

デジタルカラー画像を用いた非圧縮性流れに対する仮想領域法

A domain embedding method for incompressible viscous flow using digital color image

吉井孝子, 千葉大院, 〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, E-mail : takako-yoshii@graduate.chiba-u.jp

○ 周 曼, 千葉大院, 〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, E-mail : zhouman@graduate.chiba-u.jp

腰越秀之, 千葉大院, 〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, E-mail : koshigoe@tu.chiba-u.ac.jp

Takako Yoshii, Department of Urban Environment Systems, Chiba University, Chiba 263-8522, Japan

Man Zhou, Department of Urban Environment Systems, Chiba University, Chiba 263-8522, Japan

Hideyuki Koshigoe, Department of Urban Environment Systems, Chiba University, Chiba 263-8522, Japan

In this article we propose a numerical method to analyze a incompressible viscous flow modelled by the Navier-Stokes equations around circular cylinders and buildings in Lisbon. The solution method combines finite difference method, image processing and fictitious domain method. The image processing we used here is very useful to establish a finite difference method and to construct a regular cell for the complex shaped domain since the digital color image consists of so many pixels and each pixel forms a small square, is addressable and has a color intensities. Developing these techniques makes it possible to compose a new numerical algorithm of finite difference method and to apply to various problems in environmental mathematics.

1. 序

本稿では、デジタルカラー画像を用いた障害物（円柱）周りの流れの数値計算法を示し、その応用として、障害物がリスボン市街地の建物の場合の風の流れの数値シミュレーションについて考察する。ここでの数値計算の特徴はデジタルカラー画像と有限差分法の結合である。それは、デジタル画像は極微小な正方形のピクセルから構成され、各ピクセルは、赤 (R), 緑 (G), 青 (B) の輝度値、および、アドレスを有しているため、その情報を有限差分法に取り込むことである。この方法は、どのような領域形状でも数値計算ができるし、いろいろな環境数理問題にも広く応用が可能である。

(1) 本稿で用いる画像は Fig.1 および Fig.2 である。

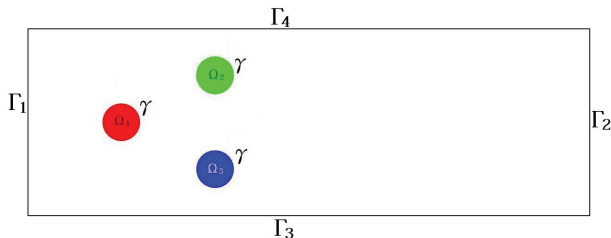


Fig. 1: Digital color image of 3 circular cylinders

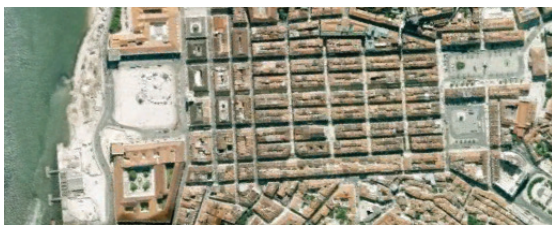


Fig. 2: Lisbon and the Tejo river (Google Earth)

(2) 上の画像を用いて、次の (a), (b) の数値計算を行う。

(a) 3つの円柱を含む画像 Fig.1 では、白い領域を Ω_1 、3つの円柱をそれぞれ $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 、および外周の境界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ とする。

Γ_1 から流れを与えた時、 Ω_1 での Navier-Stokes 方程式：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_1$$

を考察する。境界条件は (a-1), (a-2) である。

(a-1) 円柱 $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ の側面 γ 上の境界条件：

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma \quad (1)$$

$$v = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma \quad (2)$$

(a-2) 外周 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上の境界条件:

$$v = (0.2, 0.0) \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times (\partial\Omega_1 \setminus (\Gamma_1 \cup \gamma))$$

$$p = 0.0 \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times (\partial\Omega_1 \setminus (\Gamma_2 \cup \gamma))$$

(b) Fig.2(Google Earth) と関連資料から、横 1000 ピクセル、縦 300 ピクセルのカラー画像を作成する。

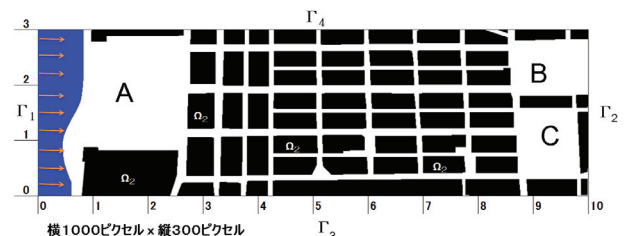


Fig. 3: Digital image of Lisbon city

Ω_1 は白い領域で道路と広場 (A, B, C) を表し、 Ω_2 は黒い領域で建物 (障害物) を表す。また、 Ω_3 は青い領域でテージョ川を表す。

ここでは、テージョ川から吹く風を与えて、次の Navier-Stokes 方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v \\ &\text{in } (0, T) \times (\Omega_1 \cup \Omega_3) \\ \nabla \cdot v &= 0 \quad \text{in } (0, T) \times (\Omega_1 \cup \Omega_3) \end{aligned}$$

を考察する。境界条件は (b-1), (b-2) および付加条件は (b-3) である。

(b-1) 建物 (障害物) Ω_2 の境界面 γ 上の境界条件：

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma \quad (3)$$

$$v = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \gamma \quad (4)$$

(b-2) 外周 Γ 上の境界条件：

(i) 速度ベクトルの境界条件：

$$v = (0.2, 0.0) \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times (\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4) \quad (6)$$

(ii) 圧力の境界条件：

$$p = 0.0 \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4) \quad (8)$$

(b-3) Ω_2 と Ω_3 における付加条件：

$$v = (0.0, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_2 \quad (9)$$

$$v = (0.2, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega_3 \quad (10)$$

ここで、 v, p および Re は流体の速度ベクトル、圧力およびレイノルズ数を表す。 n は境界面での外向き単位法線ベクトルである。

2. ノイマン境界条件と仮想領域法

圧力に関して障害物 (3つの円柱および建物) の境界にノイマン境界条件 (1) (または (3)) が課されている。このノイマン境界条件の解析的近似法として、障害物の領域を計算領域内に埋め込み (domain embedding), 障害物領域には特異摂動の方程式とその境界 γ 上には接合境界条件を設定するという方法がある⁽⁴⁾。この方法を流体の圧力ポアソン方程式に適用する。まず、この方法の概要を示す。

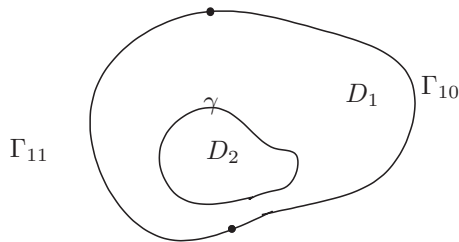


Fig. 4: Fictitious domain

領域 D_1 におけるポアソン方程式：

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f && \text{in } D_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0 && \text{on } \gamma \\ u_1 &= 0 && \text{on } \Gamma_{10} \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0 && \text{on } \Gamma_{11} \end{aligned}$$

に対して、次の方程式系を設定する。なお、(13)-(14) が γ 上の接合境界条件である。

$$-\Delta u_1^\epsilon = f \quad \text{in } D_1 \quad (11)$$

$$-\epsilon \Delta u_2^\epsilon = 0 \quad \text{in } D_2 \quad (12)$$

$$u_1^\epsilon = u_2^\epsilon \quad \text{on } \gamma \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial n} = \epsilon \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial n} \quad \text{on } \gamma \quad (14)$$

$$u_1^\epsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma_{10} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{11} \quad (16)$$

この時、 $\epsilon \rightarrow 0$ 時、 $\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial n} \rightarrow 0$ on γ が成り立つ。

この状況を次の 1 次元問題で説明する。

(例) ディリクレ・ノイマン境界問題

$$-\frac{d^2 u_1}{dx^2}(x) = \pi^2 \cos(\pi x) \quad (0 < x < 1) \quad (17)$$

$$u_1(0) = 1 \quad (18)$$

$$\frac{du_1}{dx}(1) = 0 \quad (19)$$

を考察する。この解は $u_1(x) = \cos(\pi x)$ である。

この境界値問題に対して、次の方程式系を準備する。

$$-\frac{d^2 u_1^\epsilon}{dx^2}(x) = \pi^2 \cos(\pi x) \quad (0 < x < 1)$$

$$-\epsilon \frac{d^2 u_2^\epsilon}{dx^2}(x) = 0 \quad (1 < x < 2)$$

$$u_1^\epsilon(1) = u_2^\epsilon(1) \quad (20)$$

$$\frac{du_1^\epsilon}{dx}(1) = \epsilon \frac{du_2^\epsilon}{dx}(1) \quad (21)$$

$$u_1^\epsilon(0) = 1$$

$$u_2^\epsilon(2) = 0$$

このとき、 $\epsilon \rightarrow 0$ の時、 $\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x}(1) \rightarrow 0$ に収束する。

実際、この解を構成する。未知数 α を導入し、(20) から

$$u_1^\epsilon(1) = u_2^\epsilon(1) = \alpha$$

とおく。各区間 $(0,1)$ と $(1,2)$ で α をディリクレ境界値として解き、接合境界条件 (21) を満たすように計算すると

$$\alpha = -\frac{1}{1+\epsilon}$$

$$u_1^\epsilon(x) = \left(1 - \frac{1}{1+\epsilon}\right)x + \cos(\pi x)$$

$$u_2^\epsilon(x) = \frac{1}{1+\epsilon}(x-2)$$

を得る。明らかに、 $\epsilon \rightarrow 0$ の時

$$u_1^\epsilon(x) \rightarrow \cos(\pi x) (= u_1(x))$$

$$\frac{du_1^\epsilon}{dx}(1) \rightarrow 0$$

に収束する。

下図は、上の方程式系の問題に対する数値解 (赤色) を求め、 $\epsilon \rightarrow 0$ の時、真の解 (青色) に収束するアニメーションの 1 コマである。

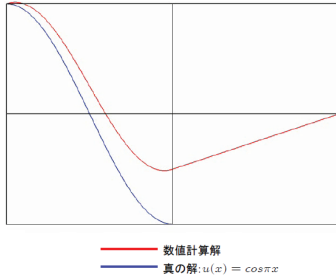


Fig. 5: Fictitious domain method

3. 仮想領域とデジタル画像

デジタル画像は障害物領域を画像として自動的に含む。また、デジタル画像は極微小な正方形をしたピクセルから構成されている。このことは、計算対象領域をデジタル画像にすると、障害物もピクセルで近似できることを示している。Fig.3 の画像は横 1000 ピクセル縦 300 ピクセルから構成されている。この 3×10^5 個の各ピクセルはアドレスと (R,G,B) の輝度値の情報を持つ。我々は横 \times 縦が $N_c \times N_c$ ピクセルの集合をセルと定義する。我々が作成したプログラムは 24 bitBMP ファイルの画像からピクセルのアドレスと (R,G,B) の輝度値の情報を読み取り、セルがどの部分領域に属するかを判定する計算セル生成プログラムである。ここでは、Fig.3 に対する計算セル生成の 1 例を示す。まず、セルの輝度値 (y_R, y_G, y_B) を次のように定める：

$$y_R = \frac{\text{セルに含まれるピクセルの赤 (R) の輝度値の合計}}{N_c \times N_c},$$

$$y_G = \frac{\text{セルに含まれるピクセルの緑 (G) の輝度値の合計}}{N_c \times N_c},$$

$$y_B = \frac{\text{セルに含まれるピクセルの青 (B) の輝度値の合計}}{N_c \times N_c}.$$

このセルの輝度値を用い、計算セル $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ を次のように定める：

$$\tilde{\Omega}_2 = \{ \text{セルの集合} ; (y_R, y_G, y_B) = (0.0, 0.0, 0.0) \},$$

$$\tilde{\Omega}_3 = \{ \text{セルの集合} ; (y_R, y_G, y_B) = (0.0, 0.0, 255.0) \},$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \{ \text{セルの集合} ; \Omega \setminus (\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3) \}.$$

これより作られた計算セルは次の通りである。



Fig. 6: Regular cell for the computation

4. 計算セルと仮想領域法による数値計算アルゴリズム

2 節と 3 節で述べた方法によって、3 つの円柱周りやリスボン市街地の風の流の数値計算を行う。ここでは、リスボン市街地の場合を例に計算セルと仮想領域法を用いて Navier-Stokes 方程式に対する数値計算アルゴリズムを示す。

2 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値計算において、圧力ポアソン方程式を用いる。このとき、 γ 上に

ノイマン境界条件 (3) が課されている。このノイマン境界条件を 2 節, 3 節を用いて近似する (1),(2),(3)。計算セル上の関数：

$$a(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{on } (\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_3) \\ \varepsilon & \text{on } \tilde{\Omega}_2 \end{cases} \quad (22)$$

および,

$$\tilde{f}(x, y, t) = \begin{cases} f(x, y) & \text{on } (\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_3) \\ 0 & \text{on } \tilde{\Omega}_2 \end{cases} \quad (23)$$

を定義する。ここで

$$f(x, y, t) = \frac{\partial(\nabla \cdot v)}{\partial t} + \nabla \cdot ((v \cdot \nabla)v) - \frac{1}{Re} \Delta(\nabla \cdot v)$$

である。このとき、次のように計算する。

[数値計算アルゴリズム]

(4-1) 全領域 Ω において、次の形の方程式

$$-\nabla \cdot (a(x, y, t) \nabla p) = \tilde{f}(x, y) \quad \text{in } (0, T) \times \Omega$$

を外周の境界条件 (7), (8) のもとで数値解 p を求める。

(4-2) この数値解 p を Navier-Stokes 方程式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v \quad \text{in } (0, T) \times \Omega$$

に代入して、外周の境界条件 (5), (6) および付加条件 (9), (10)：

$$v = (0.0, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \tilde{\Omega}_2$$

$$v = (0.2, 0.0) \quad \text{in } (0, T) \times \tilde{\Omega}_3$$

のもとで、速度ベクトル v を計算する。この計算では、陰解法と三次精度上流差分を用いている。

(4-3) 以上の計算を各時間ステップ毎に繰り返す。

5. 数値計算結果

数値計算アルゴリズム (4-1),(4-2),(4-3) を適用する。

(1) 3 つの円柱周りの流れの数値シミュレーション：

画像のピクセル数： 4.8×10^5

セル= 8×8 ピクセル

レイノルズ $Re = 2,000$

時間の刻み幅 $t = 0.01$

時間ステップ数 $s = 5,000$

のもとで計算し、流れの方向を矢印で、流れの速さをカラーで表すと下図になる：

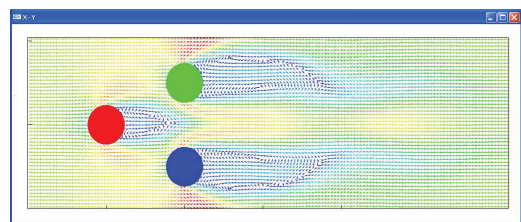


Fig. 7: Numerical result for the flow around 3 circular cylinder.

(2) リスボン市街地における風の流れの数値シミュレーション:

画像のピクセル数: 3×10^5
セル = 5×5 ピクセル
レイノルズ $Re = 2,000$
時間ステップ数 $s = 1,000,000$
時間の刻み幅 $t = 0.01$

のもとで計算し, 流れの方向を矢印で, 流れの速さをカラーで表すと下図になる:

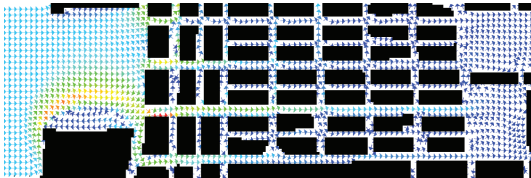


Fig. 8: Wind flow in Lisbon city

この数値シミュレーションからテージョ川から流入した風が大きな通りだけでなく小さな道にも入り, 市街地の広場 B, C の方向に流れている様子がわかる。

まとめ

仮想領域とデジタルカラー画像を用いて, 2次元 Navier-Stokes 方程式に対する数値計算法を示した。この計算では, 次のプログラムを作成し, 数値実験を行った:

(C1) 24bitBMP ファイルの画像から計算セルを生成するプログラム,

(C2) Navier-Stokes 方程式の計算では, (C1) の計算セルを用いて, LU 分解, 3次精度上流差分, 陰解法を基にした有限差分法のプログラム,

(C3) 流れの可視化では, OpenGL を使い⁽⁵⁾, 流れの向きはベクトルで, その大きさはカラーで表示するプログラム。

このように有限差分法はデジタル画像を組み込むことによって, 計算セル上の数値計算を可能にしている。この方法は, 現在, 瀬戸内海・豊島の産業廃棄物・地層中の地下水流れの数値シミュレーション^{(6),(7)}に応用されている。今後, 下図のような有限な高さの円柱

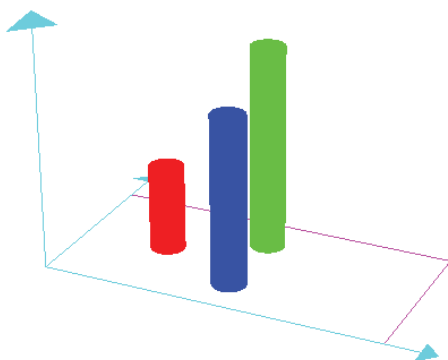


Fig. 9: Fig.5 Three circular cylinders

周りの流れやリスボン市街地の建物の高さを考慮した3次元の数値シミュレーションを仮想領域とデジタルカラー画像を用いて行う。

謝辞

本研究は科研費(22540113)の助成を受けているものである。また, 増田潤一氏(荏原製作所)からご援助を頂

いた。

参考文献

- (1) H.Fujita, H.Kawahara and H.Kawarada, Distribution theoretic approach to fictitious domain method for Neumann problems, East-West J.Number Math.3(2)(1995),pp.111-126.
- (2) 河原田秀夫, 自由境界問題 (理論と数値解法), 東京大学出版 (1989).
- (3) H.Koshigoe, T.Shiraishi and M.Ehara, Distribution algorithm in finite difference method and its application to a 2D simulation fo temperature inversion, Journal of computational and applied mathematics, vol.231(2009)pp.102-108.
- (4) J.L.Lions, Perturbations Singulieres dans les Problems aux Limites et en Controle Optimal, Lecture Notes in Mathematics 323, 1973.
- (5) 佐伯公美, 小島智子, 腰越秀之, 地理情報を利用した差分法の数値計算-仮想領域と OpenGL を用いた可視化について-, 日本応用数学会 2007 年度年会講演予稿集, pp.256-257(2007).
- (6) 吉井孝子, 増田潤一, 腰越秀之, デジタルカラーを用いた産業廃棄物中の流れの数値シミュレーション, 第 22 回数値流体力学シンポジウム, Proceedings CD, K6-5(2008).
- (7) T.Yoshii and H.Koshigoe, A computational method for groundwater flow through industrial waste by use of digital color image, Lecture Notes in Computer Science 6329, Springer(2010), pp.288-296.