

高解像度流体計算に向けた *a posteriori* 制限関数 (第 3 報) : 非構造格子への拡張

Simple *a posteriori* Limiters towards High Resolution Flow Computations, Part III: Extension to Unstructured Grids

○ 北村圭一, 横国大, 〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5, E-mail: kitamura@ynu.ac.jp
橋本敦, JAXA, 〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, E-mail: hashimoto.atsushi@jaxa.jp
Keiichi Kitamura, YNU, 79-5 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, Kanagawa 240-8501, Japan
Atsushi Hashimoto, JAXA, 7-44-1 Higashimachi, Jindaiji, Chofu, Tokyo 182-8522, Japan

The simple *a posteriori* slope limiter (“Post Limiter”) is extended to unstructured grids. The *a posteriori* limiting approaches were originally developed by Clain, S., Diot, S., and Loubère, R. [J. Comput. Phys. 230:4028-4050, 2011] for higher-order flow computations, but was simplified for 2nd order spatial accuracy in our previous studies. The Post Limiter tries to employ unlimited cell-interfacial values where and when possible, and smoothly blend the unlimited and (*a priori*) limited ones using Gnoffo’s auxiliary limiter, leading to equivalently four times resolution in 1D and nearly 4x4 times in 2D uniform structured grids, as reported earlier. The present work extends this approach to 2D unstructured grids composed either of rectangles or triangles: The former is straightforward, even with differences in reconstruction methods and (*a priori*) limiters between structured and unstructured grid solvers; the latter, on the other hand, is found to need cell geometries to be taken into account adequately. With this slight modifications, a shock/vortex interaction on a triangular mesh is successfully solved.

1. 緒言

圧縮性 CFD において制限関数(limiter)⁽¹⁾⁽³⁾は重要な役割を果たす。衝撃波に代表される不連続面においては、空間 2 次精度以上の CFD 手法は破たんしてしまう事が知られているため (Godunov の定理⁽⁴⁾), 一般には制限関数により空間精度を局所的に 1 次精度に下げる事で、計算の安定性を確保する。しかし近年、滑らかな計算格子を用いた遷音速 CFD では、制限関数を使わなくても衝撃波にて計算が破たんしない場合がある事が分かった (西川ら, National Institute of Aerospace, 私信, 2013)。更に著者らの試計算によれば、計算が破たんしなければ、制限関数を使った場合に比べて 2 次元でおよそ 16 倍相当の解像度が得られた (つまり 3 次元なら 64 倍となる)。ただし計算が破たんするかどうかは、衝撃波の強さや計算格子の滑らかさに依存する。

従来の制限関数は、いわば *a priori limiter*⁽⁵⁾である。セル界面の値を求める際、既知の物理量に基づいてのみ局所的に空間精度を 1 次に制限するか否かを判断する。従って安全側の判断、すなわち過剰な制限を行ってしまう場合がある。(実際⁽⁶⁾では、制限関数が不要な状況でこれを働かせない事で、解および収束性の改善が得られた。)

これに対し、Clain ら⁽⁵⁾が提案した MOOD (Multi-dimensional Optimal Order Detection) という枠組みの中で用いられる“*a posteriori*” limiting procedure では、まずは制限関数を用いない「(セ

ル界面) 候補値」を算出し、これが計算破たんの原因となり得る場合にのみ低次スキームに切り替える。ただしこの方法はセルごと高次から低次までの各手法を段階的に逐次的に試す事から、並列計算や陰解法といった効率的な計算には不向きである。

そこで前報^(7,8)ではこの方法を踏襲し、より簡単に制限関数無し (unlimited) の計算結果に近い解が得られる手法 *a posteriori limiter* (以下、**ポストリミタ**と呼ぶ) を提案している。具体的には、同時に計算可能な「制限関数無し」および「制限関数有り」の 2 通りのみを扱い、これらの候補値を混合する。こうして前報^(7,8)では 1 次元において 4 倍相当、2 次元構造格子で約 16 倍の解像度を達成し、更には収束性の向上や数値振動の回避といった利点も示した (図 1~3)。本報ではこれを長方形もしくは三角形セルから成る 2 次元非構造格子に拡張し、ベンチマーク問題で検証する。非構造格子⁽⁹⁾⁽¹⁵⁾は近年、複雑形状を扱う際に標準的となりつつあるため、この拡張は必須である。

2. 支配方程式

支配方程式は圧縮性 Euler もしくは Navier-Stokes 方程式であり、下記のように書ける (例えば 3 次元では下添字 k, l, m, n に 1, 2, 3 が代入される)。

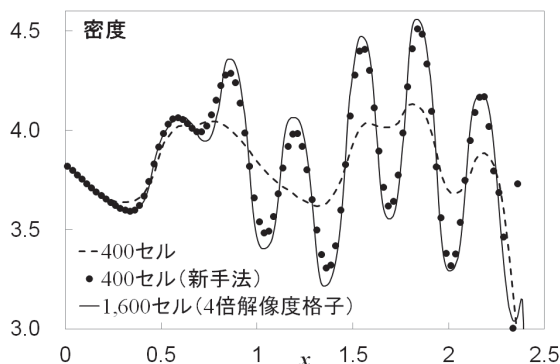


Fig. 1 1D Shock/Entropy-Wave Interaction⁽⁷⁾

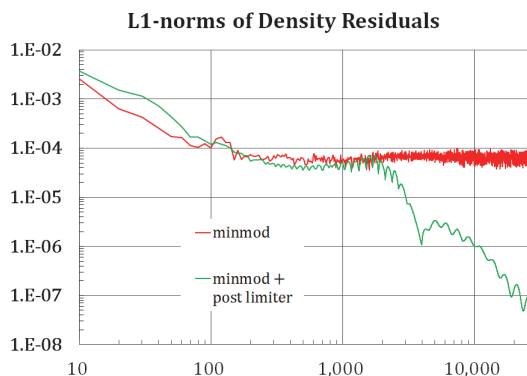


Fig. 2 Density residual histories for NACA0012 at Mach 0.8, AoA=1.25 degree.⁽⁸⁾

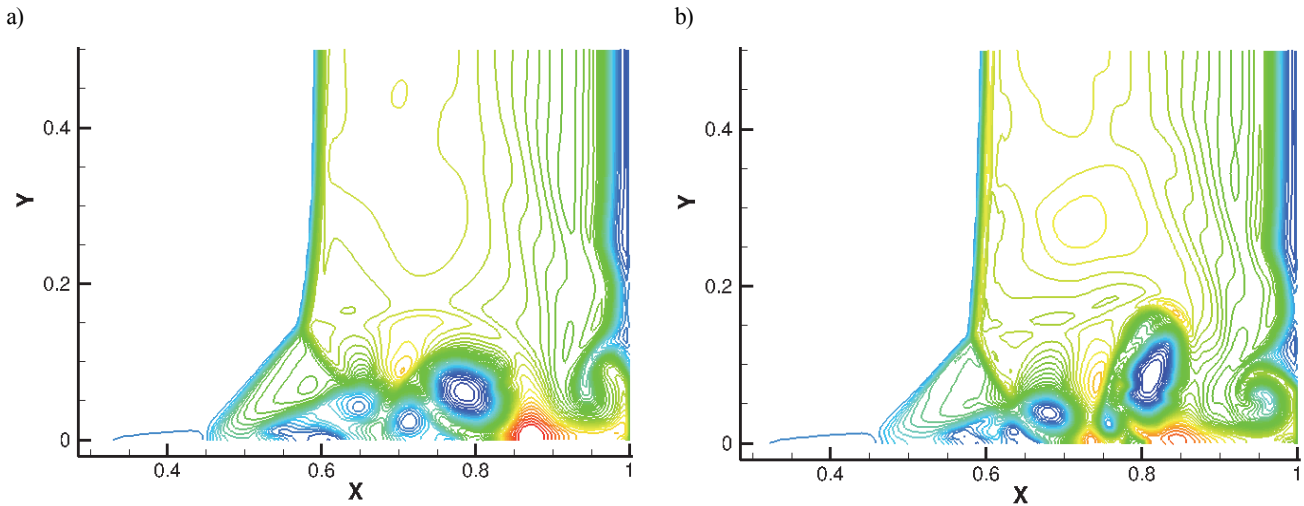


Fig. 3 Density contours at $t=1$ of viscous shocktube (a) MUSCL ($\kappa=1/3$) + minmod, (b) MUSCL ($\kappa=1/3$) + minmod + Post Limiter.⁽⁸⁾

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{Fv}_k}{\partial x_k} \quad (1a)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_i u_k + p \delta_{ik} \\ \rho u_k H \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{Fv}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ik} \\ u_m \tau_{mk} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (1c)$$

$$\tau_{ik} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \delta_{ik} \right] \quad (1c)$$

ここで、 ρ は密度、 u_i は速度成分、 E は全エネルギー、 p は圧力、 H は全エンタルピ ($H=E+(p/\rho)$) である。気体は完全気体の空気 (比熱比 $\gamma=1.4$)、プラントル数は $Pr=0.72$ である。分子粘性 μ は一定とし、熱伝導係数 κ とは $\kappa=c_p \mu Pr$ の関係がある (c_p は定圧比熱)。一方で、非粘性計算 (Euler 方程式) の場合は $\mu=\kappa=0$ である。これらは有限体積法表記で次のようになる。

$$\frac{V_i}{\Delta t} \Delta \mathbf{Q}_i + \sum_j (\mathbf{F}_{i,j} - \mathbf{Fv}_{i,j}) S_{i,j} = 0 \quad (2)$$

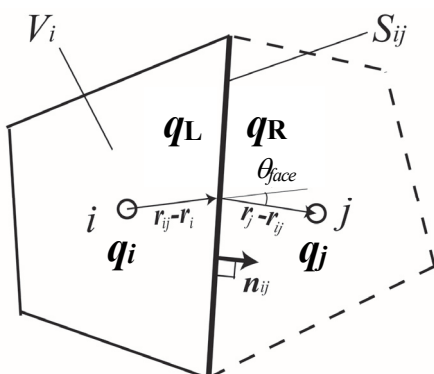


Fig. 4 Schematic of cell geometric properties.

ここで、 V_i はセル i の体積、 Δt は時間刻み、 $\Delta \mathbf{Q}_i$ は保存量の時間変化、 \mathbf{F}_{ij} および \mathbf{Fv}_{ij} はセル i とその隣接セル j との界面 S_{ij} を通るそれぞれ非粘性 (数値) 流束および粘性流束である (図 4 を参照)。

3. a posteriori 制限関数 (ポストリミタ)

3-1. MOOD (Multi-dimensional Optimal Order Detection)

Clain ら⁽⁵⁾が提案した MOOD (Multi-dimensional Optimal Order Detection) とは、計算ステップごと、計算要素 (セル) ごとに、高次から低次のスキームの中から最適の手法を選択する事により、可能な限り高次精度計算を維持しようとする方法である。例えば、ある時刻、あるセルにおいてまずは 7 次精度 WENO (最高次のスキーム) による「候補値」を計算する。この候補値が positivity や Discrete Maximum Principle (DMP) といった条件 (注: この判定条件には改良の余地がある) を満たしていればそのまま候補値を採用し、そうでない場合は例えば 5 次精度、3 次精度等に次数を下げて次の候補値を計算する。こうして階層構造 (図 5 を参照) を降りて行き、もし最終的に 1 次精度 (最低次のスキーム) まで辿りついた場合には、少なくとも上記の判定条件は満たされる。このように常に時間的かつ局所的に最適な精度を持つスキームを選択する事で、可能な限り高次精度の解を維持する。

なお、このように高次精度手法で「一旦計算した候補値」に基づいて空間精度を決定する過程を *a posteriori limiting procedure*⁽⁵⁾ と呼び、従来の「既存の物理量・状態量における値のみ」に基づく *a priori* 制限関数と区別する*。

3-2. 構造格子ポストリミタ^(7,8)

MOOD は最適な精度が選択されるという点において非常に魅力的であるが、図 3 に示した通りその階層構造は複雑である。次数を下げるたびに、次の do ループを回して候補値を求め直す必要がありコストがかかる。またセルごとにループの数や空間精度が異なるために、並列計算や陰解法といった効率的な計算は困難である。そこで我々のポストリミタでは、まず空間精度を 2 次精度に限定した。制限関数無しの 2 次精度値 q^{lim} 、および制限関数有りの 2 次精度値 q^{im} の 2 つのみを用いるのであれば、これらは同時に求める事が可能であるため計算コストやコードの煩雑さとい

* *a posteriori* 制限関数 (ポストリミタ) は、第 2 制限関数^(6,15)とも異なる。両者ともに *a priori* (第 1) 制限関数の採否を判定するものであるが、後者は既存の物理量・状態量のみを用いる。

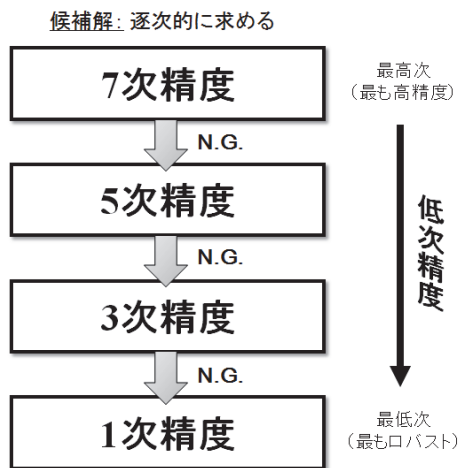


Fig. 5 Schematic of MOOD paradigm.

った問題はほとんど起こらない。

なお MOOD においては、候補値を棄却し次数を下げる判定条件については 3 次精度以上の場合については年々改良が重ねられているが⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾, 2 次精度については十分な検討がなされていない。もし判定条件が厳し過ぎれば低次スキームが選ばれやすくなり、その分、数値解の解像度は劣化する。逆に判定条件が緩いと、不安定な解が現れやすくなる。また if 文を多用すると、そこで計算コストの増加や解、収束性の劣化につながるため注意が必要である。そこで本手法 (ポストリミタ) では、 q^{nolim} および q^{lim} からの選択においては、Clain らによる positivity および DMP に基づく判定に加え、周囲の圧力比を判定条件に加えた^(7,8)。このとき MOOD のように if 文を用いるのではなく、滑らかな関数を利用する。具体的には、圧力比の関数である Gnoffo の補助制限関数(Auxiliary Limiter, or 2nd Limiter⁽¹⁵⁾) ϕ_G を組み合わせ、圧力比が大きい場合には低次スキームが選択され易くする。こうする事により解を安定化させ、かつ精度の空間的变化を滑らかにした (図 6)。

結局、制限関数無し of 2 次精度解 q^{nolim} , および制限関数有りの 2 次精度解 q^{lim} の 2 つのみを用いた下記の簡素な手法が提案できた。

```

if  $\rho^{nolim} > 0$  and  $p^{nolim} > 0$  then ! positivity
  if  $\min(\rho_i, \rho_j) < \rho^{nolim} < \max(\rho_i, \rho_j)$  and  $\min(p_i, p_j) < p^{nolim} < \max(p_i, p_j)$  then
    ! Discrete Maximum Principle
     $\phi_G = 1$ 
  endif
else
   $\phi_G = 0$ 
endif

 $\phi_G = \phi_G' \dots (*)$ 
 $q = \phi_G q^{nolim} + (1 - \phi_G) q^{lim}$ 
    
```

(3)

もし positivity および DMP が満足されれば、制限関数無し of 2 次精度解 q^{nolim} が採用される。ここで、Gnoffo の補助制限関数 ϕ_G' は次のように与えられる (図 7) ⁽¹⁵⁾。



Fig. 6 Schematic of Post Limiter.

$$\phi_G' = \frac{1 - \cos(\Phi\pi)}{2}, \quad \Phi = \min \left[1, \max \left(0, \frac{\varphi_{\max} - \varphi}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}} \right) \right] \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{p_{\max}}{p_{\min}}, \\ p_{\max} &= \max(p^{nolim}, p_i, p_j), \\ p_{\min} &= \min(p^{nolim}, p_i, p_j) \end{aligned} \quad (4b)$$

ここで $(\varphi_{\max}, \varphi_{\min}) = (3, 2)$ とした。つまり、 $p_{\max}/p_{\min} \geq 3$ ならば $\phi = 0$ となり、 $p_{\max}/p_{\min} \leq 2$ ならば $\phi = 1$ となる。なお、下添え字 i および j はそれぞれセル中心 i および j における値であり、それらの界面にて再構築された値 (例えば、 p^{nolim}) を用いる (図 4)。

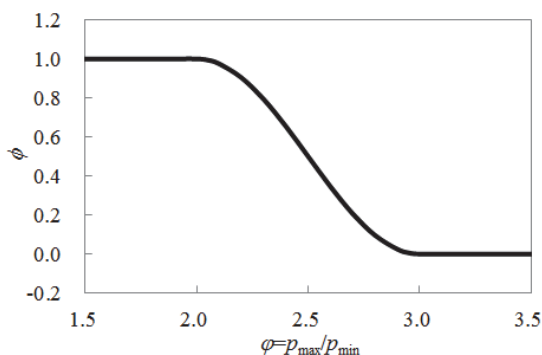


Fig. 7 Gnoffo's Auxiliary Limiter.

例えば構造格子コードでは、空間の再構築には $\kappa = 1/3$ の MUSCL⁽¹⁸⁾ を minmod limiter⁽¹⁾ (a priori 制限関数) と共に使用した後、ポストリミタを適用する事ができる。最終的には、

$$q_{i,j} = q_i + \phi_{final} \nabla q_i \cdot (\mathbf{r}_{i,j} - \mathbf{r}_i) \quad (5)$$

$$\phi_{final} = \phi + (1 - \phi) \cdot \phi_{lim}$$

と表現する事もできる。このとき ϕ_{final} には全ての基本量に共通した値を用いる。

3-3. 非構造格子ポストリミタ

非構造格子ソルバーを使う場合であっても、計算格子が構造格子で表現できるような品質の良いものである場合は、構造格子ポストリミタを用いれば良い。これに対し、より一般的な三角形メッシュに代表される非構造格子を扱う場合には、後の数値例にて示す通りセルの幾何形状を考慮したわずかな修正が必要となる。具体的には、式(5)の(*)部分を以下のように書き換える。

$$\phi_G = \min(\phi_G^*, \phi_{face}) \quad (6a)$$

$$\phi_{face} = 0.25(\cos(\theta_{face}) + |\cos(\theta_{face})|)^2 \quad (6b)$$

と式(4)で得られた G_{noffo} の補助制限関数 ϕ_G の値を更に修正する。ここで θ_{face} は図 4 に示されるセル偏向角であり⁽¹⁹⁾、 $(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_i)$ および $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{ij})$ ベクトルの内積から与えられる (\mathbf{r}_{ij} , \mathbf{r}_i および \mathbf{r}_j はそれぞれセル界面中心 ij , セル中心 i , セル中心 j , の位置ベクトル)。もしこれら 3 点が一直線上にあれば (1 次元、もしくは直交格子) $\theta_{face}=0$ 、よって $\phi_{face}=1$ となるため修正無し、すなわち構造格子ポストリミタに帰着する。一方で、 θ_{face} が 90 度を超えると $\phi_{face}=0$ となり、ポストリミタは機能しない。そして $0^\circ \leq \theta_{face} \leq 90^\circ$ については、式(6b)は図 8 の通り滑らかに接続される。よってここでの修正は依然、簡単かつ局所的である。

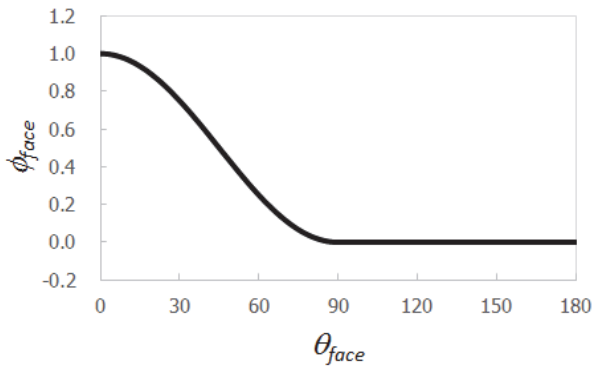


Fig. 8 Smooth Function for Cell-Orientation Angle.

4. 数値実験

4-1. 衝撃波・境界層干渉問題 (Viscous Shocktube 問題)

まず Daru ら⁽²⁰⁾により提案された 2 次元衝撃波・層流境界層干渉問題を扱う。計算空間は $[0, 1] \times [0, 0.5]$ とし、 250×125 セルで等間隔に分割する ($\Delta x = \Delta y = 1/250$: Baseline)。よって正方形セルのみで構成されるため、ここでは式(6)の修正は無効となり、構造格子ポストリミタが使用される。ただし前報まで^(7,8)と異なり、本報では非構造格子ソルバー⁽¹¹⁾を用いる。このため再構築の方法や (*a priori*) 制限関数は構造格子のそれらと異なり、具体的には再構築には Green-Gauss 法⁽⁹⁾、(*a priori*) 制限関数には minmod もしくは Venkatakrishnan⁽³⁾を用いる。数値流束は SLAU2⁽²¹⁾であり、その他の条件は構造格子の場合^(7,8)と同じである。すなわち、上部境界は対称条件、それ以外の境界は断熱壁とした。

初期条件は

$$-(\rho, u, v, p)_L = (120, 0, 0, 120/\gamma) \quad \text{for } x \leq -0.5$$

$$-(\rho, u, v, p)_R = (1.2, 0, 0, 1.2/\gamma) \quad \text{for } x > -0.5$$

であり、時刻 $t=0$ で破膜後、右方へ伝わる衝撃波が右側の壁で反射し ($t=0.2-0.3$)、その後は下方の境界層と干渉しながら、分枝衝撃波として左側へ伝わる。この様子を、時間刻み $\Delta t = 5.e-6$ (CFL ≈ 0.52) とし、2 次精度 Runge-Kutta 法で 20 万ステップ ($t=1$) まで計算を行う。なおレイノルズ数は $Re=200$ とした。

計算結果として、 $t=1$ における密度分布を図 9 に示す。ここで図 9(a)は minmod 制限関数のみ、図 9(b)は minmod 制限関数およびポストリミタ、図 9(c)は Venkatakrishnan 制限関数のみ、図 9(d)は Venkatakrishnan 制限関数およびポストリミタをそれぞれ用いた結果である。また比較の為、図 9(e)に minmod 制限関数のみで Very Fine 格子 (各方向 4 倍の格子解像度) で計算した結果を示す。なおこの数値例については、十分な空間解像度を有する計算手法を用い、格子収束した解においては、 $x=0.8$ 付近で現れる渦の形状は縦長である (y 方向に長い) 事が知られている^(20,22-27)。

これらの結果からポストリミタを実装する事で (図 9b, d)、ポストリミタ無しで格子解像度 4x4 倍の図 9e と同様、縦長渦を再現できている事が分かる。つまりポストリミタにより、構造格子の場合 (図 3) と同様に 16 倍相当の解像度が得られた。また図 9c の Venkatakrishnan 制限関数のみを用いた場合には、図 9a の minmod 制限関数のみの場合に比べて渦がより良く解像されている。これは minmod 制限関数の方が強力 (精度を下げる効果が高い) ためである。しかしながらポストリミタを併用した場合の解 (図 9b, d) は両者でほぼ同様であり、この事から「実際には不要となる *a priori* 制限関数を、ポストリミタが効果的に抑制した」と言える。以上の事から、ポストリミタは構造格子コードだけでなく、Green-Gauss 法や Venkatakrishnan 制限関数を用いた非構造格子コード上でも正しく機能する事が確認できた。

4-2. 衝撃波・渦干渉問題

次に Jiang-Shu⁽²⁸⁾により提案された衝撃波・渦干渉問題を扱う (非粘性、非定常計算)。先ほどの数値例と異なり境界層が現れない事から、ここでは非構造格子で一般的な三角形メッシュ上で計算を試みる。計算空間は $[0, 2] \times [0, 1]$ とし、構造格子 400×200 セル⁽⁸⁾で用いた外側境界点を使って、内部の三角形セルを Pointwise 社のソフトウェア Pointwise[®]で自動生成した (249,756 セル)。このメッシュを "Baseline" と呼び、これより一段階粗いメッシュ (200x100 セルの構造格子の外側境界点を使用) を "Coarse" (62,364 セル)、更に粗いもの (100x50 セルの構造格子の外側境界点を使用) を "Very Coarse" (15,676 セル) とする。

初期条件として、 $x=0.5$ の位置にマッハ 1.1 の衝撃波を配置する。衝撃波の左側は

$$-(\rho, u, v, p)_L = (1, \sqrt{\gamma}, 0, 1) \quad \text{for } x \leq 0.5$$

と与えられ、右側の値は衝撃波前後の関係式から与える。更に、中心 $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$ とした下記の渦を、擾乱として重ね合わせる⁽²⁸⁾。

$$\begin{aligned} \Delta u &= \varepsilon \tau \exp(\alpha(1-\tau^2)) \cdot \frac{\Delta y}{r} \\ \Delta v &= -\varepsilon \tau \exp(\alpha(1-\tau^2)) \cdot \frac{\Delta x}{r} \\ \Delta T &= \frac{(\gamma-1)\varepsilon^2 \exp(2\alpha(1-\tau^2))}{4\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\Delta p = (\Delta T + 1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1$$

$$\Delta \rho = (\Delta p + 1)^{\frac{1}{\gamma}} - 1$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tau &= r/r_c, \quad r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta x &= x - x_c, \quad \Delta y = y - y_c \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\varepsilon = 0.3, \quad r_c = 0.05, \quad \alpha = 0.204$$

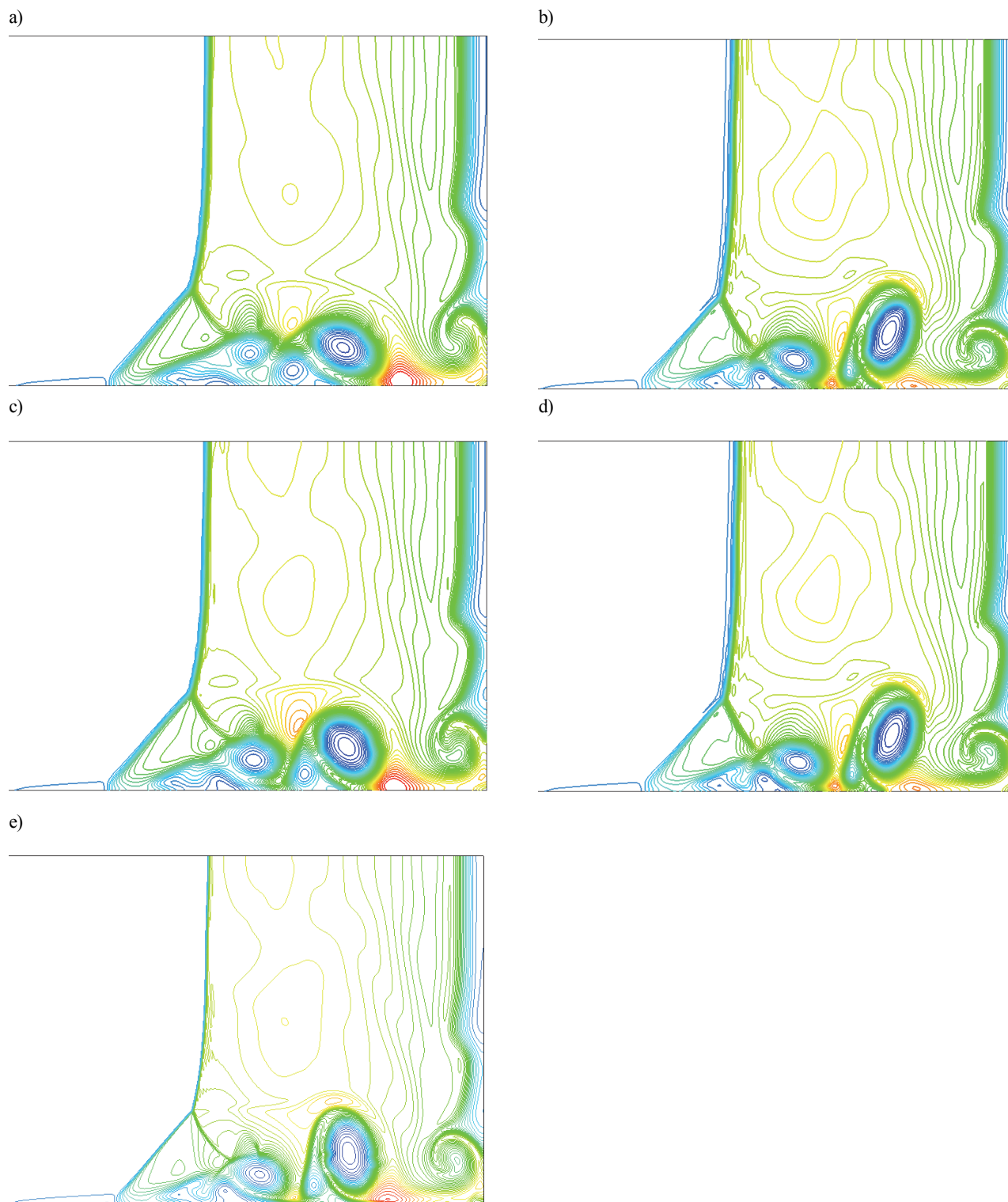


Fig. 9 Density contours at $t=1$ of viscous shocktube (a) Green-Gauss + minmod, (b) Green-Gauss + minmod + Post Limiter, (c) Green-Gauss + Venkatakrisnan, (d) Green-Gauss + Venkatakrisnan + Post Limiter, (e) Green-Gauss + minmod (Very Fine).

である。なお境界条件は左側が流入，右側が流出（圧力規定），上下境界で滑り条件である。一例として，Very Coarse 格子上で初期条件を図 10 に可視化した（左側領域を拡大して表示）。なお図から分かる通り，初期条件における衝撃波が必ずしも格子線に沿うわけではないので，この衝撃波は様々な角度でセルをまたいでいる（これは実用計算では頻繁に見られる状況である）。

時間刻みは各々のメッシュで約 $CFL \approx 0.5$ となるようにし，2次

精度 Runge-Kutta 法で $t=0.8$ まで計算を行う。空間の再構築には（三角形セルに適した）最小二乗法⁽⁹⁾を用い，minmod もしくは Venkatakrisnan 制限関数を非構造格子ポストリミタと併用し，数値流束を HR-SLAU2⁽¹⁹⁾で求める。

代表的な瞬間($t=0.6$)における Baseline 格子状の計算結果を図 11 に示す。概ね参考文献⁽²⁸⁾および前報⁽⁸⁾の構造格子計算に良く一致する結果が得られている。図 11a および図 11b より，minmod 制限

関数のみ、もしくは minmod および非構造格子ポストリミタ併用のいずれでも主たる流れ構造 (衝撃波背後の渦や、衝撃波の変形) は捉えられている。ただしこれらを詳細に比較すると、minmod のみ (図 11a) では渦の周囲に小さな数値振動(wiggles)が見られる。図 11b の minmod および非構造格子ポストリミタ併用の場合、これらの振動のほとんどは滑らかに捉えられているが、完全には除去できていない。それでも、より重要な成果として、「三角形メッシュ上の計算に、非構造格子ポストリミタを問題無く適用する事ができた」と言える。なおこの傾向は、minmod の代わりに Venkatakrishnan 制限関数を用いた図 11c、図 11d においても同様であった。一方で式(6)を用いない場合には (構造格子ポストリミタ)、計算が途中で破たんしてしまった。

図 12 には Coarse 格子の結果を示す。ここからは、minmod 制限関数のみ、もしくは minmod および非構造格子ポストリミタを併用した場合のみを示す。ここでも渦周辺の数値振動 (図 12a) は、非構造格子ポストリミタを用いた場合 (図 12b) には現れない事が確認できた。ただしこの格子においては、構造格子ポストリミタでも計算を行う事ができた (図 12c)。恐らくこれは、セルのサイズが大きくなった事に伴い、数値粘性も増大したためと考えられる。しかしそれでも、非構造格子ポストリミタの結果 (図 12b)

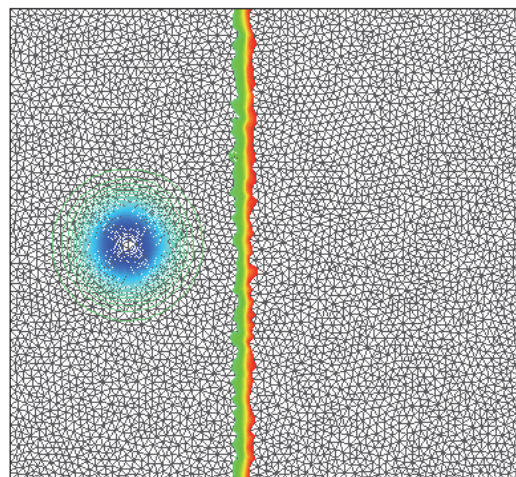


Fig. 10 “Very Coarse” 15,676 triangular cells for Shock/Vortex Interaction with Initial Condition (only the left-half domain is displayed and closed up for visualization purpose).

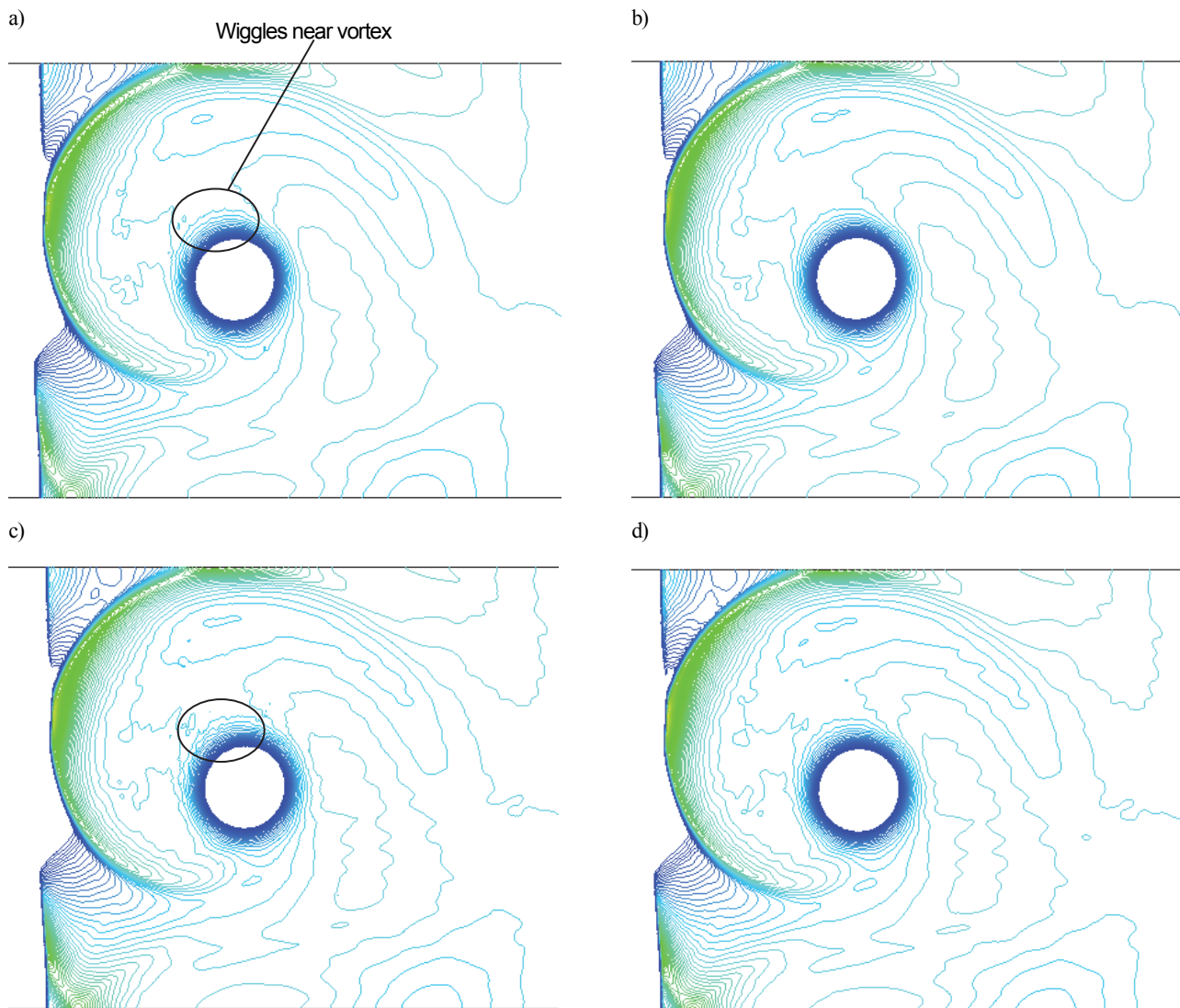


Fig. 11 Shock/Vortex Interaction (“Baseline” 249,756 triangular cells) (a) Least-Square + minmod, (b) Least-Square + minmod + Unstructured Post Limiter, (c) Least-Square + Venkatakrishnan, (d) Least-Square + Venkatakrishnan + Unstructured Post Limiter (Note: *Structured* Post Limiter was unable to compute this problem on this grid).

に比べると多くの数値振動を作り出している. なおこれらの事は, Very Coarse 格子を用いた場合 (図 13) でも同様であった.

以上の事から三角形メッシュ上では, 非構造格子ポストリミタは構造格子版に比べ計算の安定性が高く, また解の質を向上させ

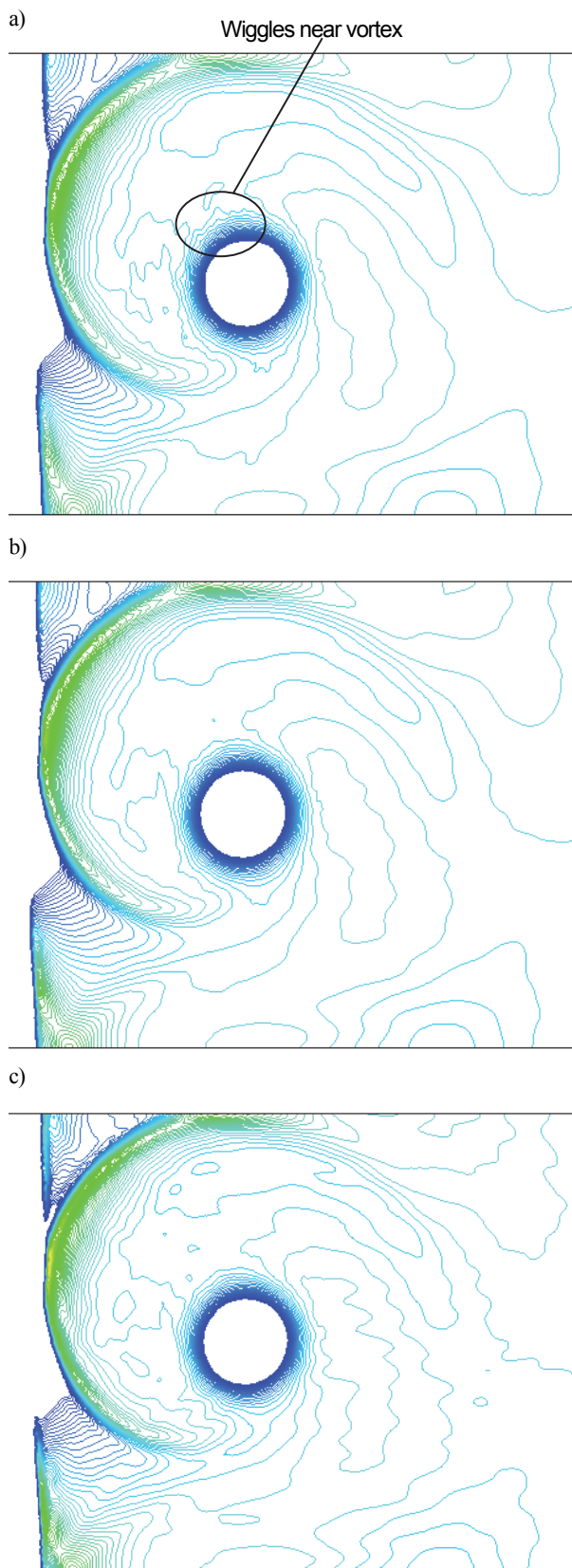


Fig. 12 Shock/Vortex Interaction (“Coarse” 62,364 triangular cells) (a) Least-Square + minmod, (b) Least-Square + minmod + Unstructured Post Limiter, (c) Least-Square + minmod + *Structured* Post Limiter

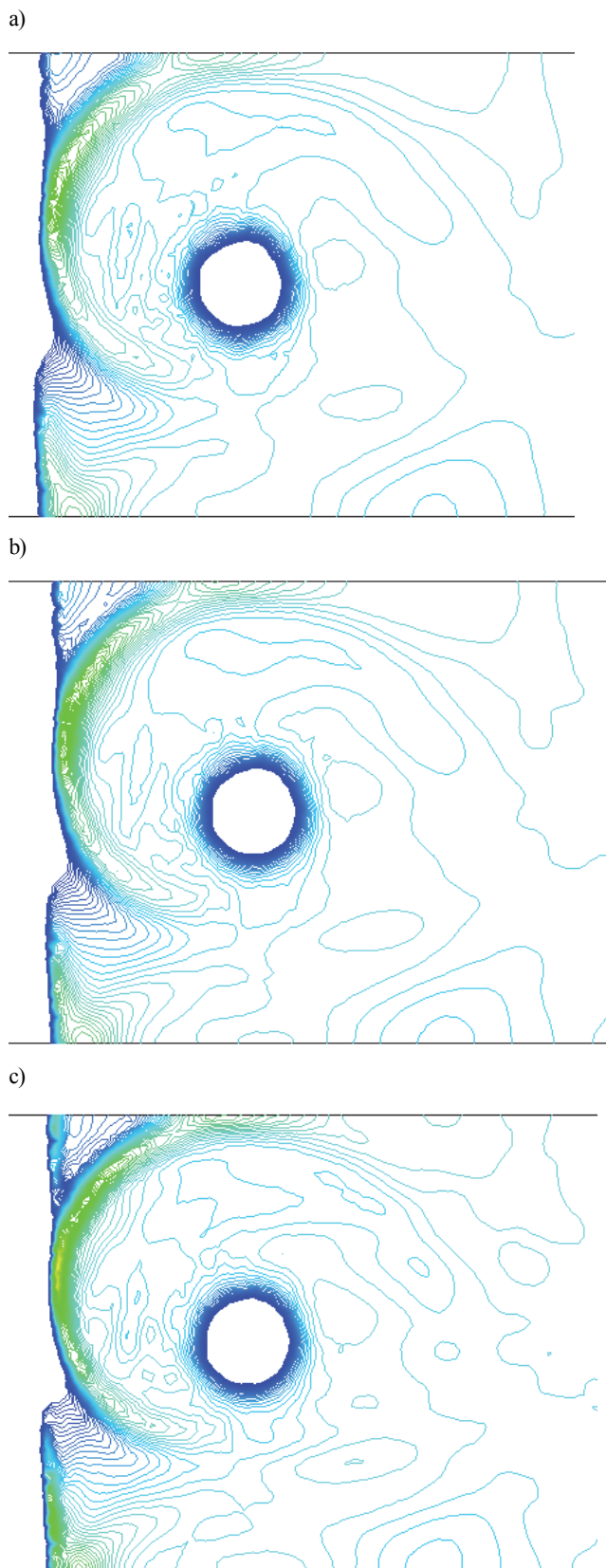


Fig. 13 Shock/Vortex Interaction (“Very Coarse” 15,676 triangular cells) (a) Least-Square + minmod, (b) Least-Square + minmod + Unstructured Post Limiter, (c) Least-Square + minmod + *Structured* Post Limiter.

る事が分かった。よって任意形状の非構造格子においても非構造格子ポストリミタの使用が推奨される。非構造格子ポストリミタで用いている「セル偏向角」はいかなるセル形状（四面体，ピラミッド，プリズム，六面体など）にも利用できるため，三次元への拡張も理論的には容易である。実用計算ではこれらのセル形状が混合したもの(mixed elements)⁽¹²⁾や高アスペクト比，面の交差やねじれを有するセル等も現れるが，それでも品質の良い六面体では 4x4x4=64 倍解像度，それ以外でも通常の制限関数を用いた場合と同等以上の解が得られるものと期待される。

5. まとめ

簡単に解像度の高いポストリミタ (*a posteriori* 制限関数) を 2 次元非構造格子に拡張した。

1. 構造格子で表現可能な正方形メッシュに対しては，非構造格子コードを用いた場合でもこれまでのポストリミタがそのまま適用できた。これにより，ポストリミタは非構造格子で用いられる Green-Gauss 法，最小二乗法，Venkatakrishnan 制限関数と言った方法とも組み合わせ可能である事が確認できた。
2. 一方で，非構造格子で代表的な三角形メッシュにおいては，ポストリミタにセル幾何形状を考慮したわずかな修正が必要であった（=非構造格子ポストリミタ）。ただしこの修正は依然，簡単かつ局所的であり，また修正版は 1 次元もしくは直交格子上ではオリジナルのポストリミタに帰着する。この非構造格子ポストリミタにより，
 - 構造格子用では扱えなかった三角形メッシュ上での計算を安定に行う事ができた。
 - また部分的にはあるが，小さな数値振動を除去する事ができた。

なお非構造格子用への修正には，具体的にはセル偏向角を用いた。これはあらゆるセル形状に適用可能である事から，上記の点を改良しつつ，今後は mixed elements や高アスペクト比や面の交差，ねじれを有する 3 次元非構造格子実用計算に適用する予定である。

謝辞

米国 National Institute of Aerospace の Hiroaki Nishikawa 博士には，(*a priori*) 制限関数を用いない計算について貴重な情報をいただいた。非構造格子の生成においては横浜国立大学大学院生の高濱俊匡氏の協力を得た。また本研究は(公財)中島記念国際交流財団の支援をいただいている。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- (1) Roe, P.L.: Characteristic-based schemes for the Euler equations, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **18** (1986): 337-365
- (2) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme, *J. Comput. Phys.* **14** (4) (1974): 361-370
- (3) Venkatakrishnan, V.: Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters, *J. Comput. Phys.*, Vol. 118, 1995, pp.120-130.
- (4) Godunov, S.K. (1954), *Ph.D. Dissertation: Different Methods for Shock Waves*, Moscow State University.
- (5) Clain, S., Diot, S., and Loubère, R.: A high-order finite volume method for systems of conservation laws—Multi-dimensional Optimal Order Detection (MOOD), *J. Comput. Phys.*, 230 (2011), pp.4028-4050.
- (6) Kitamura, K. and Shima, E.: Simple and Parameter-Free Second

- Slope Limiter for Unstructured Grid Aerodynamic Simulations, *AIAA Journal*, Vol. 50, No. 6, 2012, pp.1415-1426.
- (7) 北村圭一, 橋本敦: 高解像度流体計算に向けた *a posteriori* 制限関数, 第 28 回数値流体力学シンポジウム, C07-4, 2014.
- (8) 北村圭一, 橋本敦: 高解像度流体計算に向けた *a posteriori* 制限関数 (第 2 報): 2 次元への拡張と再構築法, 第 29 回数値流体力学シンポジウム, B04-5, 2015.
- (9) Mavriplis, D.J.: Revisiting the Least-Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes, *AIAA Paper* 2003-3986, 2003.
- (10) Luo, H., Spiegel, S., and Lohner, R.: Hybrid Grid Generation Method for Complex Geometries, *AIAA J.*, Vol.48 (2010), pp. 2639-2647.
- (11) Hashimoto, A., Murakami, K., Aoyama, T., Ishiko, K., Hishida, M., Sakashita, M., and Lahur, P.: Toward the Fastest Unstructured CFD Code 'FaSTAR', *AIAA-2012-1075*, 2012.
- (12) Hashimoto, A., Murakami, K., Aoyama, T., Yamamoto, K., Murayama, M., and Lahur, P.R.: Drag Prediction on NASA Common Research Model Using Automatic Hexahedra Grid-Generation Method, *Journal of Aircraft*, Vol. 51, No. 4 (2014), pp. 1172-1182.
- (13) Kitamura, K., Fujimoto, K., Shima, E., Kuzuu, K., and Wang, Z.J.: Validation of an Arbitrary Unstructured CFD Code for Aerodynamic Analyses, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, Vol.53, No.182, 2011, pp.311-319.
- (14) Kitamura, K., Nonaka, S., Kuzuu, K., Aono, J., Fujimoto, K., and Shima, E.: Numerical and Experimental Investigations of Epsilon Launch Vehicle Aerodynamics at Mach 1.5, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.50, No.4, 2013, pp.896-916.
- (15) Gnoffo, P.A.: Updates to Multi-Dimensional Flux Reconstruction for Hypersonic Simulations on Tetrahedral Grids, *AIAA* 2010-1271, 2010.
- (16) Diot, S., Clain, S., and Loubère, R.: Improved detection criteria for the multi-dimensional optimal order detection (MOOD) on unstructured meshes with very high-order polynomials, *Computers and Fluids*, Vol. 64, 2012, pp.43-63.
- (17) Diot, S., Loubère, R., and Clain, S.: The MOOD method in the three-dimensional case: Very high-order finite volume method for hyperbolic systems, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.73, 2013, pp.362-392.
- (18) Van Leer, B.: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, 1979, pp.101-136.
- (19) Kitamura, K. and Hashimoto, A., "Reduced dissipation AUSM-family fluxes: HR-SLAU2 and HR-AUSM⁺-up for high resolution unsteady flow simulations," *Computers and Fluids*, Vol. 126, 2016, pp. 41-57.
- (20) Daru, V., Tenaud, C.: Evaluation of TVD High-Resolution Schemes for Unsteady Viscous Shocked Flows, *Comput. Fluids*, Vol. 30, 2001, pp.89-113.
- (21) Kitamura, K. and Shima, E.: Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes, *J. Comput. Phys.*, 245 (2013), pp.62-83.
- (22) Park, J.S., Yoon, S.H., and Kim, C.: Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, 2010, pp. 788-812.
- (23) Yoon, S.-H., Kim, C., and Kim, K.H.: Multi-dimensional limiting process for three-dimensional flow physics analyses, *J. Comput.*

- Phys.* 227 (2008) 6001–6043.
- (24) Daru V. and Tenaud, C.: Numerical simulation of the viscous shock tube problem by using a high resolution monotonicity-preserving scheme. *Comput Fluids*, Vol. 38 (2009), pp.664–676.
- (25) Tenaud, C., Roussel, O., and Bentaleb, L.: Unsteady compressible flow computations using an adaptive multiresolution technique coupled with a high-order one-step shock-capturing scheme, *Comput Fluids* Vol. 120 (2015) pp.111–125.
- (26) Hu, X.Y., Wang, B. and Adams, N.A.: An efficient low-dissipation hybrid weighted essentially non-oscillatory scheme, *J. Comput. Phys.* Vol.301 (2015) pp.415–424
- (27) Sjögreen, B. and Yee, H.C.: Grid convergence of high order methods for multiscale complex unsteady viscous compressible flows, *J. Comput. Phys.* Vol.185, No.1 (2003) pp.1–26.
- (28) Jiang, G.S. and Shu, C.W.: Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.* Vol. 126 (1996) 202–228.