partial Z) = 0 \quad (11)$$

つまり、(9)の定義からわかるように、 P_R 、 Ψ_R は一定値である。これらは、(1)、(5)の連続の条件及び以下の(12)で与えられる境界条件から、それぞれ U および J_z を円板間に渡って Z で積分した値が零になるように求められる。境界条件は、滑りなしの電気絶縁板を想定し、以下の通り表される。

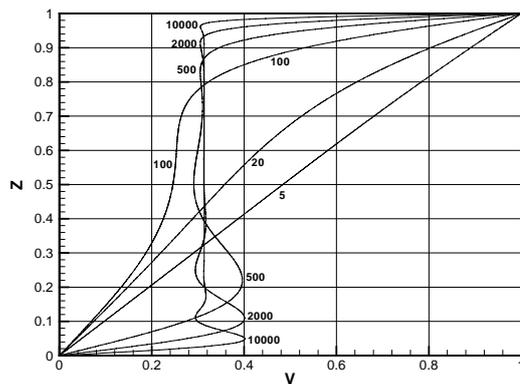
$$\begin{cases} U = V = W = J_z = 0 & \text{at } Z = 0 \\ U = W = V - 1 = J_z = 0 & \text{at } Z = 1 \end{cases} \quad (12)$$

なお、(2)、(3)、(4)式には時間項を導入し、HSMAC法を用いて定常になるまで計算を繰り返す。なお、(2)、(3)、(4)式の移流項はすべて中心差分法により離散化し、格子数は Z 方向に512点とし、結果に対する格子数の依存性はほぼ無いことを確認している。

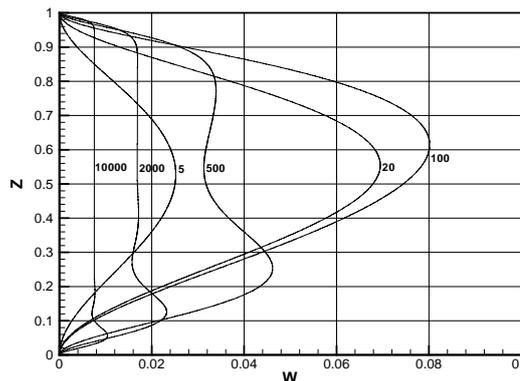
3. 解析結果

3.1 印加磁場が無い場合

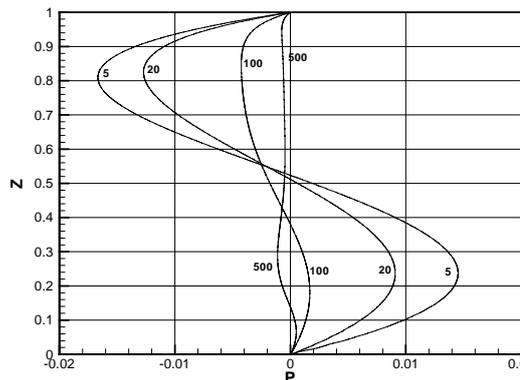
Fig.2は、様々な Re 数に対するそれぞれ (a) 半径方向、(b) 周方向、(c) 軸方向の各速度成分、および (d) 圧力分布を示す。 Re 数が小さい極限の流れは、 $U = W = 0$ かつ V が直線分布のCouette流である。一方、 $Re = 2000$ を超えたあたりから、明確に二つの境界層とコア領域が形成されることがわかる。その場合、境界層の厚さは、 Re 数の0.5乗に比例して薄くなることわかる。 $Z = 1$ の回転面近傍に発達するKármán境界層では、遠心力により半径方向外向きの流れが誘起されている。一方で、 $Z = 0$ の静止面近傍に発達するBödewadt境界層では、半径方向および周方向の速度成分に振動が見られる。これらの傾向は一円板流のそれぞれの結果と定性的に同じである。今回の計算結果によると、高 Re 数の場合、剛体回転するコア領域での周方向速度成分は $V_c = 0.313$ であり、その軸方向速度成分は $W_c = 0.755 / Re^{0.5}$ であった。またコアでの圧力は、 W が既知であるので、(4)式から直ちに、 $P_c = -0.285 / Re$ となることもわかる (Fig.2(d)では値が小さく、それを確認出来ないため描線を割愛している)。次に高 Re 数で剛体回転のコア領域が存在する場合に限り、円板の配置および無次元化を統一した状態で一円板流との比較を行う。 $V_c = 1$ の剛体回転中に置かれた静止円板上面近傍に発達するBödewadt流では、 $W_c = 1.350 / Re^{0.5}$ 、 $P_c = -0.912 / Re$ である。一方、静止流体中の回転円板下面近傍に発達するKármán流では、 $W_c = 0.884 / Re^{0.5}$ 、 $P_c = -0.391 / Re$ である。一円板流では、いずれも二円板流 (Kármán-Bödewadt流) より大きな値をとる。Table 1に、壁面上における周方向の速度勾配値とともに結果をまとめる。



(b) Azimuthal component of velocity



(c) Axial component of velocity



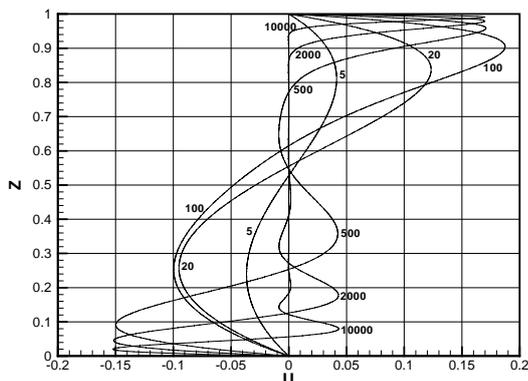
(d) Pressure

Fig.2 The velocity and pressure profiles for the various Reynolds numbers at $Ha = 0$.

Table 1 Important values obtained for the large Reynolds number limit in the absence of magnetic field ($Ha = 0$).

	一円板流		二円板隙間流	
	Kármán 流	Bödewadt 流	Kármán 層	Bödewadt 層
V_w'	$0.616 Re^{0.5}$	$0.773 Re^{0.5}$	$0.526 Re^{0.5}$	$0.135 Re^{0.5}$
V_c	0.000	1.000	0.313	
W_c	$0.884 / Re^{0.5}$	$1.350 / Re^{0.5}$	$0.755 / Re^{0.5}$	
P_c	$-0.391 / Re$	$-0.912 / Re$	$-0.285 / Re$	

Fig. 3には、各 Re 数に対する、周方向の速度勾配値をまとめたものを示す。 $Z = 1$ のKármán層は速度勾配が大きく、 $Z = 0$ のBödewadt層の速度勾配は相対的に小さいのが見てとれる。境界層とコアが明確になる $Re = 1000$ 以上では、グラフの傾きは0.5である一方、境界層が干渉する中程度の Re 数では、Bödewadt層において複雑な挙動を示している。



(a) Radial component of velocity

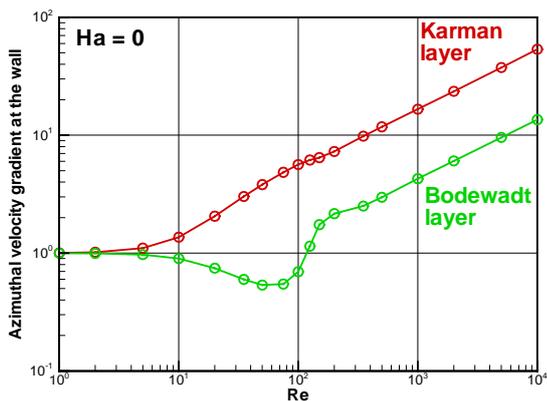
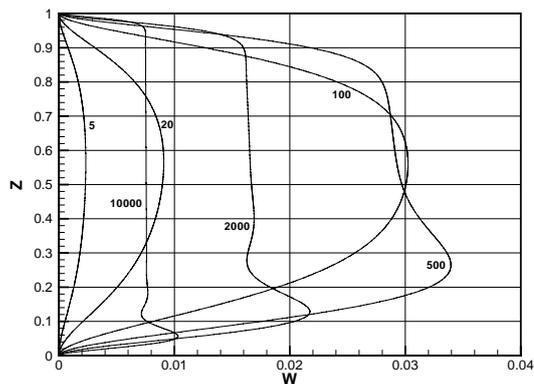


Fig.3 The azimuthal velocity gradient at the walls for the various Reynolds numbers at $Ha = 0$.



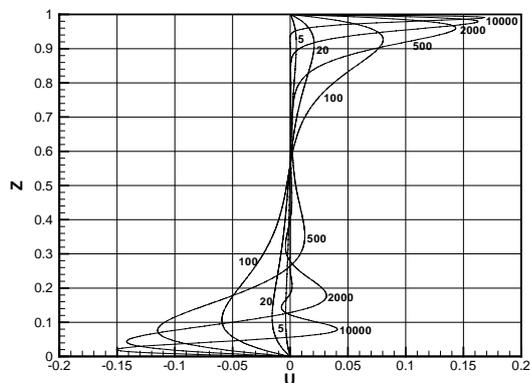
(c) Axial component of velocity

Fig.4 The velocity and pressure profiles for the various Reynolds numbers at $Ha = 10$.

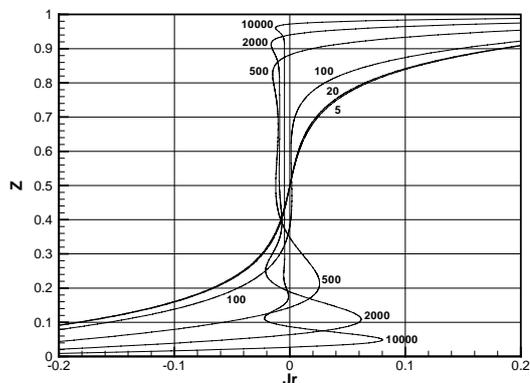
3.2 磁場の影響

一例として、 $Ha = 10$ のときの磁場効果を Fig.4 に示す。 $Ha = 10$ はそれほど大きな磁場強度ではないが、Fig.2 との比較により、低 Re 数の流れが、より大きな影響を受けているのが判断できる。(a) の半径方向速度成分は抑えられる傾向にあるのが見てとれる。高 Re 数におけるコアの流速は一見ゼロに見えるが、 Ha 数に依存して微妙に $U = 0$ からずれる。そのため、磁場無し時に見られたような剛体回転流ではない。(b) の周方向速度成分では、低 Re 数であればあるほど、コア速度が 0.5 に近づいていくことがわかる。(c) の軸方向速度は、Lorentz 力の影響を直接は受けないが、半径方向速度の抑制のため、間接的に減速される。結局、磁場印加により二次流れは抑制される。

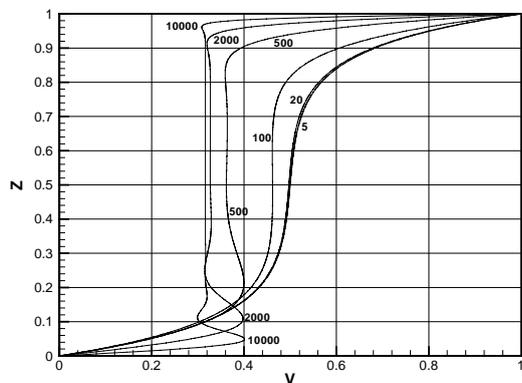
Fig.5 には電磁場分布を示す。(a) の半径方向の電流密度成分 J_r は、周方向速度成分 V を平行移動させたものに相当する。その移動量は一定値の半径方向電位勾配 (電場) の大きさであり、それは各々の計算条件に依存して変わる。この J_r は(3)式の外力項として含まれ、たとえその値が大きくないとはいえ、他項と釣りあう必要がある。そのために、半径方向速度成分 U がゼロではなくなり、磁場印加時は電磁力と慣性力が釣りあう。(b) の軸方向の電流密度 J_z は、たとえ Re 数が大きい場合であっても、コアのそれは一定値ではなくて傾斜している。 J_z に傾斜があるということは、そこで周方向に Lorentz 力が作用し、周方向の慣性力 ($2UV$) と釣り合う。(c) の電位は、静止円板における電位をゼロに固定して描いたものであるが、 J_z の積分値になっている。電流の向きは、流れの軸方向成分と同様、静止円板から回転円板に向かう。



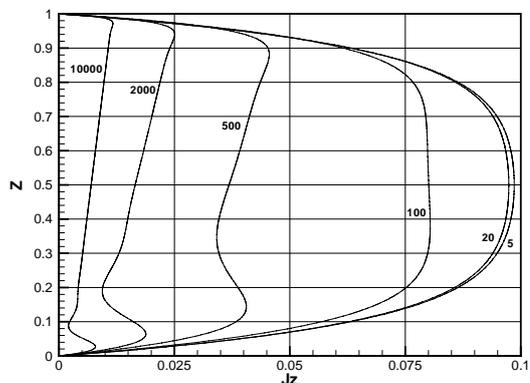
(a) Radial component of velocity



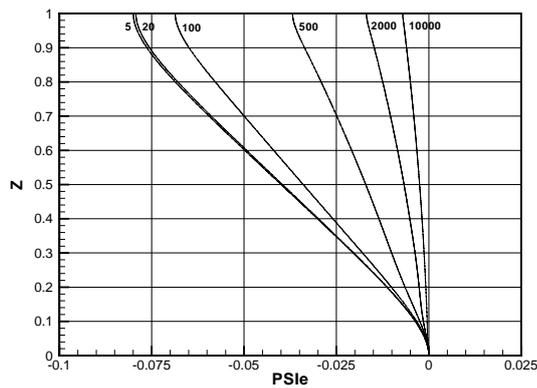
(a) Radial component of electric current density



(b) Azimuthal component of velocity



(b) Axial component of electric current density



(c) Electric potential

Fig.5 The electric current density and electric potential profiles for the various Reynolds numbers at $Ha = 10$.

Fig. 6 には、各 Re 数に対する、周方向の速度勾配値をまとめたものを示す。高 Re 数では明らかに、 $Z = 1$ の Kármán 層は速度勾配が大きく、 $Z = 0$ の Bödewadt 層の速度勾配は相対的に小さいのが見てとれる。磁場無しの結果の Fig.3 との違いは、 $Re = 10$ 以下では、Kármán 層と Bödewadt 層の速度勾配がどちらも同じ 5 に漸近している。これは、高 Ha 数で低 Re 数のとき (相互作用係数 $N = Ha^2 / Re$ が 1 より十分に大きいとき) は、電磁力に対して相対的に慣性力が無視できるので、二次流れ成分 U, W が無視出来て、周方向の運動方程式

$$V'' - Ha^2(V - 0.5) = 0 \quad (13)$$

が近似的に成立する。(12)の境界条件を満たすこの常微分方程式の解は近似的に

$$V = 0.5 \left(1 - e^{-Ha(1-Z)} - e^{-HaZ} \right) \quad (14)$$

と得られ、速度勾配は、

$$V' = 0.5Ha \left(e^{-Ha(1-Z)} + e^{-HaZ} \right) \quad (15)$$

となる。よって、 $Ha = 10$ では、壁面速度勾配は 5 に漸近する。

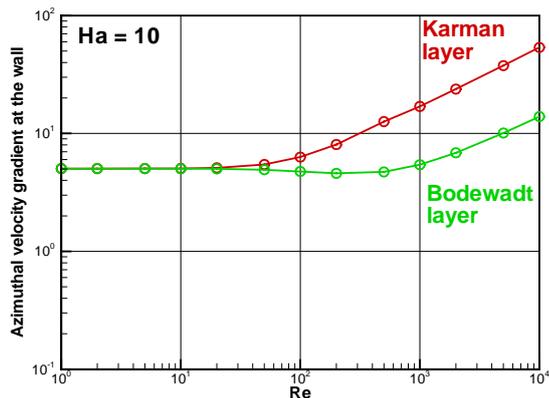
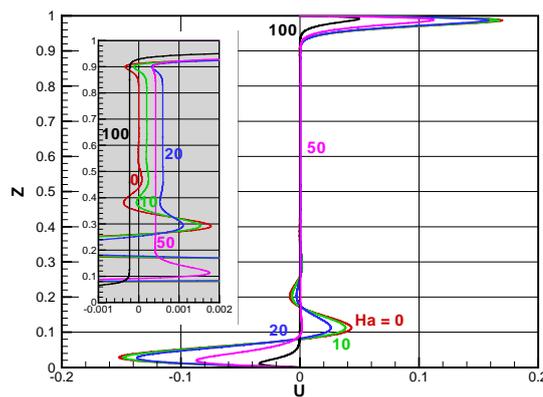
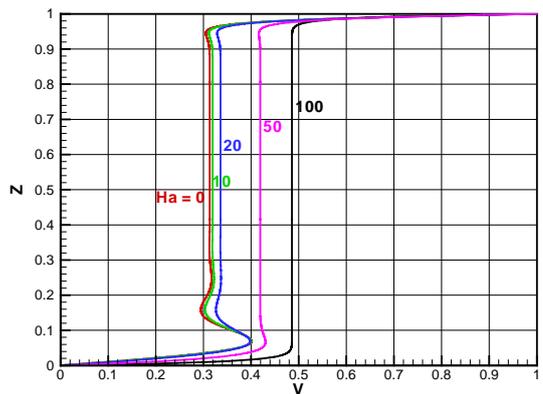


Fig.6 The azimuthal velocity gradient at the walls for the various Reynolds numbers at $Ha = 10$.

最後に一例として、 $Re = 5000$ のときの磁場効果を Fig. 7 に示す。 Ha 数の増大とともに、周方向の速度 V は 0.5 に近づいていく。一方で半径方向の速度は抑制され、コア領域においては、 $U = 0$ に見えるが、拡大図からわかるように、 Ha 数に依存して微妙に正負の値をとり複雑である。相互作用係数 $N = Ha^2 / Re$ が 1 より十分に大きくなると、慣性項の影響は無視出来て、 Re 数の値にかかわらず、境界層の厚さは Ha 数に比例して薄くなる。



(a) Radial component of velocity



(b) Azimuthal component of velocity

Fig.7 Velocity for the various Hartmann numbers at $Re = 5000$.

4. 結言

一様軸方向の磁場印加下における、回転円板と静止円板間の導電性流体の流れに対して相似解を仮定して数値解析した結果、以下の結論を得た。

- ・高 Re 数においては、流れ場は上下 2 つの境界層およびコア領域に分離され、半径方向の速度成分は $U_c = 0$ になり、周方向の速度成分は $V_c = 0.313$ になる。
- ・相互作用係数 N が 1 より十分に大きいときは、電磁力に対して慣性力は相対的に無視出来て、二次流れの影響はほぼ消滅し、周方向の速度成分は $V_c = 0.5$ に漸近する。
- ・高 Re 数であっても $N = 1$ 程度の流れは、周方向の電磁力と慣性力がバランスし、 $U_c = 0$ とはならないのは注目に値する。

参考文献

- (1) Kármán, Th. von, ZAMM. Z. angew. Math. Mech., Bd. 1, (1921), 233.
- (2) Cochran, W. G., Proc. Cambr. Phil. Soc., **30** (1934), 365.
- (3) Bödewadt, U. T. et al., Z. angew. Math. Mech., Bd. 20, (1940), 241.
- (4) Batchelor, G. K., Quart. J. Mech. Appl. Math., **4** (1951), 29
- (5) Lance, G. N. and Rogers, M. H., Proc. Royal Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci., **226** (1961), 109.
- (6) Pearson, Carl E., J. Fluid Mech., **21** (1965), 623.
- (7) Mellor, G. L. et al., J. Fluid Mech., **31** (1968), 95.
- (8) Dijkstra, D. and Heijst, G. J. F. van, J. Fluid Mech., **128** (1983), 123.
- (9) Brady, John F. and Durlofsky, Louis, J. Fluid Mech., **175** (1987), 363.
- (10) Attia, H. A., Int. Comm. Heat Mass Trans., **28** (2001), 439.
- (11) Davidson, P. A. and Pothérat, A., Eur. J. Mech. B/Fluids, **21** (2002), 545.
- (12) Moresco, P. and Alboussière, T., Eur. J. Mech. B/Fluids, **23** (2004), 851.

5. 付録

Fig. 8 に、一円板流として、Kármán 流（静止流体中における無限回転円板がつくる流れ）の三次元可視化図を示す。これは、境界層方程式を解いて得られたものである。流線および3つの鉛直断面における速度ベクトルを描いている。境界層内で遠心力により半径外向きの螺旋流れを呈しており、結果として軸方向の吸い込み流れが生じるのが見てとれる。

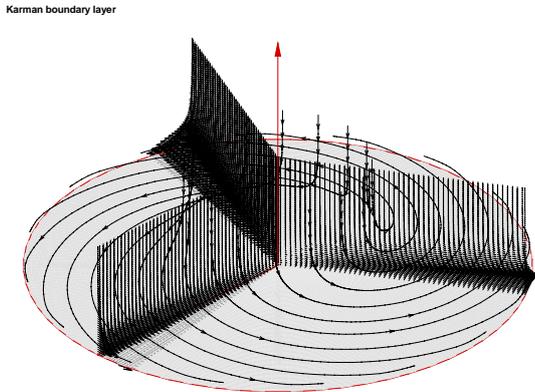


Fig. 8 Visualization of the Kármán flow.

Fig.9 には、Bödewadt 流（一様回転流中に置かれた無限静止円板近傍の流れ）の流線と速度ベクトルを示す。ただし、回転座標系から眺めたものである。したがって、円板から十分に離れると回転の無い上昇流に見える。静止円板近傍では、半径内向きの吸い込みが起きている。最も特徴的なのは、境界層内のある高さにおいて、半径方向や周方向の逆流を生じていることである。これは、上から眺めた図からわかるように、流線がばねを引き伸ばしたような螺旋状になっているからである。

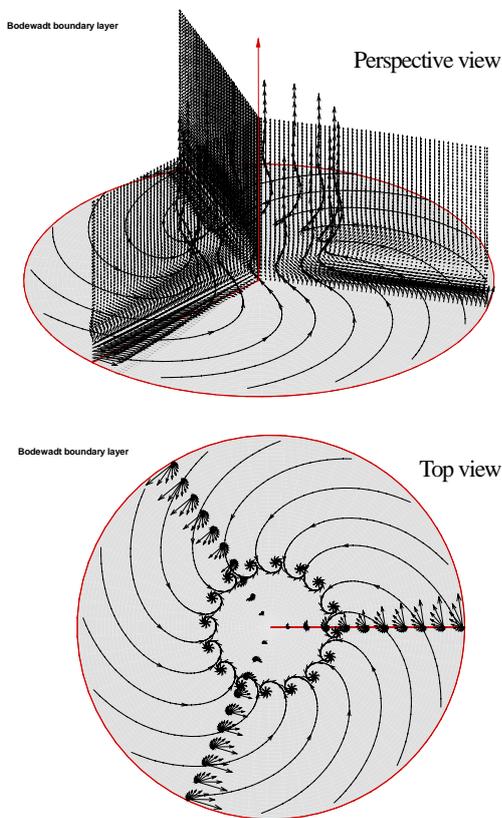


Fig. 9 Visualization of the Bödewadt flow.

Fig.10 に、円板の隙間長と半径が等しく、側壁が存在して静止している場合の非定常三次元数値解析結果を示す。計算条件は、 $Re = 10000$, $Ha = 0$ である。可視化断面は Bödewadt 境界層内を示し、流れは非定常で振動している為、任意に選んだ3つの時刻における軸方向速度 W を示す。Fig.9 とは違って、静止座標系からの可視化であるが、Fig.9 と同様、境界層内で螺旋状内向きの流れが生じている。この計算条件では、流れ場は非定常ではあっても空間的には波数8の規則性を保ったまま、反時計回りに模様に変化しながら回転している。

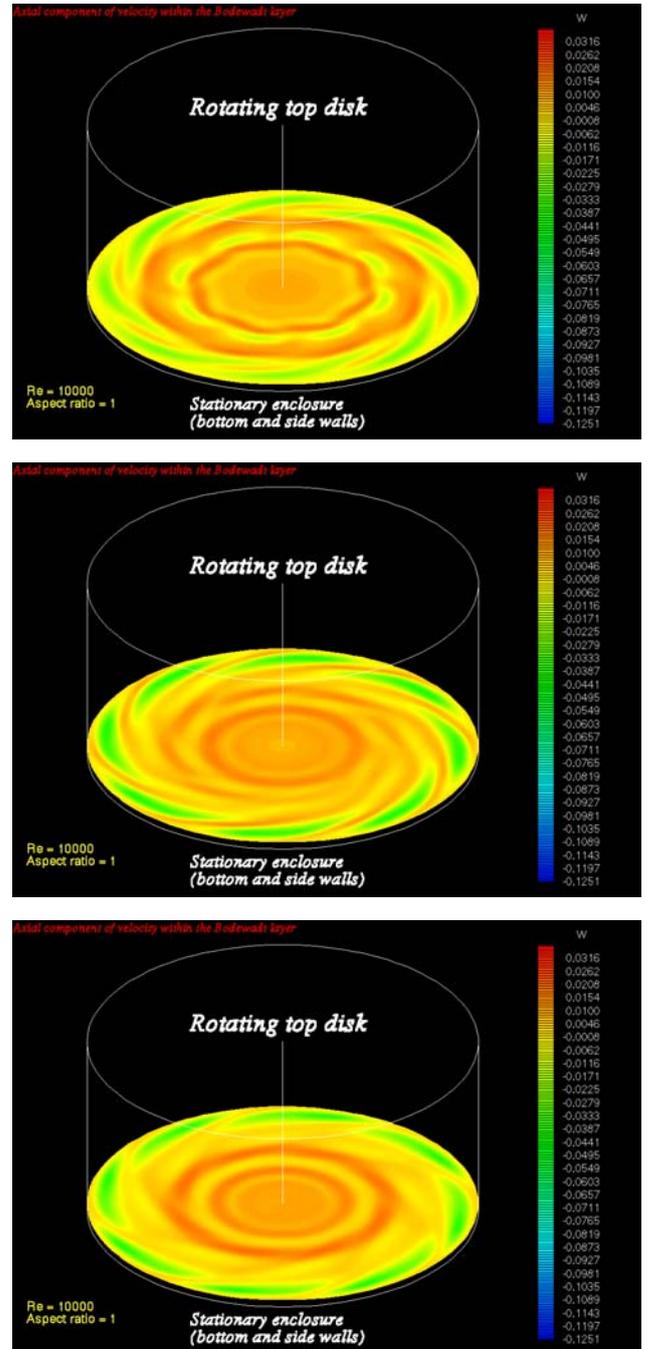


Fig. 10 Visualization of the oscillatory flow in a stationary cylindrical enclosure with a rotating top disk at $Re = 10000$ and $Ha = 0$.