

多方向上流差分を用いた2次元バーガース方程式の数値計算

Solution of the 2D Burgers Equation Using a Multi-Directional Upwind Scheme

- 小紫 誠子, 日大理工, 〒 101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14, E-mail : satoko@math.cst.nihon-u.ac.jp
Bethancourt Angel, iCFD, 〒 152-0011 東京都目黒区原町 1-16-5, E-mail : angel@icfd.co.jp
Satoko Komurasaki, CST, Nihon University, 1-8-14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8308
Angel Bethancourt, Institute of Computational Fluid Dynamics, 1-16-5, Haramachi, Meguro-ku, Tokyo 152-0011

The 2D inviscid Burgers Equation is solved using a multi-directional upwind scheme. In general, when the flow direction is not always parallel to a coordinate line, the accuracy decreases. In order to overcome this problem, the multi-directional upwind scheme is advantageous. In this paper, we clarify its effect on advection terms solving the 2D inviscid Burgers equation. Computations are performed using a regular or the multi-directional upwind scheme in a square domain under periodic boundary condition and two kinds of initial condition. The results show that flows in any direction can be captured with higher accuracy when the multi-directional upwind scheme is used, compared to the regular upwind scheme.

1. 緒言

多方向差分は、隣接する格子点全てを用いて微分項の差分化を行う方法で、桑原邦郎博士によって提案された。多方向差分法による計算は格子依存性が低く、複雑形状物体に沿うような歪んだ格子であっても高精度計算が安定に進むという大きな利点を備えている。なお、多方向差分は 2 次元ラプラス方程式に適用したときには 9 点差分式として知られる方法と同一となる。

ポアソン方程式においても多方向差分は物理的意味に適う方法であり、圧力ポアソン方程式など数値計算が困難な場合でもスタガード格子などを用いずに安定に高精度計算を進めることができる。このように、とくに非圧縮性流体計算において圧力が安定的に求まるため、ポアソン方程式における多方向差分の効果は知られているところである。

一方、多方向差分は計算格子の座標軸方向以外の方向の差分まで用いる方法であり、流れの方向が座標軸方向と異なる場合においても対応できることから、移流項への効果も期待される。しかし、高レイノルズ数流れにおいて重要な移流項への、多方向差分の具体的な効果は調べられていない。

本研究では、移流項に多方向差分を適用した場合の効果を調べるため、2 次元バーガース方程式の数値計算を行った。

2. 多方向差分法

多方向差分は、fig. 1 のように通常の差分で用いる隣接格子点 (xy 座標系) に加え、対角線で結ばれた隣接格子点 ($\xi\eta$ 座標系) も使って差分化を行う方法である。

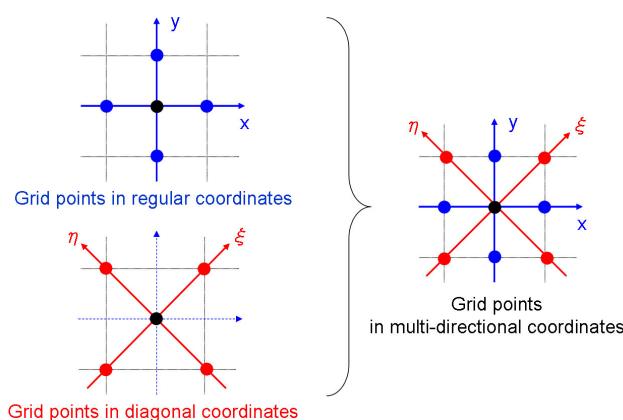


Fig.1 Multi-directional finite-difference scheme.

具体的には、 xy 座標系と $\xi\eta$ 座標系それぞれにおける差分 $D_{xy}, D_{\xi\eta}$ の重み付き平均をとり、それを中心点における差分(式(1))とする。たとえば、格子間隔 h の直交等間隔格子の場合、2 次元の移流項の多方向差分近似は、3 次精度上流差分 (KK-scheme) を使うと以下のようになる。

移流項の xy 座標系および $\xi\eta$ 座標系における表現：

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((u+v) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (-u+v) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \\ v = (u, v).$$

格子点 (i, j) における多方向差分近似：

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \approx r \times D_{xy} + (1-r) \times D_{\xi\eta} \quad (1)$$

ただし

$$D_{xy} \\ = u_{i,j} \frac{-v_{i+2,j} + 8(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + v_{i-2,j}}{12h} \\ + \frac{|u_{i,j}|}{4} \frac{v_{i+2,j} - 4v_{i+1,j} + 6v_{i,j} - 4v_{i-1,j} + v_{i-2,j}}{h} \\ + v_{i,j} \frac{-v_{i,j+2} + 8(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + v_{i,j-2}}{12h} \\ + \frac{|v_{i,j}|}{4} \frac{v_{i,j+2} - 4v_{i,j+1} + 6v_{i,j} - 4v_{i,j-1} + v_{i,j-2}}{h}$$

$$D_{\xi\eta} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(u_{ij} + v_{ij}) \frac{-v_{i+2j+2} + 8(v_{i+1j+1} - v_{i-1j-1}) + v_{i-2j-2}}{12\sqrt{2}h} \right. \\ \left. + \frac{|u_{ij} + v_{ij}|}{4} \frac{v_{i+2j+2} - 4v_{i+1j+1} + 6v_{i,j} - 4v_{i-1j-1} + v_{i-2j-2}}{\sqrt{2}h} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-u_{ij} + v_{ij}) \frac{-v_{i-2j+2} + 8(v_{i-1j+1} - v_{i+1j-1}) + v_{i+2j-2}}{12\sqrt{2}h} \right. \\ \left. + \frac{|-u_{ij} + v_{ij}|}{4} \frac{v_{i-2j+2} - 4v_{i-1j+1} + 6v_{i,j} - 4v_{i+1j-1} + v_{i+2j-2}}{\sqrt{2}h} \right]$$

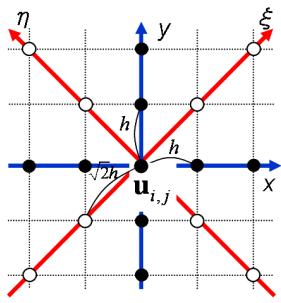


Fig.2 Discretization using Multi-directional finite-difference scheme.

多方向差分を移流項に用いた場合には、fig.3(C)のように xy 軸方向以外の方向の流れにも対応することができる。

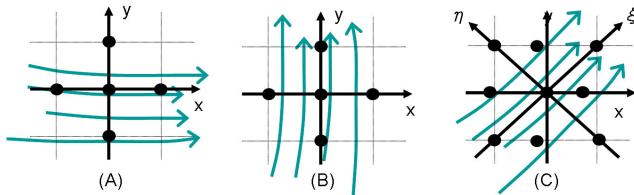


Fig.3 Flow direction and Multi-directional scheme.

3. 2 次元非粘性バーガース方程式の数値計算

本計算では、移流項における差分化の効果を調べるために、とくに非粘性の2次元バーガース方程式を解く。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = (u, v)$$

ただし非粘性の場合には、不連続面において、上流差分からの数値粘性によって粘性バーガース方程式に近い数値解となる。

移流項は多方向の3次精度上流差分 (KK-scheme) によって離散化する。時間積分には Crank-Nicolson 隠解法を用いる。

計算領域は fig.4 の通りである。計算格子には分割数 128×128 の直交等間隔格子を用いる。また、 x 方向 y 方向ともに周期境界条件とする。初期条件は以下のように Case A と Case B の2つのケースを用いた。Case A は平行波である。

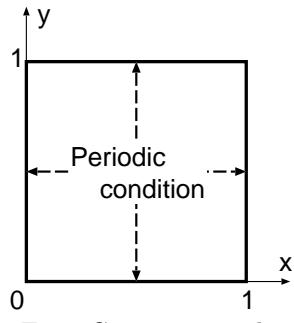


Fig.4 Computational domain.

$$\text{Case A : } \begin{cases} u(x, y) = \sin(4\pi x + 2\pi y) \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \sin(4\pi x + 2\pi y) \end{cases}$$

$$\text{Case B : } \begin{cases} u(x, y) = \sqrt{\frac{8}{5}} \sin(4\pi y) \\ v(x, y) = \sqrt{\frac{2}{5}} \cos(2\pi x) \end{cases}$$

多方向差分は xy 座標系と $\xi\eta$ 座標系での差分式を式(1)のように係数 r で重み付き平均をとるが、この r を本計算では4通りに変えて計算を比較する。

| r | |
|------|---|
| 1 | xy 座標系における通常の差分化 |
| 0.85 | $\xi\eta$ 座標系での差分式 $D_{\xi\eta}$ を僅かに付加 |
| 2/3 | ラプラス方程式において最高次精度 |
| 0 | $\xi\eta$ 座標系のみでの差分化 |

4. 計算結果

Case A

Case A は平行波となる。Fig.5 に u の初期分布および (u, v) ベクトルを示す。

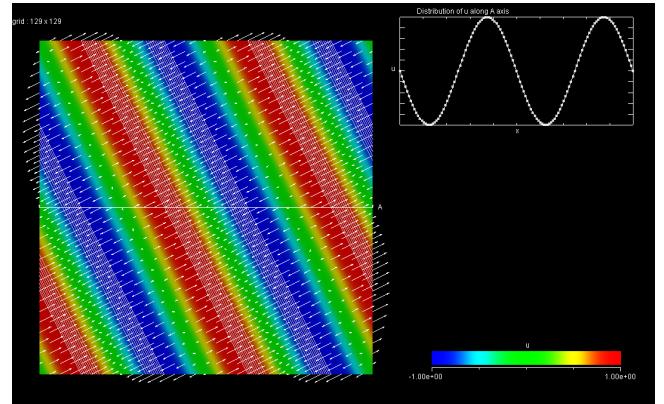


Fig.5 Initial condition of u (Case A).

各 r において、無次元時間 $t = 5$ のときの u -曲面を fig.7 に示す。Case A では、 r による大きな違いは見られない。

Case B

Fig.6 に u の初期分布および (u, v) ベクトルを示す。初期条件は先に与えられている通りであるが、Case A と異なり複雑な波の干渉が起こる。

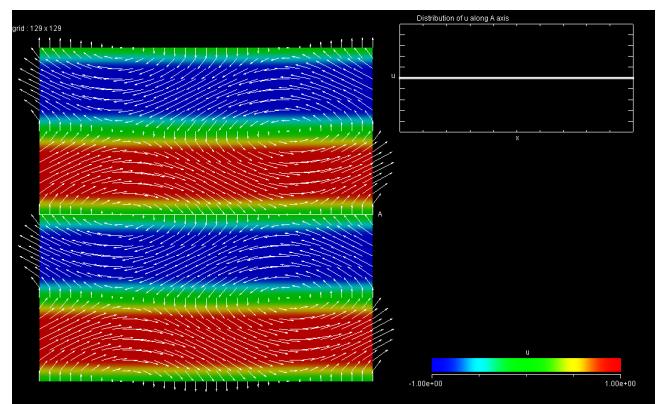


Fig.6 Initial condition of u (Case B).

各 r において、無次元時間 $t = 5$ のときの u -曲面を fig.8 に示す。また、移流項を xy 座標系での通常の4次精度中心差分により差分化し、 1024×1024 分割の計算格子を用いた2次元バーガース方程式の計算を行い、その結果を“もっとも厳密解に近い解”として fig.9 に示す。ただし、非粘性で上流差分を用いないと不連続面において計算が破綻してしまうため、ここでは $Re = 10000$ の粘

性バーガース方程式を解いている。Fig.10 には $r = 2/3$ のときの u -曲面の時間発展の様子を示している。

5. 結論

Case A では平行の波がそのまま不連続面を形成するに至るが、その過程において波の進行方向は一方向しか無く、種々の方向からの波の干渉は発生しない。このときは多方向差分でも通常の xy 座標系差分であっても結果は大きく変化しない。

一方 Case B においては、種々な方向の波を含み、それらが複雑に干渉しあう。その波の干渉過程において、数値誤差が蓄積されて、結果として fig.8 のように移流項の差分化の方法によって大きく違いが出る。とくに $r = 2/3$ のときは、直交等間隔格子におけるラプラス方程式の差分化において最高次精度となる場合であるが、このときに最も良い結果を得ている。なお、 $r = 0$ のときは $\xi\eta$ 座標系における差分で xy 座標系での通常の差分と同様の結果が期待されるところだが、格子間隔が $\xi\eta$ 座標系では xy 座標系の $\sqrt{2}$ 倍となることと、境界条件が xy 座標系で考慮されているために、結果が異なったものと考えられる。

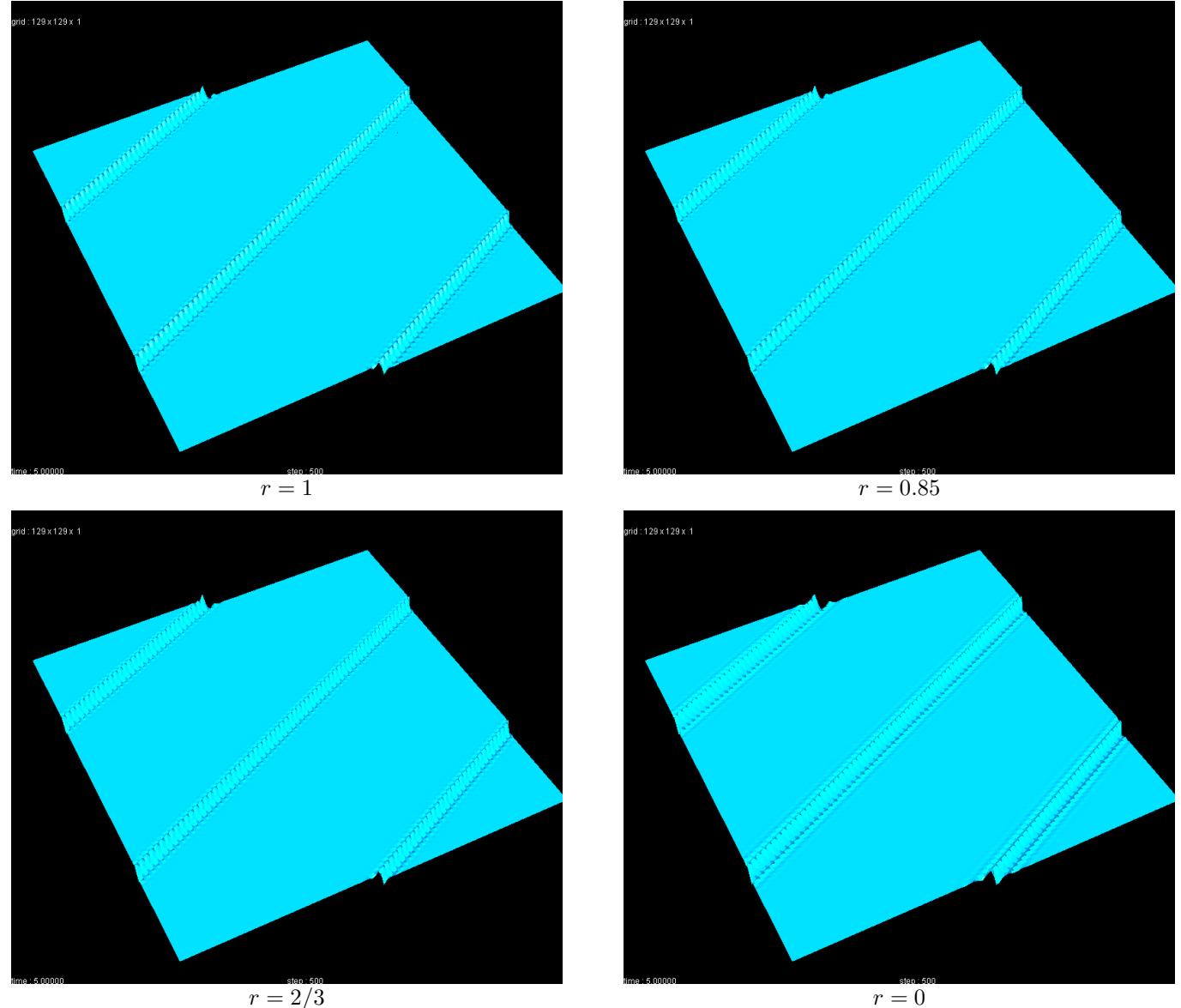


Fig.7 Computational results. Surface of u at $t = 5$. (Case A)

非圧縮性方程式では非線形項を非保存形式で移流項として扱うことが多いが、実際には密度が変化しないという仮定があるためこのような不連続面は発生しない。したがって本計算の結果をそのまま非圧縮性方程式解に関連付けることはできないが、多方向差分を用いることで、数値誤差を大きく蓄積させること無く、あらゆる方向の流れをバランス良く捉えることに成功していることは、明らかである。

参考文献

- (1) Suito, H., Ishii, K. and Kuwahara, K., "Simulation of dynamic stall by multi-directional finite difference method," AIAA-95-2264.
- (2) Kuwahara, K., "Unsteady flow simulation and its visualization," AIAA-99-3405.

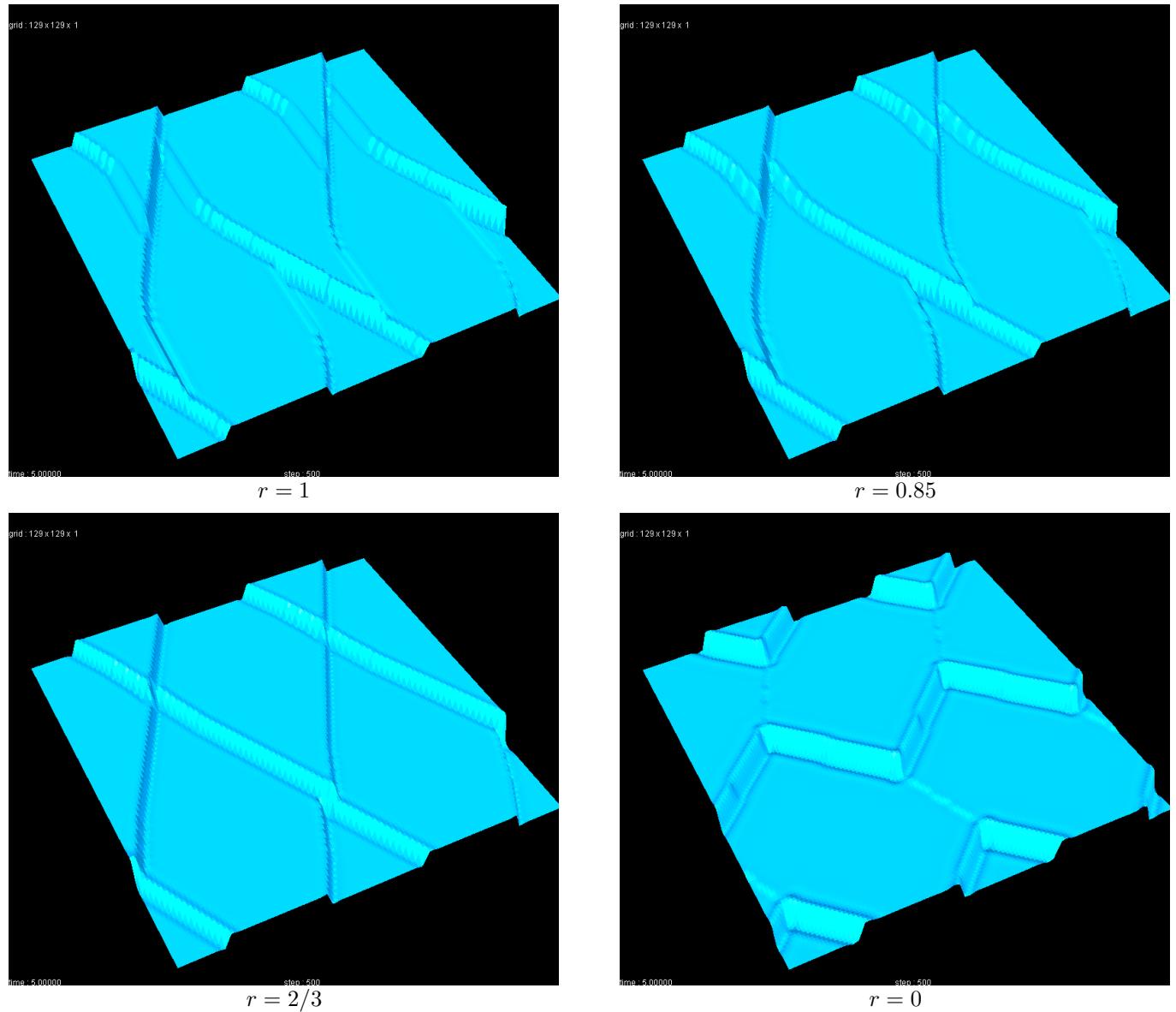


Fig.8 Computational results. Surface of u at $t = 5$. (Case B)

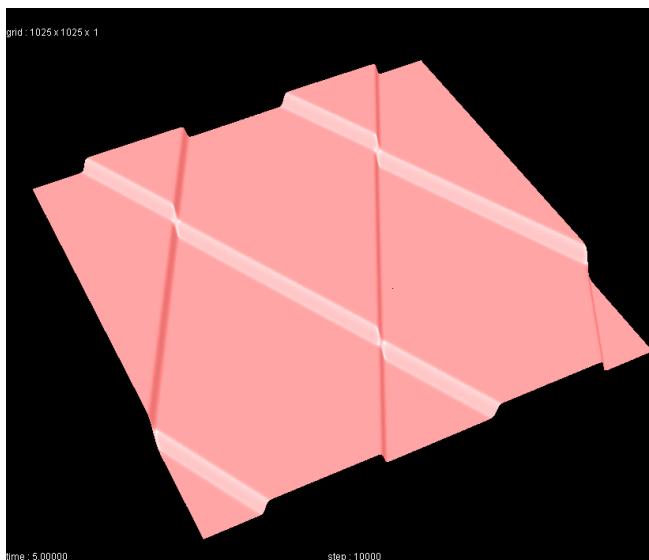


Fig.9 High-resolution computation. Surface of u at $t = 5$. (Case B)

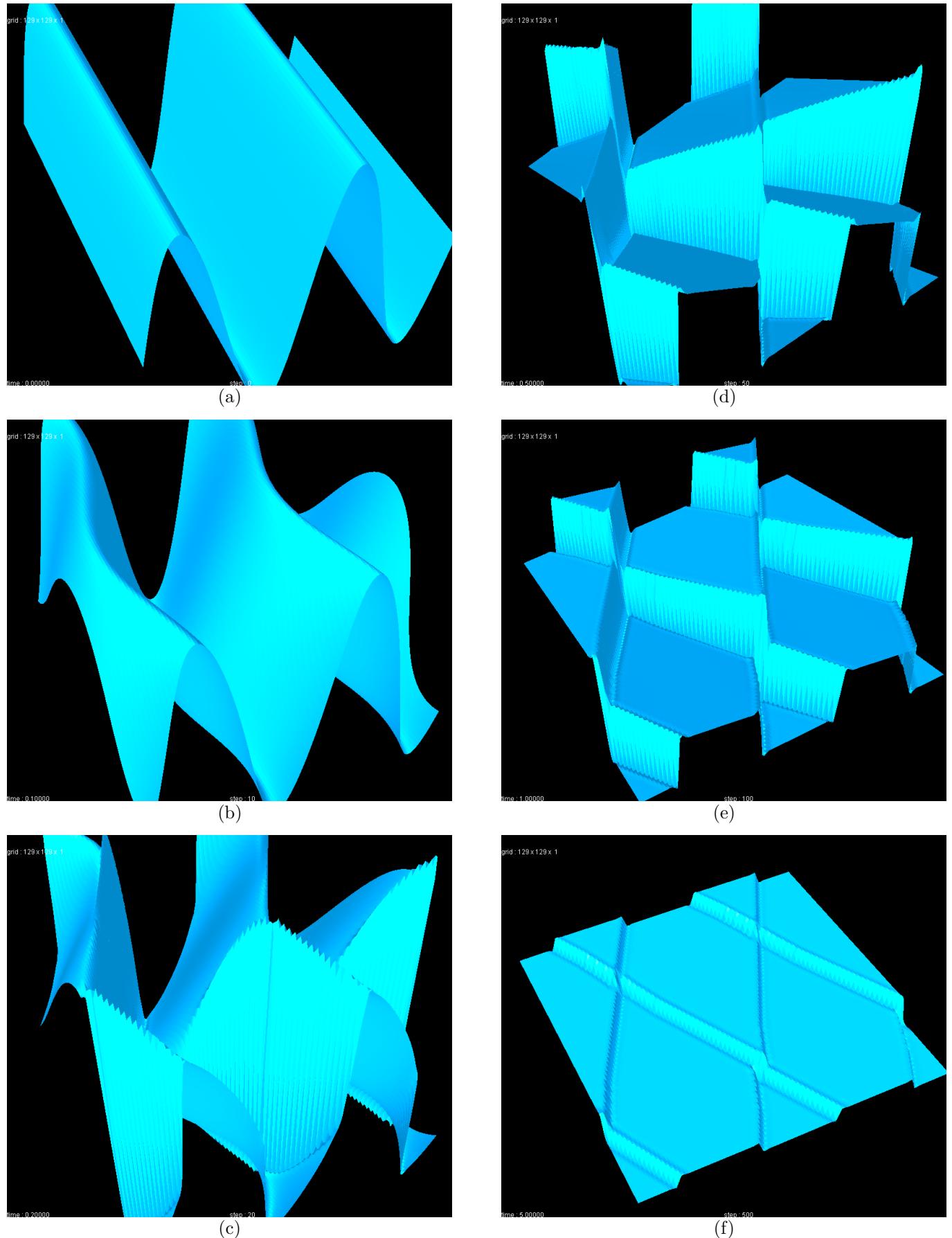


Fig.10 Time development of surface of u at $r = 2/3$. (Case B)