

離散 Helmholtz 分解技法による非圧縮流の数値計算

Numerical Scheme for Incompressible Flow using Discrete Helmholtz-decomposition Technique

今村 純也, IMI 計算工学研究室, 〒351-0114 和光市本町 31-9-803, jimamura@ra2.so-net.ne.jp
 棚橋 隆彦, 慶應義塾大学名誉教授, 〒215-0003 川崎市宮前区有馬 5-6-8, ti-tana@a02.itscom.net
 Junya IMAMURA, IMI Computational Eng.Lab., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN
 Takahiko TANAHASHI, Keio University, Arima 5-6-8, Miyamae-ku, Kawasaki-shi, 215-0003 JAPAN

An arbitrary vector field U can be represented with $U = \text{grad}\phi + \text{curl}\psi$ ($\psi: \text{div}\psi = 0$) according to Helmholtz-Hodge theorem. Numerical decomposition in 3D, however, is not yet succeeded by reason of boundary conditions and dilatational component. We will additionally point out a stumbling block to numerical analysis by the theorem. The rotational components are consisted with two terms: e.g. $U_1^T = \partial\psi_3/\partial y - \partial\psi_2/\partial z$. This is algebraically a synonymy with an expression $U_1^T = (\partial\psi_3/\partial y + \theta_1) - (\partial\psi_2/\partial z + \theta_1)$, however, numerically different when $|\theta_1| \gg |U_1^T|$. This is a problem specifically to discrete analysis, so we will propose for them a solution called "Discrete Helmholtz-decomposition technique". For dilatational component U_i^L , we will propose a novel expression: i.e. vector $\{U_i^L\} \equiv \{\partial\psi_i^L/\partial x_i\}$ instead of $\text{grad}\phi$ and call "Discrete Helmholtz-decomposition". The decomposed analysis is indispensable when a slip condition is necessary for dilatational components. $\{\partial\psi_i^L/\partial x_i\}$ allow slip conditions.

1. 目的

Helmholtz-Hodge の定理により、ベクトル場 U はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル ψ を用いて $U = \text{grad}\phi + \text{curl}\psi$ ($\psi: \text{div}\psi = 0$) の形に直交分解できる。

流れ場の特性はこの直交分解によって理論的に説明されるが、3D の数値分解スキームは境界条件と Dilatational 成分が原因して未だ確立されていない。

Helmholtz 表示は $\text{grad}\phi$ と $\text{curl}\psi$ に分解することにあるが、離散解法では必ずしも十分条件ではない。例えば回転成分のみとすれば $U_1 = \partial\psi_3/\partial y - \partial\psi_2/\partial z$ であるが、両成分に θ_1 が含まれ $(\partial\psi_3/\partial y + \theta_1)$, $(\partial\psi_2/\partial z + \theta_1)$ であっても U_1 は代数的には変わらない。しかし、数値的には $|\theta_1| \gg |U_1|$ になれば桁落ちにより破綻する。これは離散解析上の問題である。そこで、本稿ではこれを回避する技法を提案し "離散 Helmholtz 分解技法" と呼ぶ。

ϕ の加速度項と圧力勾配項は Navier-Stokes 方程式の中で同じような動きをするので、数値計算では並存できない。

ψ_i の i 方向勾配は Coulomb ゲージに表れるが、本稿では $\text{curl}\psi$ と直交することに注目する。ゲージ条件は条件不足を補うが力学的な意味を持つものではないので、本稿では、Dilatational 成分を $\text{grad}\phi$ に代えてベクトル $\{\partial\psi_i/\partial x_i\}$ で表し、Helmholtz 分解と区別するために "離散 Helmholtz 分解" と呼ぶ。

U 要素を用いる Primitive variable 法では境界 Slip 条件が Non-slip 条件の二者択一しかできないが、分離解法では Dilatational 成分に Slip 条件を与え得るのが大きな違いである。 $\partial\psi_i/\partial x_i$ には i 方向に ψ_i の疎密として Slip 速度を与え得るのでこの条件に合う。しかし、 $\text{curl}\{\partial\psi_i/\partial x_i\} = 0$ を代数的に満足させることはできない。

そこで要素を分けて ψ^L, ψ^T ($L: \text{Lateral}, T: \text{Transverse}$) と記号し、 $\text{curl}\{\partial\psi_i^L/\partial x_i\} = 0$ を付帯条件として数値的に満足させる。

既報⁽¹⁾で速度分布を与えて数値分解する技法を示したが、本稿では ψ^L と ψ^T 要素で直接 Navier-Stokes 方程式を解くものである。ただ、Dilatational 成分は自由表面を有しない閉空間では微小である。自由表面の幾何学的処理を省略するため、本稿では閉空間で数値解析し微小であることを数値的に確認するにとどめる。

2. 基礎的事項

(1) 基礎方程式

流れ場は等温・非圧縮を仮定する。 ν を動粘性係数、 P を圧力とし、連続の式を(1)式で表し、Navier-Stokes 方程式を密度で基準化し、 F を移流項として(2)式で表わす。

$$\text{Equation of continuity: } \text{div}U = 0 \quad (1)$$

$$\text{Navier-Stokes equation: } \frac{\partial U}{\partial t} + F - \nu \cdot \nabla^2 U + \nabla P = 0 \quad (2)$$

$$\text{where } F \equiv U \cdot \nabla U$$

(2) 添え字記号

本稿では添え字を $(i=1,2,3)$, $(i+1=2,3,1)$, $(i-1=3,1,2)$ と定義して、例えば渦度 ω は(3)式の最右辺のようにも表すとす。

$$\omega \equiv \text{curl}U \equiv \{\omega_i\} \equiv \left\{ \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_{i-1}} \right\} \quad (3)$$

添え字 $i+1$ および $i-1$ は新しい表記法であるが、(4)式でかつ総和規約を適用しない表記法と同じである。

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_i &= \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}, \\ \text{where } (i=1,2,3)(k=2,3,1)(j=3,1,2) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

(4)式の添え字 k, j には i 以外なら任意の記号を当て得るので、毎回その定義と総和規約の関係を説明する必要があり煩瑣である。(3)式の定義ではそれらが自ずと明らかであり、 i には任意の記号を当ててベクトルを表し得る。

添え字はベクトルを表すとして $\{ \}$ を省略してもよいとすれば、せん断変形と直ひずみは(5)式で表される。

$$\gamma_i \equiv \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_{i-1}}, \quad \varepsilon_i \equiv \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (5)$$

せん断変形と直ひずみを表す常用の演算子はないようなので、本稿では *curl* などに対応する演算子として(6)式のように *imi* と *diag* でそれぞれ表すとする。

$$\left. \begin{aligned} imi U &\equiv \left\{ \frac{\partial U_{i-1}}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial U_{i+1}}{\partial x_{i-1}} \right\} \\ diag U &\equiv \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

一般にはコンパクトなナブラ演算子での記述が多いようである。しかし、ナブラ演算子で *imi* や *diag* を表す定義がないので、以下ではこの2種類の記号を混用する。

(3) 離散 Helmholtz 分解

速度ベクトル U の離散 Helmholtz 分解形をはじめに述べたように要素分けして(7)式に示す。

$$U = diag \psi^L + curl \psi^T \quad \{\psi^L : curl \psi^L = 0\} \quad (7)$$

後述のように、Coulomb ゲージは離散 Helmholtz 分解技法の誘導過程から数値的に組み込まれるので、ゲージとして頭から与えることはしない。

(7)式は $U^L = diag \psi^L$, $U^T = curl \psi^T$ とし、 $U = U^L + U^T$ でも表すとする。

(4) 速度勾配テンソルの和分解形

上述の記号を使えば、速度勾配 U の和分解形は(8)式で表される。

$$\nabla U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 2\varepsilon_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 - \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 - \omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(5) ラプラシアン和分解形

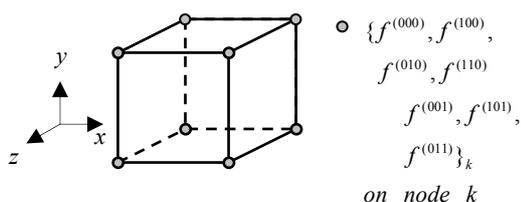
(8)式は恒等式であり、ラプラシアン和分解形(9)式も恒等式である。

$$\nabla^2 \psi = grad (div \psi) - curl (curl \psi) \quad (9)$$

3. 離散 Helmholtz 分解技法

(1) 適合要素

ノードあたり 7 自由度の C_1 -連続な 3D 要素を Fig.1 に示す。既報⁽²⁾では 8 自由度の 3 重 3 次要素を適用してきた。この要素も C_1 -連続なことに偶々気付いたので一種のセレンディピティ要素と呼べよう。後付的には四面体要素や C_2 -連続な要素も説明できるので、一般性はある。



$$where \quad f^{(ijl)} \equiv \frac{\partial^{i+j+l} f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^l}$$

Fig.1 C_1 -Continuity voxel-element for f

関数形は重心でのテーラー展開形として(10)式で表す。ベクトルポテンシャル ψ_i や圧力 P のほか、いずれの変数にもこの要素を適用する。

$$f = \sum_{j=0}^1 \frac{z^j}{j!} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2/2 \\ y^3/6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f^{(00j)} & f^{(10j)} & f^{(20j)} & f^{(30j)} \\ f^{(01j)} & f^{(11j)} & f^{(21j)} & f^{(31j)} \\ f^{(02j)} & f^{(12j)} & f^{(22j)} & f^{(32j)} \\ f^{(03j)} & f^{(13j)} & f^{(23j)} & f^{(33j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2/2 \\ x^3/6 \end{bmatrix} \\ + \sum_{j=2}^3 \frac{z^j}{j!} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2/2 \\ y^3/6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f^{(00j)} & f^{(10j)} & f^{(20j)} & f^{(30j)} \\ f^{(01j)} & f^{(11j)} & f^{(21j)} & f^{(31j)} \\ f^{(02j)} & f^{(12j)} & 0 & 0 \\ f^{(03j)} & f^{(13j)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2/2 \\ x^3/6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

(2) ガレルキン法の適用

離散 Helmholtz 分解技法では幾つかの制約条件を付帯する。そこで、制約条件を汎関数として付帯させ易いガレルキン法を適用する。

(3) Rotational 成分の離散 Helmholtz 分解技法

ψ^T 要素で基礎方程式を表せば(1)式は代数的に満足され、圧力項を除いて(2)式を解くこととなるが、はじめに述べたように数値的ないわゆるゲタを履かせた形の解を得るので、反復回数が多くなる高 Re 数流れでは破綻する。

それを取り除くため局所加速度項を、(9)式右辺の $div \psi^T$ の分散を数値的に最小にする制約条件で $curl(curl \psi^T)$ の時間微分に代えて、左辺のラプラシアン $\nabla^2 \psi^T$ で(2)式を表して満足させる。

よって、(11)式を適用して解くこととなる。(11)式最後の項は $div \psi^T$ の分散を最小化する項であり、第 1 項の局所加速度項は $-\delta \psi^T \cdot \partial^2 \psi^T / \partial t$ を部分積分した形で表されている。

$$\delta \nabla \psi^T \cdot \frac{\partial \nabla \psi^T}{\partial t} d\Omega + \delta curl \psi^T \cdot F d\Omega \\ + \delta \nabla (curl \psi^T) \cdot \nabla (curl \psi^T) d\Omega \\ + \frac{1}{2\Delta t} \delta (div \psi^T)^2 d\Omega = 0 \quad (11)$$

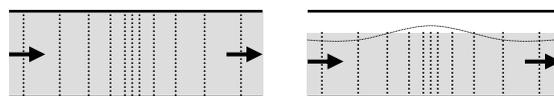
$$where \quad F \equiv U \cdot \nabla U$$

したがって、Coulomb ゲージ $div \psi^T = 0$ を上述の意味で数値的に実現するので、(7)式からは外すことができる。

(4) Dilatational 成分の離散 Helmholtz 分解技法

Navier-Stokes 方程式の中で圧力項とスカラーポテンシャル項は同じような働きをするので $grad \phi$ に代えて $diag \psi^L$ で表して“離散 Helmholtz 分解”と呼ぶとした。すなわち、 $U = U^L + U^T$ 分解の U^L をスリップ条件でどう表すかの問題である。そこで、先ず U^L のスリップ条件での挙動について考察する。

管路の中が完全に詰まった状態で U^L が流れる Fig.2(a)は閉空間問題であり、速度の疎密は壁面でスリップを要求す



(a) One-phase problem (b) Two-phase problem

Fig.2 Two patterns of potential flow in pipe

るが（流れ方向を x として）壁面での x 方向勾配は y 方向勾配も要求するので非圧縮では許されず、瞬時に伝播する。

対して、自由表面問題（二相問題）の(b)では底面のスリップ条件は許され、かつ不可欠である。

Fig.2(a)で軸中心回転を伴っている場合には、Rotational 成分は 2D 問題として $\partial\psi_1/\partial y$ と $\partial\psi_1/\partial z$ で表されるが $\partial\psi_1/\partial x$ は無関係で、かつ直交しているので境界条件を含めて独立に決め得る。よって、Dilatational 成分を $U_1^L = \partial\psi_1/\partial x$ と定義する離散 Helmholtz 分解はこの現象と矛盾しない。

Fig.2(a)は瞬時に伝播するが、中心に自由表面としての空洞を伴う螺旋流では、Dilatational 成分の疎密は可能となる。

ψ^L 要素には $\text{curl}\psi^L=0$ を制約条件として付帯させるが、離散分解技法の考え方にに基づき $\text{div}\psi^L=0$ を制約条件としてラプラシアン表示して付帯させる。よって、(12)式で数値計算する。

$$\begin{aligned} & \delta \text{diag} \psi^L \cdot \left(\frac{\partial \text{diag} \psi^L}{\partial t} + \mathbf{F} + \nabla P \right) d\Omega \\ & + \frac{1}{2\Delta t} [\delta(\nabla \psi^L)^2 + \delta(\text{div} \psi^L)^2] d\Omega = 0 \quad (12) \\ & \text{where} \quad \frac{1}{2} \delta(\nabla P + \mathbf{F})^2 d\Omega = 0 \Rightarrow P \end{aligned}$$

(5) 離散 Helmholtz 分解の境界条件

例えば、3D キャビティ内にサイコロ（剛体）が在れば、その x - y 断面内で $\psi_{3,0}^T$ （知りたいのは表面の $\psi_{3,0}^T$ ）は一定であるが z 方向には変化する。

この値(表面の $\psi_{3,0}^T$)は先ず(11)式の当該変分行を $\psi_{3,0}^T=0$ で置き換えて系を解き、次いで内部ノード値を当該変分行に代入して解くことで $\psi_{3,0}^T$ の緩和値を得る。

以上は連立方程式のまま 1 ステップで解いてもよい。ただし、coupling により係数行列のいわゆるバンド幅が乱れるので、取扱いはたいへん煩雑となり実用的でない。

もし、サイコロの中が空洞であれば、中の流体は別途解く。3D キャビティ自身も外壁で囲まれ、無限の広がりを持つ流体中に在ると考えれば、無限遠点で $\psi^T=0$ (相対量として系の一点を固定)として解く必要がある。よって、3D キャビティ外壁上で ψ^T は値を持つ。

すなわち $\psi_{i,0}^T=0$ で解き、次いで内部ノード値を当該変分行に代入して $\psi_{i,0}^T$ を緩和する手順を通常の反復計算に組み入れるスキームとなる。

3D キャビティの ψ_3^T の境界条件の例を Fig.3 に示す。 $z=z_0$ 断面の一周壁面上の値は $\psi_{3,0}^T$ の一定変数で coupling することを示す。

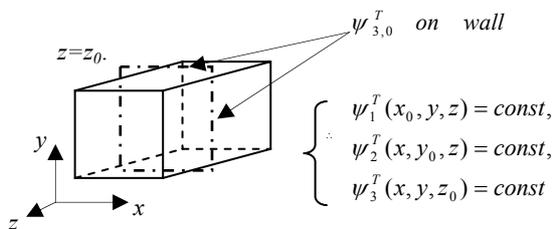


Fig.3 Boundary conditions for rotational components

Fig.4 は、 $z=z_0$ 断面内に連続した境界が 2 つある場合には、 $\psi_{3,a}^T$ と $\psi_{3,b}^T$ の 2 つの境界値を求める必要があることを示す。

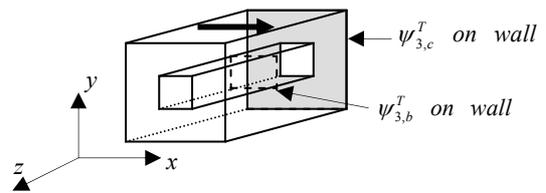


Fig.4 An example of boundary values

Dilatational 成分 ψ^L 要素についても全く同様のスキームで、Dirichlet 境界上で $\text{curl}\psi^L=0$ を満足させ、かつすべり値 $\text{diag}\psi^L$ を得る。

系の外周境界は Dirichlet 条件のみで Neumann 条件はないとする。例えば一様流の系の側面は、壁面スリップ条件の Dilatational 成分で与える。

4. 数値計算例

3D キャビティのプロポーシオンは、速度プロファイルを 2D の計算値と比較して確認するため、 $1 \times 1 \times 6$ と $1 \times 1 \times 12$ とした。 Re 数 100 と Re 数 1000 であるが、今回は Re 数 1000 が目標である。プロポーシオンによる幾何学的対称断面での流速分布には大きな差はない。ここには $1 \times 1 \times 12$ で示す。要素数は $10 \times 10 \times 20$ で計算している。

対称断面の Rotational 成分を Fig.5 に示す。2D 結果をよく再現している。キャビティでは Rotational 成分が卓越し、Dilatational 成分は非常に小さく、加えても認識できないほどである。

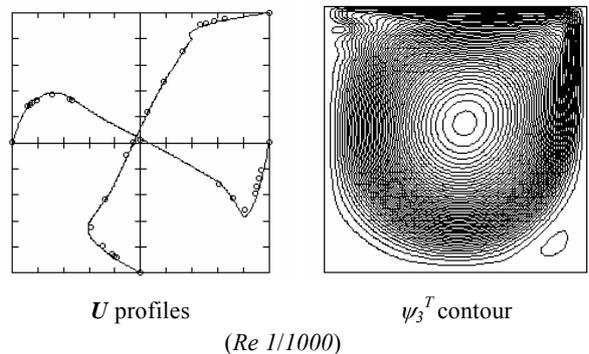


Fig.5 Distributions on geom. symmetry section

ψ_1^T と ψ_2^T のコンターは側面から、同じく幾何学的対称断面を見た図を Fig.6 に示す。ただし、 z 方向は 12 幅 \rightarrow 1 幅に縮小して作図している。端部の影響は中心には及んでいないことが分かる。

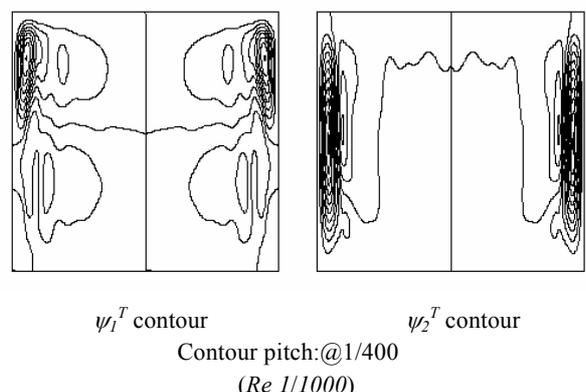


Fig.6 Side view of contours (Height=1, Width=12)

Dilatational 成分は無視できるほど小さい。ここでは Re 数 100 の例で、コンターピッチを Rotational 成分の 1/500 (@1/20000) で作図して示す。離散 Helmholtz 分解でしかできない計算なので、分布を示すためである。

z 方向の対称断面を Fig.7 に示すが、 ψ_3^L は z 方向勾配はゼロであるが、値は持つ。

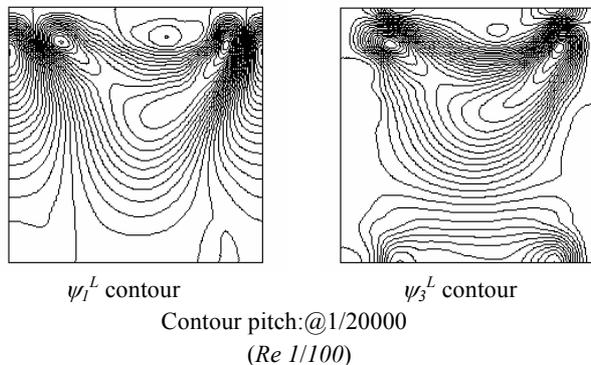


Fig.7 Contour of Dilatational components on x-y section

同様に側面図を Fig.8 に示す。

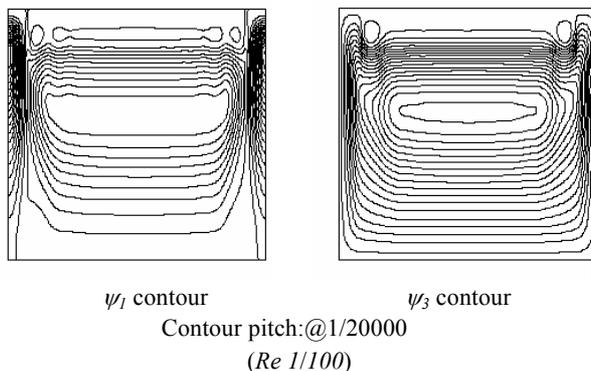


Fig.8 Side view of contours (Height=1, Width=12)

ψ^L から計算した ϕ の x-y 断面の分布と圧力分布を Fig.9 に示す。

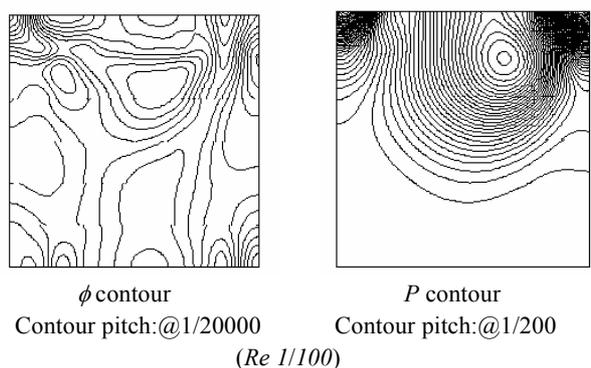


Fig.9 Contours of ϕ and P

5. まとめと今後の課題

流れ場を Helmholtz 分解して表せば Rotational 成分はソレノイダル条件を代数的に満たす。2D では流れ関数-渦度法として確立され、古典的手法として知られている。しかし、3D では境界条件設定法と Dilatational 成分が原因して数値計算法は未だ確立されていない。

著者らはこの 2 課題の解決案を示し、数値計算法確立の

ための研究をしてきた。しかし、低 Re 数では既存の計算結果を再現するものの、 Re 数 1000 のキャビティ計算では定常状態に近づくと破綻する経験をしてきた。

そこで昨年度報告⁽¹⁾では、Primitive variable 法で計算した結果の速度分布を与え、数値的に Helmholtz 分解する技法を示し、ベクトルポテンシャルのコンターなどが流れの情報として有用なことを示した。

本稿では、上述の高 Re 数で破綻する原因をはじめに述べ、解決法を“離散 Helmholtz 分解技法”として提案し、数値的にも検証した。同時に Dilatational 成分の表現法を示し、“離散 Helmholtz 分解”型と呼んだ。ただ、閉空間では Dilatational 成分は無視できるほど微小であるため、本稿では数値計算結果も微小であることを検証したに留まる。

界面の幾何学的処理を入れて、Dilatational 成分が卓越する自由表面問題で検証することは今後の課題となる。

閉空間の Dilatational 成分は Primitive variable 解 $\rightarrow \phi$ 計算でも微小なことを確認した。“離散 Helmholtz 分解” $\rightarrow \phi$ 計算も同様に可能なので、本法は ϕ の存在を否定するものではない。

分離解法で重要なことは Dilatational 成分が Slip 条件で計算可能となることである。しかし、その効果が顕現するような問題はよく判っていない。したがって、例題探しそのものも今後の課題となる。

反対に、多くの流れ場の問題は Dilatational 成分を無視して解析することができるので、渦と粘性および対流加速度が変数となり、圧力なしで速度場を求め得る。圧力場は解析の最後に速度場を与えて求め得る。

これは HSMAC (Highly Simplified MAC) 法で予測子を圧力項なしで求めることと同じである。圧力項を入れた予測子計算では Dilatational 成分も考慮される。Dilatational 成分が微小な流れ場では、前者の修正量 ϕ と後者の P はほぼ同じとなることから、 ϕ は P として説明されることが多い。

参考文献

- (1) 今村・棚橋, “Helmholtz-Hodge の定理に基づく流れ場の数値分解”, 第 22 回数値流体力学シンポジウム, 講演番号 J7-3, (2008)
- (2) J. Imamura, T. Tanahashi: Discrete Helmholtz-decomposition for computational continuum mechanics, APCOM'07-EPMECS XI, Kyoto, (2007), Session MS-32-1-4.