

マルチ・シンプレティック法による音波の計算

Multi-Symplectic methods for sound waves

- 岩津 玲磨, 東京電機大学, 〒 101-8457 東京都千代田区神田錦町 2-2, E-mail : iwatsu@cck.dendai.ac.jp
 鶴 秀生, 日東紡響エンジニアリング株式会社, 130-0021 東京都墨田区緑 1-21-10, E-mail : tsuru@noe.co.jp
 Reima Iwatsu, TDU, 2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8457
 Hideo Tsuru, NOE, 1-21-10 Midori, Sumida-ku, Tokyo 130-0021

The symplectic integration (SI) methods have been proven to be accurate and efficient for long time integration of ordinary differential equations. SI methods are also successfully applied to the wave equations, although the symplectic structure is partially considered. Recently, a new theoretical framework called multi-symplectic (MS) method is proposed which take into account both the spatial and temporal symplectic structures of the system. Since it is natural to expect that many advantages of the SI methods are carry over to the MS method, we explore two schemes of this class with the lowest order and analyze the behavior of the numerical solutions when applied to the linear and non-linear wave equations.

1. はじめに

ハミルトンの常微分方程式に対するシンプレティック法は, 標準的な方法と比較して, 長時間積分に対して安定, 正確で効率的な解法を与える. このシンプレティック積分法は線形波の問題に適用しても同様に, 優れた結果を示す (一般的な波の問題に対する議論は⁽¹⁾を参照, 分割されたルンゲ・クッタ法の応用例^(2,3)参照). しかし, 空間的に大局的に定義されたハミルトニアン⁽⁴⁾の保存が保障される反面で, 局所的な保存量が保存されるかどうかに関しては定かではない. この問題点に関して最近, ハミルトンの偏微分方程式に対するマルチ・シンプレティック法が提案された^(4,5). この定式化によると, 時間, 空間方向にシンプレティックな構造を考えるために, 適当な境界条件のもとでの大局的な保存則のほかに局所的な保存則も成立する. シンプレティック積分法⁽⁶⁾の持っている多くの長所が, マルチ・シンプレティック法にもひきつがれていると期待することは自然であるので, この方法についてその特性を調べる.

2. ハミルトンの常微分方程式とシンプレティック法

はじめに, 波の方程式をハミルトンの常微分方程式の形で取りあつかう場合について述べる. 簡単のために 1 次元の波を扱う. ここでの定式化は Bridges の文献⁽⁴⁾によっている.

2.1 シンプレティック法と波の方程式

ハミルトンの運動方程式

$$Jz_t = \nabla_z H(z) \quad (1)$$

を, 非線形⁽⁷⁾の波の方程式に適用する.

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0 \quad (2)$$

$$v = u_t \quad (3)$$

ハミルトンの方程式

H を系の長さ L にふくまれる全エネルギーとして定義する.

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta H}{\delta v} = v \\ v_t = -\frac{\delta H}{\delta u} = u_{xx} - V'(u) \end{cases} \quad (4)$$

$$H(u, v) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + V(u) \right) dx \quad (5)$$

シンプレティック形式

ハミルトニアンに対応する平均的なシンプレティック

性を定義すると

$$\bar{\omega} = \int_0^L (dv \wedge du) dx \quad (6)$$

となる.

変分方程式
波の方程式に付随する変分方程式は

$$du_t = dv, \quad dv_t = du_{xx} - V''(u)du \quad (7)$$

となる.

シンプレティック性の保存則
変分方程式をもちいて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega &= (du_{xx} - V''(u)du) \wedge du + dv \wedge dv \\ &= du_{xx} \wedge du \end{aligned} \quad (8)$$

となるので,

$$w = u_x, \quad \kappa = du \wedge dw \quad (9)$$

とおくことによって, シンプレティック性の保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \frac{\partial}{\partial x} \kappa = 0, \quad (10)$$

がみちびきだされる. κ は ω のフラックスに相当する. ω の大域的保存則は, たとえば周期境界条件のもとで

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \omega dx + \kappa|_{x=L} - \kappa|_{x=0} = 0 \quad \bar{\omega}_t = 0 \quad (11)$$

のようにして導出される.

3. ハミルトンの偏微分方程式とマルチ・シンプレティック法

Bridges⁽⁴⁾により提案されたハミルトンの偏微分方程式に対するマルチ・シンプレティック定式化は, M, K を任意の歪対称行列, $S(z)$ を適当に微分可能でなめらかな z の関数として

$$Mz_t + Kz_x = \nabla_z S(z) \quad z \in \mathbf{R}^n \quad (n \geq 3) \quad (12)$$

と表わされる. 行列 M, K のランクをそれぞれ r, s とすると, $r \leq n, s \leq n$ である.

プレ・シンプレクティック形式
プレ・シンプレクティック形式を

$$\omega(U, V) = \langle MU, V \rangle \quad \kappa(U, V) = \langle KU, V \rangle \quad (13)$$

のように定義する. U, V は以下の変分方程式の任意の解である.

変分方程式
ハミルトンの偏微分方程式に付随する変分方程式は

$$MZ_t + KZ_x = S''(z)Z \quad (14)$$

となる.

シンプレクティック性の保存則
変分方程式をもちいると

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(U, V) = \langle MU_t, V \rangle + \langle MU, V_t \rangle \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(U, V) = \langle KU_x, V \rangle + \langle KU, V_x \rangle \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(U, V) + \frac{\partial}{\partial x} \kappa(U, V) \quad (17)$$

$$= \langle MU_t + KU_x, V \rangle + \langle MU, V_t + KV_x \rangle \quad (18)$$

$$= \langle S''(z)U, V \rangle - \langle U, S''(z)V \rangle = 0 \quad (19)$$

となるので, 以上に示されたように, 局所的保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \frac{\partial}{\partial x} \kappa = 0 \quad (20)$$

が成立する.

エネルギーと運動量の保存則
エネルギー E と運動量 I の保存則は

$$\partial_t E(z) + \partial_x F(z) = 0 \quad (21)$$

$$\partial_t I(z) + \partial_x G(z) = 0 \quad (22)$$

$$E(z) = S(z) - \frac{1}{2} \kappa(z_x, z) \quad F(z) = \frac{1}{2} \kappa(z_t, z) \quad (23)$$

$$G(z) = S(z) - \frac{1}{2} \omega(z_t, z) \quad I(z) = \frac{1}{2} \omega(z_x, z) \quad (24)$$

のようになる.

大域的保存則
そこで, 適当な境界条件 (遠方でゼロまたは周期境界条件) のもとで, 大域的保存則が成立する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(z) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{I}(z) = 0 \quad (25)$$

$$\mathcal{E}(z) = \int_0^L E(z) dx \quad \mathcal{I}(z) = \int_0^L I(z) dx \quad (26)$$

4. サイン・ゴルトン方程式 サイン・ゴルトン方程式

$$u_{tt} - u_{xx} + \chi \sin u = 0 \quad (27)$$

を例にとって, マルチ・シンプレティック法 (MS) のふたつの方法の比較をおこなう.

$$Lz_t + Kz_x = \nabla_z S \quad (28)$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) + \chi \cos u \quad (30)$$

ただし, $v = u_t, w = -u_x$ とおいた.

このとき, エネルギーと運動量の保存則は以下のようになる.

$$\partial_t E + \partial_x F = 0, \quad (31)$$

$$E = \frac{1}{2}(w^2 + v^2) - \chi \cos u, \quad F = vw \quad (32)$$

$$\partial_t I + \partial_x G = 0, \quad (33)$$

$$I = vw, \quad G = \frac{1}{2}(v^2 + w^2) + \chi \cos u \quad (34)$$

以下においては, MS となる最低次数のふたつのスキームについて考える. 解析は⁽⁶⁾の方法によっている.

4.1 マルチ・シンプレティック・蛙飛び法 (MSLF)

$$D_x z_j^n = \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x}, \quad D_t z_j^n = \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t}$$

$$M_x z_j^n = \frac{z_{j+1}^n + z_j^n}{2}, \quad M_t z_j^n = \frac{z_j^{n+1} + z_j^n}{2}$$

$$L^+ D_t z_j^n + L^- D_t z_{j-1}^{n-1} + K^+ D_x z_j^n + K^- D_x z_{j-1}^n = \nabla_z S(z_j^n)$$

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) + \chi \cos u$$

以上の離散式をまとめると,

$$D_t^2 u_j^{n-1} - D_x^2 u_{j-1}^n + \chi \sin u_j^n = 0$$

と同等になる.

4.2 マルチ・シンプレティック離散化の証明

上記の MSLF がマルチ・シンプレティック離散化になっている証明を与える. 変分方程式と dz_j^n , 以下の式の変形

のなかでは、ハミルトニアンへのヘッセ行列 S_{zz} が対称になっていることをもちいている。

$$\begin{aligned} z_j^n \wedge (L^+ D_t z_j^n + L^- D_t z_j^{n-1} + K^+ D_x z_j^n + K^- D_x z_{j-1}^n) \\ = z_j^n \wedge S_{zz} dz_j^n \\ z_j^n \wedge (L^+ D_t z_j^n + L^- D_t z_j^{n-1}) \\ = \frac{1}{2} D_t (dz_j^{n-1} \wedge L^+ dz_j^n + dz_j^n \wedge L^- dz_j^{n-1}) \\ z_j^n \wedge (K^+ D_x z_j^n + K^- D_x z_{j-1}^n) \\ = \frac{1}{2} D_x (dz_{j-1}^n \wedge K^+ dz_j^n + dz_j^n \wedge K^- dz_{j-1}^n) \end{aligned}$$

以上によって、離散的マルチ・シンプレティック保存則

$$\begin{aligned} D_t \omega_j^n + D_x \kappa_j^n &= 0 \\ \omega_j^n &= \frac{1}{2} (dz_j^{n-1} \wedge L^+ dz_j^n + dz_j^n \wedge L^- dz_j^{n-1}) \\ \kappa_j^n &= \frac{1}{2} (dz_{j-1}^n \wedge K^+ dz_j^n + dz_j^n \wedge K^- dz_{j-1}^n) \end{aligned}$$

の成立が示せた。

4.3 マルチ・シンプレティック・プレイスマン・ボックス・スキーム (MSBS)

プレイスマン・ボックス・スキームまたは、マルチ・シンプレティック・ボックス・スキームは以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} LD_t M_x z_j^n + KD_x M_t z_j^n &= \nabla_z S(M_t M_x z_j^n) \\ L &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ z &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{2}(\omega^2 - v^2) + \chi \cos u \end{aligned} \quad (35)$$

MSBS は

$$D_t^2 M_x^2 u_j^n - D_x^2 M_t^2 u_j^n + \chi \sin(M_t M_x u_j^n) = 0$$

と同等である。ただし、

$$\begin{aligned} D_x^2 u_{j-1}^n &= D_x \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ D_t^2 u_j^{n-1} &= D_t \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u_j^{n+1} + 2u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

のように定義した。

4.4 MSLF と MSBS の分散関係

Schober & Wlodarczyk⁽⁶⁾ にしたがって、MSLF と MSBS の数値的な分散関係を解析した。 $\omega \equiv \omega(k)$ と表わされるときに、解が

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (36)$$

のように表わされるものとする。線形化されたサイン・ゴルトン方程式

$$u_{tt} - u_{xx} + \chi u = 0 \quad (37)$$

に代入して、波数 k の成分を考えると、波の分散関係

$$D(\omega, k) = \omega^2 - k^2 - \chi = 0 \quad (38)$$

が得られる。

4.5 MSLF と MSBS の数値的な分散関係

類似の方法をもちいて差分方程式より数値的な分散関係を求めることができる。ここで、 $\bar{\omega} = \omega \Delta t$, $\bar{k} = k \Delta x$, $\sigma = c \Delta t / \Delta x$ のように置くと、MSLF の数値的な分散関係は

$$\left(2 \sin \frac{\bar{\omega}}{2}\right)^2 - \sigma^2 \left(2 \sin \frac{\bar{k}}{2}\right)^2 - \chi \Delta t^2 = 0 \quad (39)$$

となる。一方で MSBS の分散関係は

$$\left(2 \tan \frac{\bar{\omega}}{2}\right)^2 - \sigma^2 \left(2 \tan \frac{\bar{k}}{2}\right)^2 - \chi \Delta t^2 = 0 \quad (40)$$

のように求められる。

線形波 ($\chi = 0$) についてクーラン数を変えて数値的な分散関係を求めたものを図 1 に示す。図中横軸は $k = \bar{k}$, 縦軸は $\nu = \bar{\omega}$ をプロットしている。図より、 σ によらず MSBS の $\bar{\omega}$ は MSLF のそれより大きく、厳密値からのずれは k が大きくなるほど大きいことがわかる。

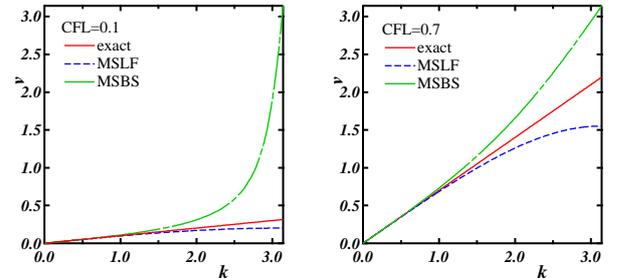


Figure 1: Numerical dispersion relation for linear wave equation, MSLF and MSBS, $\sigma = 0.1, 0.7$

4.6 MSLF と MSBS の群速度

線形波の群速度は

$$\bar{\omega} = \sigma \bar{k}$$

である。数値的な群速度は、上の数値的な分散関係式より

$$\text{MSLF: } \bar{\omega}(\bar{k})' = \sigma \left(\frac{1 - \sin^2(\bar{k}/2)}{1 - \sigma^2 \sin^2(\bar{k}/2)} \right) < \sigma$$

$$\text{MSBS: } \bar{\omega}(\bar{k})' = \sigma \left(\frac{1 + \tan^2(\bar{k}/2)}{1 + \sigma^2 \tan^2(\bar{k}/2)} \right) > \sigma$$

となることが示せる。

また、数値的な群速度分散関係は

$$\text{MSLF: } \bar{\omega}(\bar{k})'' < 0$$

$$\text{MSBS: } \bar{\omega}(\bar{k})'' > 0$$

のようになる。

4.7 MSLF と MSBS の数値的な群速度

以上の解析により求めた数値的な群速度を、線形波 ($\chi = 0$) についてクーラン数を変えてプロットしたのが図 2 である。

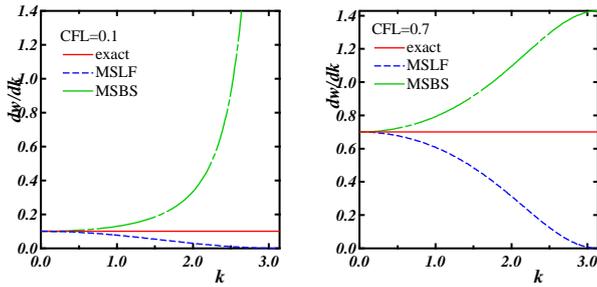


Figure 2: Numerical group velocity for linear wave equation, MSLF and MSBS, $\sigma = 0.1, 0.7$

MSBS の数値的な群速度は、厳密値よりも速く、その傾向は k の増加とともに単調に増幅される。一方で MSLF 数値的な群速度は、厳密値よりも遅く、やはり k の増加とともにその傾向が単調に強まる。

4.8 MSLF と MSBS の比較:線形波

つぎに、MSLF と MSBS の数値解を線形波について比較した。初期値は

$$u(x, 0) = f(x) = \exp(-3200x^2), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (41)$$

で、周期境界条件を与えた。解析領域の長さは $L = 2$ 、格子点数は $N = 256$ とした。

数値解のなかにみられる高波数の数値振動は、MSLF の場合、厳密解よりも遅れて波のピークのあとからついてくる。一方で、MSBS の場合には逆のことが観察される。これは、離散化方程式の数値群速度の解析結果と一致するふるまいを示していることがわかる。

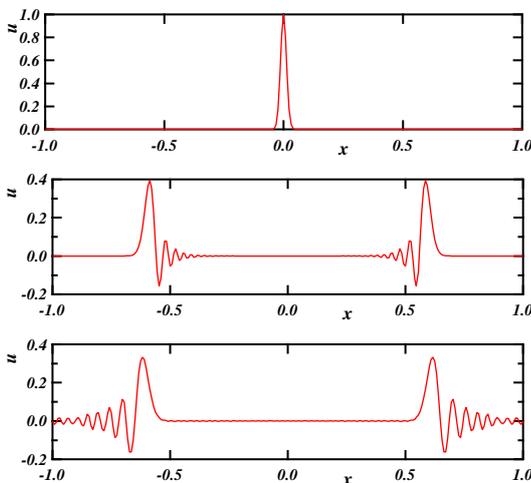


Figure 3: Linear wave equation, MSLF and MSBS, $t = 0.6, N = 256, \sigma = 0.1$

以上、数値的分散関係、数値的群速度 (および数値的群速度分散関係) の解析によって、MS スキームのふるまいを理解できることが示された。ここでは、通常おこなわれる保存量についての議論はおこなっていない。数値的な

性質の解析をおもな目的としているために、低次の方法をとあげた。

5. おわりに

ハミルトンの PDE に対するマルチ・シンプレクティック (MS) 法の波の式に対する適用を考えた。理論的な枠組みにしたがって、MS になる証明済みの方法のうちで最低次数のふたつ (MSLF, MSBS) について⁽⁶⁾に準じて、それらの数値的位相を調べた。MSKF と MSBS はかなり単純な数値的な分散関係をもっていて、数値解のふるまいを完全に理解することができる。最近の文献では MS と非 MS の比較、シンプレク性 ω 、運動量、エネルギーの局所、大域的保存、MS とエネルギー保存スキームの比較、保存性と位相空間の構造保存の関係などが議論されている。今後こうした点を逆誤差解析の立場から調べることによって、MS の範疇から高次で効率的な方法を探索、構築することが課題である。

参考文献

- (1) R. McLachlan, "Symplectic integration of Hamiltonian wave equations," Numer. Math. 66, 465-492, 1994.
- (2) Tsuru, H. and Iwatsu, R., "Accurate numerical prediction of acoustic wave propagation," to appear in Int. J. Adapt. Control Signal Processing, 2009 (DOI: 10.1002/acs.1118).
- (3) Iwatsu, R., "Two new solutions to the third-order symplectic integration method," Phys. Lett. A 373, 3056-3060, 2009.
- (4) T. J. Bridges, "Multi-symplectic structures and wave propagation," Math. proc. Cambridge Philos. Soc. 121 147-190, 1997.
- (5) Jerrold E. Marsden, George W. Patrick, Steve Shkoller, "Multisymplectic Geometry, Variational Integrators, and Nonlinear PDEs," Commun. Math. Phys. 199, 351-395, 1998.
- (6) C.M. Schober and T.H. Wlodarczyk, "Dispersive properties of multisymplectic integrators," J. Comput. Phys. 227, 5090-5104, 2008.