CIP 型偏導関数要素による流れ場の数値計算スキーム

Numerical Scheme for Flow Field using CIP-type Partial Derivative Elements

○ 今村 純也, IMI 計算工学研究室, 〒351-0114 和光市本町 31-9-803, jimamura@ra2.so-net.ne.jp
Junya IMAMURA, IMI Computational Eng.Lab., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN

CIP (Cubic Interpolated Propagation) has been developed using FDM, however, it is presumed that the CIP technique is one of hybridization techniques, but with a new concept, from the viewpoint of FEM. Thereupon in this report, an improved method “CIP+FEM” is proposed. In the method, the convective terms are calculated using incomplete threefold third order elements, whose node vector are constructed by substitution of the node values of the derivative elements. The method solve at once the defect of the conventional hybrid FEM: i.e. $\partial f_x/\partial y$ must be equal to $\partial f_y/\partial x$, where f_x, f_y are derivative elements values. The conventional hybrid method (FEM, CIP) have a problem on Dirichlet boundary, how to determine node values of the derivative elements: e.g. ω-vales in ψ-ω method. In this report a solution for these tasks is proposed by using FEM technique for high order elements.

１. 目 的

本稿の隠れた狙いは、ハイブリッド有限要素法における境界条件設定法の提案にある。すなわち、従来から 3D“ $\boldsymbol{\psi}$-$\boldsymbol{\omega}$ 法 ”や“ $\boldsymbol{U}$-$\boldsymbol{\omega}$ 法 ”の境界条件が問題であったが、それに対する回答を与えるものである。

既報[1] [2]でその回答のひとつとして“ $\boldsymbol{\psi}$-$\boldsymbol{U}$-$\boldsymbol{\omega}$ 法 ”を提案し高精度の解を得ることを確認している。その延長線上で考え、$\boldsymbol{\omega}$ 要素を CIP 型の偏導関数要素とすれば全体が理解し易いことから本稿の表題とした。

CIP 法[3] [4]は差分法で開発されたが、有限要素法の観点からはハイブリッド法の一種と見なされる。しかし、新しい考え方を含んでいる。そこで本稿では、改良型ハイブリッド法として“ CIP+FEM ”を提案する。

この CIP 型の方法では、移流項はノード未知数 4 自由度の不完全 3 重 3 次要素で計算する。ただし、3 次要素で方程式を解いた値ではなく、ハイブリッド要素のノード値を 3 次要素のノード成分として代入して計算した値である。

この方法では同時に従来型ハイブリッド法の欠点も補える。偏導関数要素値を f_x, f_y とすれば $\partial f_x/\partial y=\partial f_y/\partial x$ でなければならないが、3 次要素で自動的に満足させ得る点である。

また、従来のハイブリッド法は偏導関数要素の Dirichlet 境界の境界条件の与え方が最大の問題である。例えば 2D の例では ψ-ω 法の ω 要素の境界条件の与え方である。本稿では高次有限要素技法でこれを解決する方法を提案する。

２. 方 法

(1) 基礎方程式

流れ場は等温・非圧縮を仮定する。速度を $\boldsymbol{U}$、動粘性係数を ν、圧力を P として連続の式を(1)式で表し、Navier-Stokes 方程式を密度で基準化し、$\boldsymbol{F}$ を移流項として(2)式で表わす。

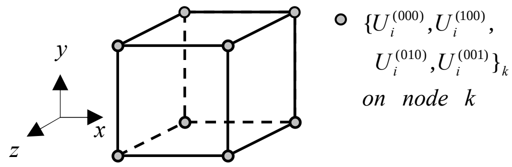
Equation of continuity: $$div\,\boldsymbol{U} = 0 \qquad (1)$$

Navier-Stokes equation: $$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{F} - \nu\nabla^2\boldsymbol{U} + \nabla P = \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

$$where \quad \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}$$

(2) 適用要素

ノードあたり 4 自由度の不完全 3 重 3 次の速度要素 U_i を Fig.1 に示す。圧力 P にも同じ要素形状を適用する。



$$where \quad U_i^{(jkl)} \equiv \frac{\partial^{i+k+l} U_i}{\partial x^j \partial x^k \partial x^l}$$

Fig.1 Incomplete threefold cubic element for U_i and P

関数形は重心での偏導関数ベクトルをパラメータとし、テーラー展開形として(3)式で表す。

$$f = \sum_{j=0}^{1}\frac{z^j}{j!}\begin{Bmatrix}1\\ y\\ y^2/2\\ y^3/6\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} f^{(00j)} & f^{(10j)} & f^{(20j)} & f^{(30j)}\\ f^{(01j)} & f^{(11j)} & f^{(21j)} & f^{(31j)}\\ f^{(02j)} & f^{(12j)} & 0 & 0\\ f^{(03j)} & f^{(13j)} & 0 & 0\end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix}1\\ x\\ x^2/2\\ x^3/6\end{Bmatrix}$$
$$+\sum_{j=2}^{3}\frac{z^j}{j!}\begin{Bmatrix}1\\ y\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} f^{(00j)} & f^{(10j)}\\ f^{(01j)} & f^{(11j)}\end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix}1\\ x\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

偏導関数要素（ハイブリッド要素）には Fig.2 のスカラーノードの線形要素を適用する。偏導関数 $\partial U_i/\partial x_j$ の要素を $U_{i,j}$ と記し、線形 U_i 要素を $U_{i,0}$ と記すものとする。

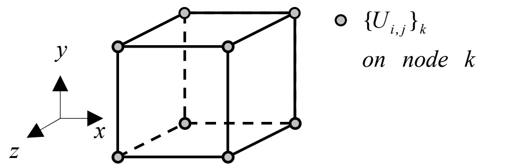


Fig.2 Partial derivative elements $U_{i,j}$ (Linear element)

(3) ガレルキン法の適用

$U_{i,0}$ 要素は HSMAC（Highly Simplified MAC）法で求める。そのため汎関数として制約条件を付帯させ易いガレルキン法を適用する。

(4) 偏導関数要素の境界条件の与え方

(2)式の勾配式を Fig.2 の偏導関数要素で表して解くことで、偏導関数要素ノード値が求まる。ただし、Dirichlet 境界上の偏導関数要素ノード値は境界条件として与えなければならない。（ψ-ω 法の ω 要素境界値に相当）

そこで、境界値だけは Fig.1 の 3 次要素で、(2)式を直接解いて得ようとするものである。

SOR 法などでは、内部ノード値を与えて境界ノードのみ緩和することができ、1 ステップ進め得る。つまり、境界ノードを含む要素のみ、かつ境界上ノードのみ同時緩和して境界値を求めるものである。

すなわち、反復計算 *m-1* 回目の Fig.2 要素の内部ノード値を Fig.1 要素のノード成分に与え、境界上ノードを緩和して求め、Fig.2 の偏導関数要素 *m* 回目の境界ノード値として与えて解いて内部ノード値を得る。これを反復する。

1D の場合で示せば Fig.3 となり、境界ノードを解く上図 Step.1 と $U_{i,j}$ 要素を解く下図 Step.2 を反復計算するスキームよりなる。

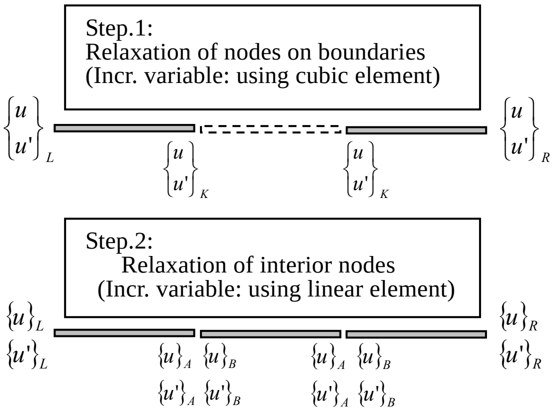


Fig.3 Numerical scheme in 1D problem

(5) 移流項と圧力要素の求め方

移流項は Fig.1 要素のノード成分に Fig.2 要素ノード値を代入して表す。したがって、圧力要素はこの移流項を与えることで、Fig.1 の要素形状で求め得る。

(6) 数値計算スキーム

反復計算における $U_{i,0}$ の増分を $\Delta U_{i,0}$ とすれば、HSMAC 法スキームは(4)式で表される。

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\nabla P\cdot(\nabla P+\boldsymbol{F})d\Omega=0\\
&\delta\nabla\phi\cdot(\nabla\phi-\boldsymbol{U}_{,0})d\Omega=0\\
&\delta\boldsymbol{U}_{,0}\cdot[(\frac{\partial\boldsymbol{U}_{,0}}{\partial\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{F}+\nabla P)+(\frac{\partial\Delta\boldsymbol{U}_{,0}}{\partial\boldsymbol{t}}+\nabla\phi)]d\Omega\\
&+\delta\nabla\boldsymbol{U}_{,0}\cdot\nu\nabla\boldsymbol{U}_{,0}d\Omega=0
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$where\quad \boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}$$

また、偏導関数要素 $U_{i,j}$ を求めるスキームは(5)式で表される。

$$\begin{aligned}
&\delta\boldsymbol{U}_{,\boldsymbol{j}}\cdot[\frac{\partial\boldsymbol{U}_{,j}}{\partial\boldsymbol{t}}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{F}+\nabla P)]d\Omega\\
&+\delta\nabla\boldsymbol{U}_{,\boldsymbol{j}}\cdot\nu\nabla\boldsymbol{U}_{,\boldsymbol{j}}d\Omega\\
&+\frac{1}{2\Delta t}\delta(U_{1,1}+U_{2,2}+U_{3,3})^2d\Omega=0
\end{aligned}\quad(5)$$

3．考察と数値計算例

(1) 考 察

本稿の隠れた狙いは、従来から問題であったハイブリッド法の境界条件を高精度に設定する技法の提案であると述べた。この論旨からは他の条件を同じにして、ハイブリッド法で境界条件のみ従来型と提案型で比較計算すべきであろう。ただ、従来型は経験的に境界条件を対称条件で入れられる問題しか評価されていない。かつ、対称条件は高次差分を適用するもので、高次要素を適用することと同等である。

表題とした“ CIP 型偏導関数要素 ”をハイブリッド要素のひとつと呼んだが、3D“ ***U*-*ω*** 法 ”とは次のように関係付けられる。すなわち、線形 ***ω*** 要素で渦度輸送方程式を解き、$\boldsymbol{U}_{,j}$ 要素を介在させて $curl\,\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\omega}$ 式で ***ω*** 要素→ $\boldsymbol{U}_{,j}$ 要素に変換し、上述のスキームを進める。

また、***ω*** 要素型と CIP 型の中間に $\boldsymbol{U}_{,j}$ 要素で *curl* (N-S 方程式)を解く方法がある。これらは渦度を Helmholtz 分解して方程式を解く方法であり、$\boldsymbol{U}_{,j}$ 要素のうちの 6 要素で 3 つの方程式を解くことになり、さらに制約条件が必要であることに留意する。（別稿 C6-1 参照のこと。）

いずれの場合でも Dilatational 成分 $U_{i,i}$ の 3 要素は偏導関数要素として本稿の方法で求める。

Fig.1 の 3 次要素は HSMAC 法を適用して直接解くことができる。かつ、本法に比べて手続きが格段に簡素で、線形要素による省略化がないので当然精度も良い。

Fig.1 要素単独で解く方法に比べ、本稿の方法は連立方程式係数行列が 4×4×3 要素→1×1×12 要素になり、1/4 に軽減されるメリットがある。しかし諸々の手続きを入れると、必ずしも有利とは言い難い。

線形要素で格子を細かくする方法に比べれば、CIP 法の狙いとするところであるが、速度勾配も移流されるので流れの特性を掴み得る。これは Lax-Wendroff 法が容易に適用できるほか、さらに時間軸 3 次にも拡張できることに表れている。（線形要素：時間軸 2 次、3 次要素：時間軸 4 次）

CIP 法を含めハイブリッド法は、応力を連続させて計算し得るところに特徴がある。不完全 3 重 3 次要素は C_0-連続で、応力は完全には連続しない。したがって、この特徴を特長として活用する技法に発展させることが望まれる。

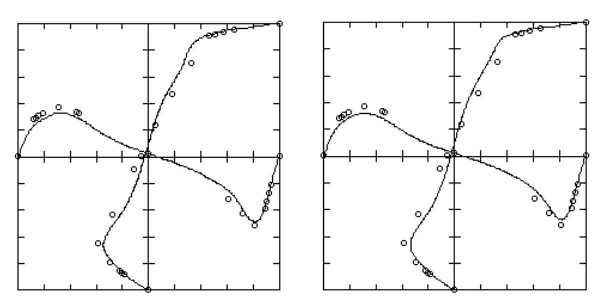
(2) 数値計算例の課題

以上の考察より、Fig.2 の偏導関数要素で解く方法が Fig.1 の 3 次要素で直接解く方法を如何に再現でき、かつ連立方程式計算が速いかが検討課題となる。すなわち、1/4 の係数行列部分が 3 次要素の特徴をよく捉えており、多少格子数が増えても計算全体として有利ということを検証する必要がある。そのためには大きな連立方程式サイズの問題で計算する必要がある。

ただ、その前に解決すべき課題がある。2D キャビティ問題を Helmholtz 分解して解いた Ghia らの解[5]が流れ解析スキームのベンチマークとなったと同様、3D では *x-y* 断面を 2D とすれば *z* 方向に非常に長い 3D キャビティで数値計算し、幾何学的対称断面で 2D 解と一致することを確認する必要がある。

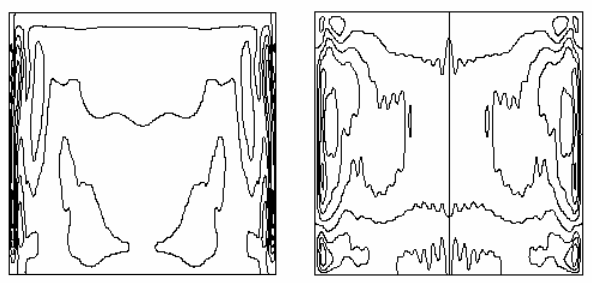
望月らの可視化実験[6]では *z* 方向を 6 倍長さとして 2D 解を検証している。そこで同じプロポーションで、3 次要素で直接解く方法で計算したところ *Re* 数 *100* ではよく再現するものの *Re1000* では、格子数を増減しても、2D 解を十分な精度で再現するとは言い難い。

それを *Re1000* の計算例で示す。Fig.4 は z 方向の幾何学的対称断面の流速プロファイルで、(a)は 10×10×20 要素で、(b)は 15×15×30 要素での計算結果である。



(a) 10×10×20 elements　　(b) 15×15×30 elements
3D cavity proportion: 1×1×6
Fig.4 *Re1000*：Velocity profiles on center section

その原因を探るため、15×15×30 要素のケースについて U_2 と U_3 の z 方向分布をコンターで Fig.5 に示す。側面から見た中心断面のコンターであり、プロポーション 1×1×6 であるが、作図は z 方向縮尺を 1/6 とし、1×1×1 で描いている。



U_2 contour　　U_3 contour
Cavity proportion 1×1×6 → plotted scale 1×1×1
Fig.5 Side view of velocity contours

Fig.5 からは端部の壁の影響がかなり内部まで及んでいることが分かる。

４．まとめ

ハイブリッド有限要素法の CIP 型スキームとして、線形偏導関数要素で計算したノード値を不完全 3 重 3 次要素のノード成分として与えて計算し、移流項を求めて適用するスキームを示した。

ハイブリッド法では偏導関数要素（通常は $\boldsymbol{\omega}$ 要素や $\nabla^2 \boldsymbol{U}$ など）の境界値の与え方が課題である。本稿の隠れた狙いはその計算法の提案にあった。

不完全 3 重 3 次要素は単独でも HSMAC 法で解くことができる。それに比べ、本法では連立方程式係数行列がスパースとなり密度が 1/4 となる。それ以外（移流項計算など）は大きく変わるものではない。

したがって、密度を 1/4 にしても元の連立方程式の特徴をよく捉えているか？格子数が多少増えても計算が速くなるか？が検討課題となる。そのためには連立方程式サイズの大きな問題で検証する必要があり、今後の課題である。

ただ、その前に不完全 3 重 3 次要素単独の計算で 3D を 2D モデルで検証する必要があるが、まだ完全な検証には至っていない。今後早急に原因を究明する必要がある。

ハイブリッド法は応力を連続させ得るところが特徴である。加速度：空間 1 階微分、加々速度：空間 2 階微分、・・が対応し、CIP 法は移流項に加々速度を空間 2 階微分で反映させる。さらに Lax-Wendroff 法で時間軸 3 次を反映させる。

有限要素法では等価集中力モデルで空間 *n* 階微分の不連続性を取り込める。したがって Lax-Wendroff 法を一般化して時間軸 *n* 次を取り込める。不完全 3 重 3 次要素は C_0-連続で応力は連続しないが、これをスキームに取り込むことで CIP 法の機能を備え得る。（[Appendix-1], [Appendix-2]参照）

したがって、ハイブリッド法の応力連続性を他の方法で、特長として活用する技法に発展させることが望まれる。

[Appendix-1] 等価集中力モデル

無限級数を前提とする連続体理論に対し、有限要素法は要素間境界に等価集中力を導入することで有限級数を適用する技法である。

ラプラシアンは通常(a)式⇒右側のようにモデル化する。これは(b)式⇒右側としても同じであり、第 2 項以下が与式にないモデルとしての等価集中力である。(a)式ではモデル化項が陽に表れていないので陰的表現式と呼び、(b)式を陽的表現式と呼ぶ。

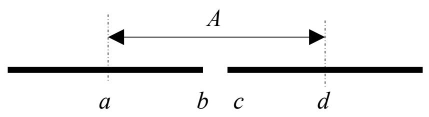


Fig.Ⅰ Equivalently concentrated force model
In case of control volume method

$$-\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA \;\Rightarrow\; -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_d + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a \qquad \text{(a)}$$

$$-\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA \;\Rightarrow\; -\int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dA + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c \qquad \text{(b)}$$

ガレルキン法の陽的表現式を(c)式左辺に示す。右辺は陰的表現式である。(通常の有限要素法では右辺を適用する。)
Ω は系、*S* は要素の辺を表す。左辺第 2 項が等価集中力である。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega + \oint_S \delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds = \int_\Omega \delta \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega \qquad \text{(c)}$$

無限級数では(d)式であり、右辺第 1 項は隣接要素どうしで相殺して消える。

したがって、(c)式左辺第 2 項が等価集中力モデルであり、第 1 項の部分積分項を符号変更して機械的に加えればよい。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega = -\oint_S \delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds + \int_\Omega \delta \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega \qquad \text{(d)}$$

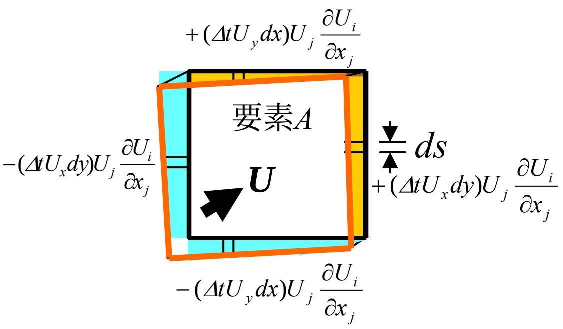
(c)式左辺の陽的モデルが便利なのは、任意の関数 *f, g* が掛った高次の非線形式も、同じように(e)式で計算できる。(c)式右辺の陰的モデルでは煩雑になる。

$$-\int_\Omega \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega \Rightarrow -\int_\Omega \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} d\Omega + \oint_S \delta u \cdot f \cdot g \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j ds \qquad (e)$$

[Appendix-2] 上流化法

有限要素形状は基底関数の適用領域を規定する手段であり、厳密に守らなければならない。NS 方程式の空間微分項を用いて時間軸にテーラー展開すれば、移流項は空間的に$\Delta t \cdot U_n$上流点を表す。それを要素内で積分すれば、風上にある要素内を積分したことになり、適用領域をはみ出すので、はみ出し面積分を補正する。よって、移流項の積分は(d)式で表される。

$$\int_\Omega U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega \Rightarrow \int_\Omega U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega + \oint_S (-\Delta t U_n) U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} ds \qquad \text{(e)}$$



参考文献

(1) 今村・棚橋, “3Dψ-$\boldsymbol{U}$-ω法：新しいハイブリッド技法” 第21回数値流体力学ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集、講演番号D9-4, 2007

(2) J. Imamura, T. Tanahashi: Discrete Hellmholtz- decomposition for computational continuum mechanics, APCOM’07-EPMESC XI, Kyoto, 2007, Session MS-32 -1-4.

(3) 矢部・内海・尾形, ”CIP法” 森北出版、2003

(4) 矢川・宮崎編, “計算力学ハンドブック，2.CIP法” 朝倉書店, 2007

(5) U.Ghia,K.N.Ghia and C.T.Shin “High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, Journal of Computational Physics 48, (1982), pp387-411.

(6) 望月・山辺・山田, "二次元キャビティ内の流れ（可視化実験）” 日本機械学会論文集(B)52巻476号,(1986),pp1589-1592