

複雑形状パイプ内の熱対流の数値計算

A Numerical Method for Thermal Convection in Some Complicated Shaped Long Pipes

- 桑名 杏奈, お茶大, 東京都文京区大塚 2-1-1, E-mail: kuwana.anna@ocha.ac.jp
 河村 哲也, お茶大院, 同上, E-mail: kawamura@is.ocha.ac.jp
 Anna KUWANA, Ochanomizu University, 2-1-1 Ootsuka, Bunkyo-ku, Tokyo
 Tetuya KAWAMURA, Ochanomizu University Graduate School of Humanities and Sciences

A new numerical method that is suitable for the calculation of thermal convection in a channel of very large aspect ratio is developed. Thermal convection in a very long region is important for disaster prevention or manufacturing. For example, flow of fire disaster in tunnels or metro stations or elevator shafts. We proposed the new method that is effective for the calculations of incompressible flow in a long region. The idea of the method is that the flow variables are expressed as sum of the main flow and their variations. We applied the new method for incompressible flow in a long pipe and obtained good results in previous studies. In this study, the new method is extended for 3dimensional flow with heat and thermal convection in some complicated shaped long pipes.

1. はじめに

河川や血管, トンネル, パイプなど, 細長い流路内の非圧縮性の流れは現実によく存在する. 細長い領域内の流れを数値的に求める場合の大きな問題点として, 連続の式を精度よく満たすことが難しいことがあげられる. 著者らは, このような領域内の流れを効率的に解く方法として, 流れが主に 1 次元流れで支配されることに着目し, 1 次元流れとそれからのずれという形で数値的に取り扱う方法を提案し, 細長いパイプ内の非圧縮性流れに適用して良好な結果を得た⁽¹⁾⁽²⁾など. 現在は本方法を, トンネルや地下鉄構内, エレベータシャフトなど細長く複雑な形状をした領域内での火災の計算に適用することを目指し, 熱を含む 3 次元流れに拡張している⁽³⁾. 本稿では一般座標変換とマスク法を用いて, いくつかの複雑形状領域内での計算を試みる.

2. 計算方法

たとえば Fig.1 のような直立したパイプ (上下が抜けた管) において, 下部の壁面上に熱源を設置すると, 温度差により対流が発生する (紙面の都合上, 本稿内の流れ場の図は 90 度右に回転し, 図の右側がパイプの上部となる状態で示している).

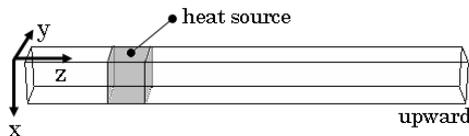


Fig.1 Computational Domain and Location of Heat Source.

領域内の流れを, ブシネスク近似を用いた非圧縮性流れで表すとすると, 基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

x, y, z は Fig.1 に示す空間座標 (z が垂直方向), u, v, w は速度の x, y, z 方向成分, T : 温度, Re : レイノルズ数($=50$), Gr : グラスホフ数($=5000$), Pr : プラントル数($=0.71$) とする.

アスペクト比が非常に大きいという形状を鑑みると, z 方向 (垂直方向) への流れが卓越すると思われる. そこで, この問題を最も単純化すれば, 時間的に変化する z 方向への 1 次元流となる. すなわち

$$w = w(z, t), \quad p = p(z, t), \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

を仮定する. 式(6)を式(1), (4) に代入すると以下を得る.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (8)$$

式(2), (3) は $0=0$ となる. ここでは単純な形の 1 次元流を得るのが目的のため浮力項は無視, 温度は全ての格子点でゼロとしている. 式(7)と, 式(6) の一つ目から 1 次元流として

$$w = f(t) \quad (9)$$

を得る. 過去の研究では $f(t)$ として, 領域の流入口での境界条件を与えていたが, 熱対流の場合は初期には主流が存在せず, 時間とともに 1 次元流れが卓越するため, 熱源周囲の速度の平均値を $f(t)$ として採用した. 式(9) を式(8) に代入すると

$$f'(t) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{i.e.} \quad p = -f'(t)z + C(t) \quad (10)$$

$C(t)$ は時間のみに依存する関数とする. 式(9), (10)により表される主流と, 主流からのずれ \tilde{w}, \tilde{p} を考えて, 以下のようにおく.

$$w = f(t) + \tilde{w}(x, y, z, t), \quad p = -f'(t)z + C(t) + \tilde{p}(x, y, z, t) \quad (11)$$

式(11) を元の基礎方程式(1)~(5) に代入すれば

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + (f + \tilde{w}) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (f + \tilde{w}) \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + (f + \tilde{w}) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} T \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + (f + \tilde{w}) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

が得られる。この方程式を MAC 系の解法で解く。なお、壁面上での境界条件は $w=0$ であるため、 $\tilde{w}=-f(t)$ となる。

上記の手法を以下の 3 つの複雑形状パイプに適用する。図は基本的に 90 度右方向に回転し、高さ方向に 1/2.5 に縮小した状態で描いているが、いずれも実際のアスペクト比は 25.0 程度である。

A. 壁面形状が複雑な場合

Fig. 2 に示すような形状が直方体から少しずれた領域の場合、式(12)~(16) (および圧力のポアソン方程式) を一般座標変換

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

により書き直したものを用いる。

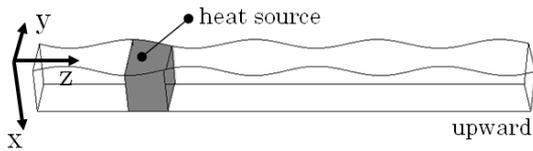


Fig.2 Complicated Shaped Long Pipe.

B. 分岐がある場合

領域の中央で $m:n$ の比率で 2 本の管に分かれているとする。分岐前は主流速度を $f(t)$ 、熱源で囲まれた領域での流量を Q として本手法で計算する。分岐後は、管 1 の主流速度 $f_1(t)$ を管 1 の流量が $mQ/(m+n)$ になるように、管 2 の主流速度 $f_2(t)$ を管 2 の流量が $nQ/(m+n)$ になるように決めて、各管に対して本手法で計算する。実際の流量は 2 つの管に対する出口の条件や、粘性の効き方によって必ずしも $m:n$ にはならない。しかし本手法では計算上便宜的に主流と考えられる部分とそれからのずれとの和によって、実際の物理量を表しているだけである。したがって、計算の結果得られるずれの速度と主流とみなした速度を足したものは、出口での境界条件等が正しく反映された解になっていると考えられる。今回は $m:n = 2:1$ とした (この図のみ、高さ方向に 1/2.5 に縮小すると形状が大きく崩れるため、実寸で示す)。

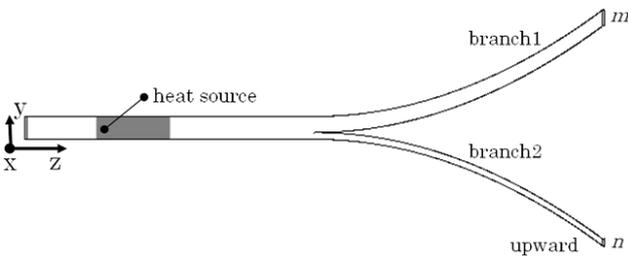


Fig.3 Long Pipe with Branch.

C. パイプ内に障害物がある場合

流体のない部分もいっしょにまとめて計算し、物体部分や境界条件に関しては後で適切な処理を行う (マスク法)。すなわち、計算のたびに物体部分での流速をゼロとし、物体表面の温度・圧力は境界条件として一つ外側の流体のある格子点での値を与えた⁴⁾。

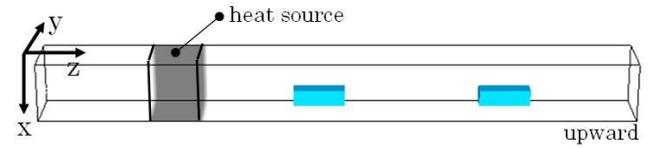


Fig.4 Long Pipe with Blocks in It.

3. 計算結果

A. 壁面形状が複雑な場合

Fig.5 に x 軸方向中央断面の温度分布と流速ベクトルを示す。Fig.5(a) は本手法で計算した結果で、熱源により内部の流体が温められ、温度差により上昇流が発生、領域上部から流出、同じ量だけ領域下部から流入している。Fig.5 (b) は従来の MAC 法 (領域形状・温度・圧力のポアソン方程式の解法などの条件は(a)と同等) での結果であるが、温められた流体が熱源付近に留まり、パイプの上部まで抜けていかない様子が見える。

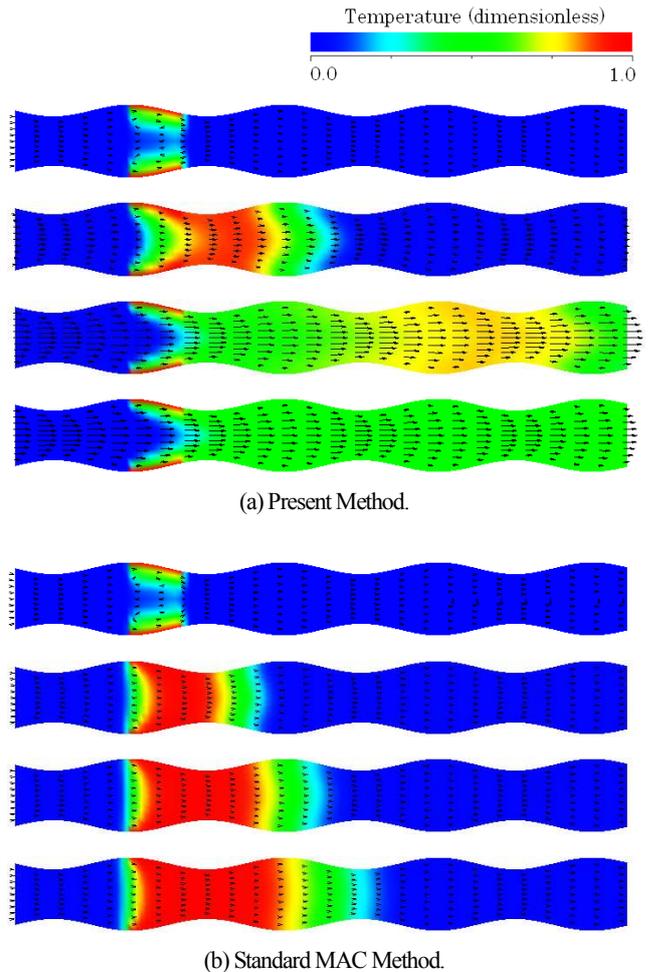


Fig. 5 Temperature and Velocity Vector at Timestep = 100, 1000, 2000, 3000, respectively.

Fig.6 は特徴的な時間における, z 軸 (垂直方向) に沿ったいくつかの断面上での質量流量のグラフである. 従来の MAC 法ではパイプ入口・出口付近の流量がほぼゼロであるが, 本方法では時間発展的に流量が計算され, 領域内である程度の値が保たれる.

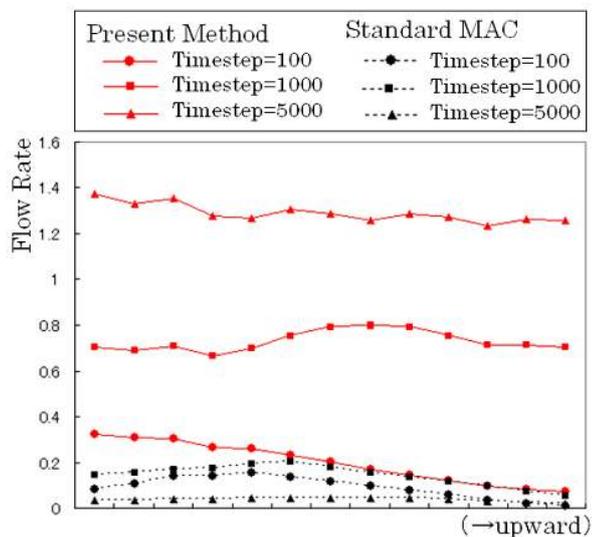
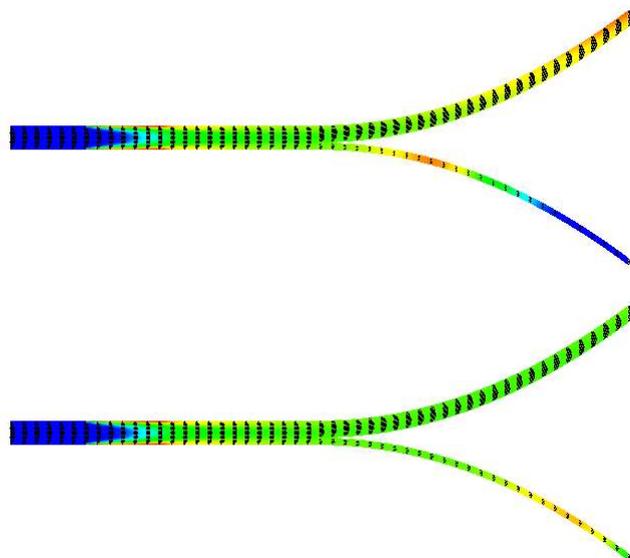


Fig. 6 Flow Rate along z-axis.

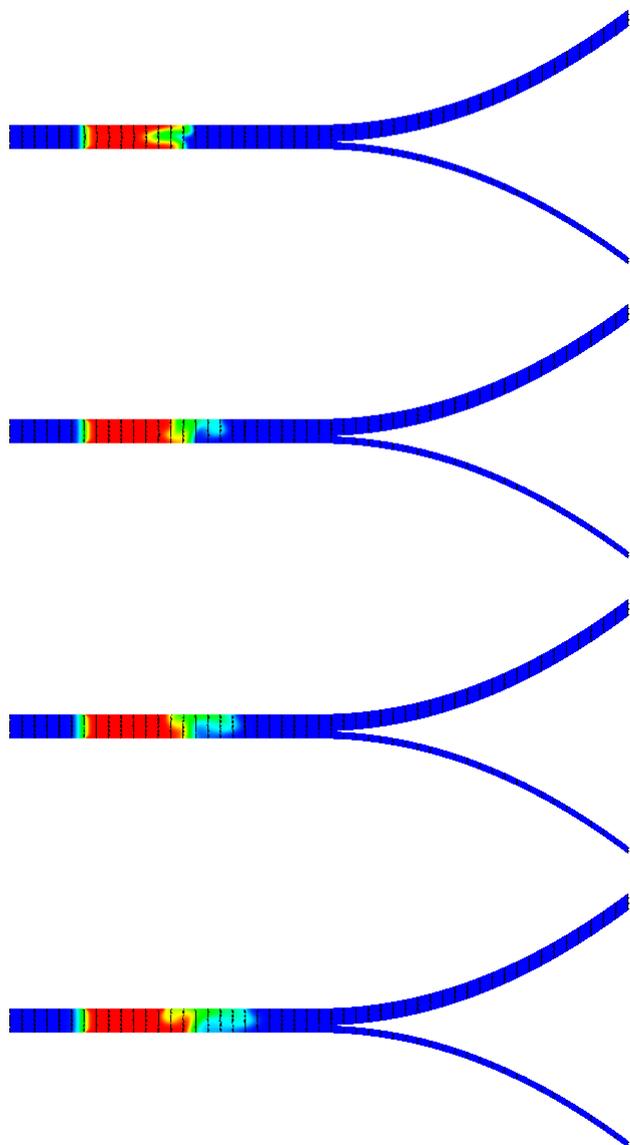
B. 分岐がある場合

Fig.7 に x 軸方向中央断面の温度分布と流速ベクトルを, Fig.8 に質量流量のグラフを示す. Fig.7(a) は本方法で計算した結果で, A と同様, 下部の壁面上の熱源から内部の流体が温められ, 温度差により上昇流が発生している. 領域の中央で 2:1 の比率で 2 本の管に分かれているが, Fig.7(a)の図および Fig.8 のグラフからも分かる通り, 実際の分岐後の流量は 2:1 にはなっていない. 管壁の摩擦を考えると管が細いほど流れにくくなるため, これは妥当な結果と思われる.

Fig.7 (b) は従来の MAC 法での結果である. 温められた流体が熱源付近に留まり, パイプの上部まで抜けていかず, その場で循環する様子が見える. このことは Fig.8 に示す質量流量のグラフからも確認できる.

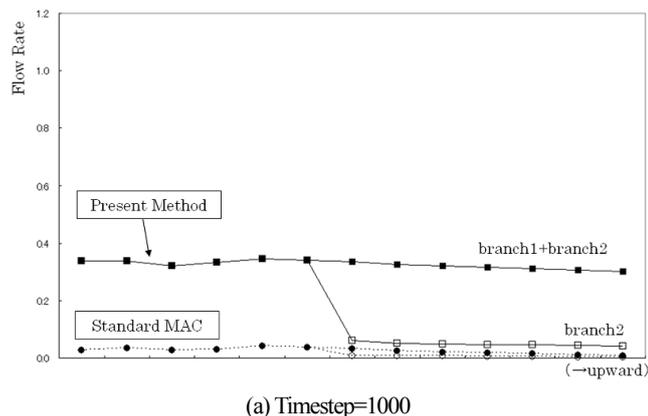


(a) Present Method.

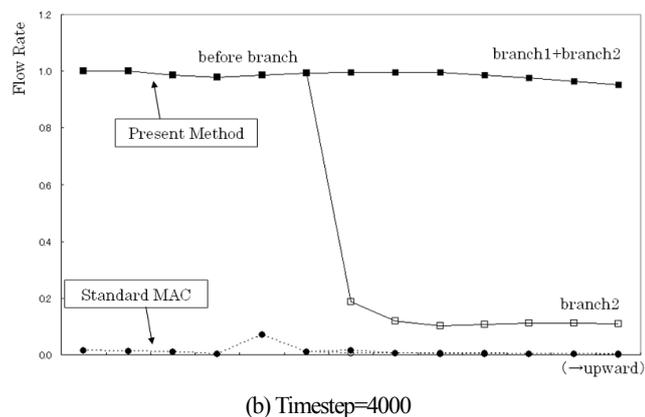


(b) Standard MAC Method.

Fig. 7 Temperature and Velocity Vector
at Timestep = 1000, 2000, 3000, 4000, respectively.



(a) Timestep=1000

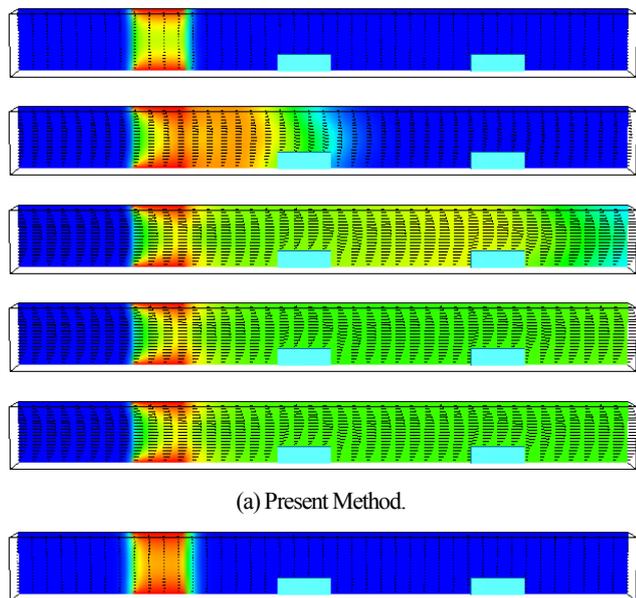


(b) Timestep=4000

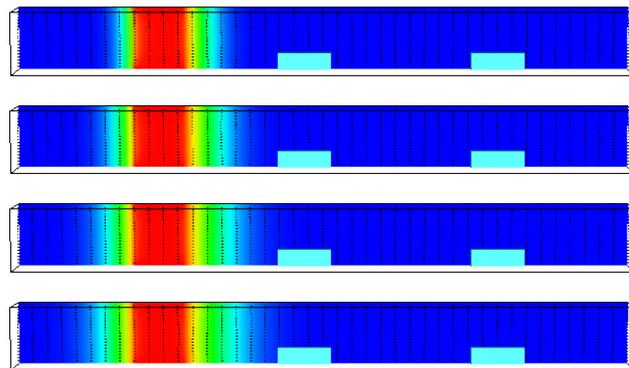
Fig.8 Flow Rate along z-axis.

C. パイプ内に障害物がある場合

Fig.9 に y 軸方向の一断面 (障害物の中央を通る面) における温度分布と流速ベクトルを, Fig.10 に質量流量のグラフを示す. Aと同様, Fig.9 (a)では下部の壁面上の熱源から内部の流体が温められ, 温度差により上昇流が発生する. Fig.9 (b)の従来の MAC 法では, 温められた流体が熱源付近に留まり, パイプの上部まで抜けていかず, 質量流量はゼロに近い. このことは Fig.10 に示す質量流量のグラフ(b)からも確認できる.



(a) Present Method.



(b) Standard MAC Method.

Fig. 9 Temperature and Velocity Vector at Timestep = 100, 1000, 2000, 3000, 4000, respectively.

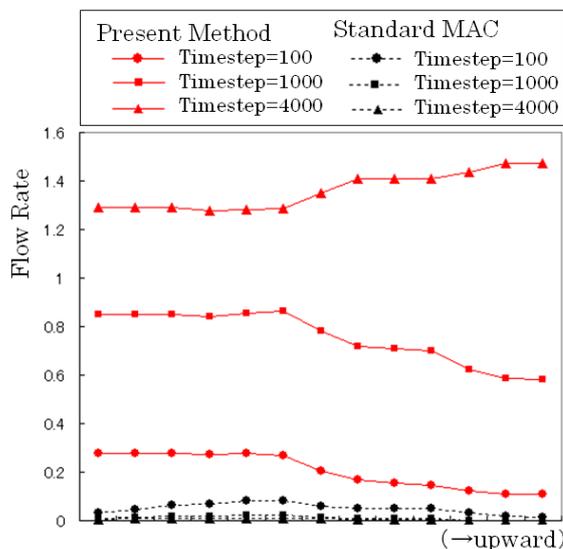


Fig.10 Flow Rate along z-axis.

4. まとめ

細長い領域内の流れを効率的に解く方法として, 1 次元流れとそれからのずれという形で数値的に取り扱う方法を提案し, 熱を含む 3 次元流れに拡張し, 一般座標変換およびマスク法を用いて複雑形状をした領域内の流れに適用した. 従来の MAC 法では連続の式が精度よく満たされず, パイプ出口まで流量が保たれないような細長い領域において, 一般座標変換を用いると領域全体である程度流量を保って計算することができた.

参考文献

- (1) 河村哲也, 大野布美子, 中村陽子: 分岐のある細長い流路内の流れの計算法, 第 20 回数値流体力学シンポジウム, 2006
- (2) T. Kawamura and K. Miyashita: A numerical method for calculations of flow in long region with branch, Natural Science Report, Ochanomizu University, 58, pp.45-55, 2007
- (3) A. Kuwana and T. Kawamura: A Numerical Method for Thermal Convection in a Vertical Long Pipe, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Volume 60- 60th Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics, 2011, in press.
- (4) 河村哲也, 「流体解析 I」, 朝倉書店, 1996.