

## 単一球形気泡周りの軸対称計算と速度境界層のモデル化

### Axisymmetric simulation of flow around a spherical bubble and proposal of velocity boundary layer profile

- 楠野宏明, 静大院, 静岡県浜松市中区城北 3-5-1, E-mail: kusuno.hiroaki.17@shizuoka.ac.jp  
 真田俊之, 静大, 静岡県浜松市中区城北 3-5-1, E-mail: sanada.toshiyuki@shizuoka.ac.jp  
 Hiroaki Kusuno, Division of Environment and Energy Systems, 3-5-1 Johoku, Naka-ku, Shizuoka  
 Sanada Toshiyuki, Department of Mechanical Engineering, 3-5-1 Johoku, Naka-ku, Shizuoka

Various numerical, experimental and analytical work for bubble motion show that the wake which is generated by vorticity evacuated to the rear part of bubble affect bubble motion. Since the vorticity is generated on the bubble surface which is curved shear free surface, the numerical accuracy of velocity field on bubble boundary layer has important role in the flow field. We calculated axisymmetric flow around a spherical bubble using the vorticity-stream function formulation. It is shown that vorticity gradient on the bubble surface greatly affects the drag coefficient and also affects the tangential velocity at the bubble side unrelated to the drag coefficient. After guaranteeing numerical accuracy, we compared velocity distribution on the boundary layer obtained from the numerical calculation with that of previous study. The numerical results have larger perturbation velocity than the previous study results.

#### 1. 緒言

気泡周りの流れ計算では、気泡境界層の計算精度が計算結果に大きく影響を与える。これは、気泡表面で生成される渦度が気泡の抗力や気泡形状、3次元挙動に影響を与えるためである。

気泡運動を計算する際、一般に界面獲得法である Level Set 法<sup>(1)</sup>や VOF 法<sup>(2)</sup>、界面追跡法である Front Tracking 法<sup>(3)</sup>が用いられる。この際、計算精度の妥当性を保証するために用いるのは、実験もしくは境界適合格子の結果から得られた単一気泡の終端速度（抗力係数）や形状である。現在ではどの方法を用いても、精度よく抗力係数を求められる。一方で、揚力係数など小さい力は、境界適合格子のみが精度のよい結果を得ている<sup>(4)</sup>。これは、境界適合格子では格子が界面を形成するため、界面を鈍らせて計算を行う一般的な上記の方法に比べて、気泡境界層を精度よく計算できているからだと考えられる。したがって、計算精度の保証には、気泡の終端速度だけではなく、境界適合格子から得られた気泡境界層の速度分布と比較することが望ましい。しかし、気泡境界層の速度分布を示した例は少なく、著者が知る限りは Chen<sup>(5)</sup>が示したモデル式のみである。

境界適合格子を用いた場合でも、計算精度を確認する必要がある。Moore<sup>(6)</sup>の境界層理論によると、気泡の速度境界層の厚さはレイノルズ数を  $Re$  として  $O(Re^{-0.5})$  と非常に薄いため、計算格子は高解像度でなければならない。Blanco ら<sup>(7)</sup>は境界適合格子を用いて圧力-速度の NS 式を解き、計算精度を保証するためには境界層内に格子点が 3 点以上必要だとした。また、彼らは曲率を持つ自由界面付近での渦度の排出蓄積メカニズムは計算手法に非常に敏感であることを示した。気泡後方の定在渦は、渦度の排出と蓄積のバランスによって発生するとされる。彼らの結果と渦度-流れ関数法を用いた Dandy ら<sup>(8)</sup>の結果を比較すると、同  $Re$ 、同気泡アスペクト比にもかかわらず、定在渦の長さや定在渦が発生する渦度の値が異なった。彼らはこのように計算手法の違いによって異なる結果が得られる場合があるため、さらなる計算結果の比較が望ましいと提言した。

本研究では、気泡表面で生成される渦度を厳密に解くために渦度-流れ関数法を用いて軸対称球形気泡周りの流れを解く。数値解の結果から本研究で用いるアルゴリズムの精度を保証する。さらに、気泡境界層の速度分布を導出した後、Chen のモデル式を補正し数値計算結果に合うモデル式を提示する。

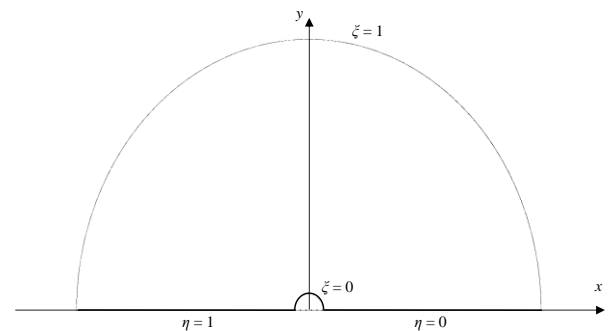


Fig. 1 Computational coordinate system.

#### 2. 計算手法

計算格子は直交曲線座標 (Fig. 1) を用いる。格子生成手法は Duraiswami ら<sup>(9)</sup>の手法を参照した。デカルト座標系の点  $(x, y)$  は直交曲線座標系の点  $(\xi, \eta)$  の間でラプラス方程式(1), (2)式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2)$$

ここで、 $h_\xi = [(\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial y / \partial \xi)^2]^{1/2}$ 、 $h_\eta = [(\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2]^{1/2}$  はスケール因子である。また、境界で直交条件(3)式を満たす。

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

なお本研究では、気泡表面付近の格子密度を増やすよう調整を行った。

基礎方程式は、曲率を持つ自由界面での渦度生成量を厳密に解くために渦度( $\omega$ )-流れ関数( $\Psi$ )NS 方程式を用いる。Ryskin ら<sup>(10)(11)</sup>に準じて、軸対称および直交曲線座標系の渦度-流れ関数法は(4), (5)式で表される。

$$\Delta(\omega h_\zeta) - \frac{Re}{2} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega}{h_\zeta} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega}{h_\zeta} \right) \right] = 0 \quad (4)$$

$$\Delta\Psi + \omega = 0 \quad (5)$$

ここで、 $h_\zeta = y$  である。ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \quad (6)$$

である。

境界条件 (Fig. 2) は次を満たす。対称軸上 ( $\eta=0, 1$ ) において、法線方向速度 0 及び渦度 0 を満たす。遠方 ( $\zeta=1$ ) では、流入条件 ( $0.5 \leq \eta \leq 1$ ) に  $u_\zeta=1$  の一様流、流出条件 ( $0 \leq \eta < 0.5$ ) に  $(\partial u_\zeta / \partial \zeta) = 0$ ,  $(\partial u_\eta / \partial \eta) = 0$  を与えた。気泡表面 ( $\zeta=0$ ) では、法線方向速度 0 及び、接線方向の応力 0 条件を満たす。接線方向の応力 0 条件は(7)式より求まる<sup>(12)</sup>。

$$\omega = 2\kappa_\eta u_\eta \quad (7)$$

ここで、 $\kappa_\eta$ ,  $u_\eta$  はそれぞれ  $\eta$  方向の曲率と速度である。

離散化手法は有限差分法、時間発展はルンゲクッタ/クランクニコルソン法を用いた。本計算は、 $Re$  の範囲を 50-1000 にて計算を行った。

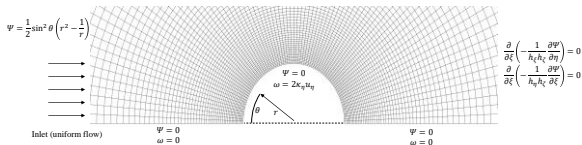


Fig. 2 Partial view with boundary conditions.

### 3. 計算精度

計算領域の影響を確認するため、 $Re = 50$ 、気泡表面の格子厚さ  $\delta = 0.021a$  の計算領域と抗力係数との関係を Fig.3 に示す。なお、本計算では低  $Re$  数ほど計算領域の影響を大きく受けていることを確認している。本研究では、計算領域は  $15a$  とした。計算領域  $20a$  と比較して抗力係数の差が 0.1%未満に収まる。

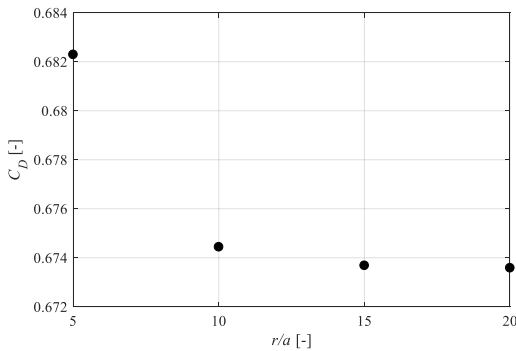


Fig. 3 Drag coefficient as a computational region ( $Re = 50$ ).

格子解像度の影響を確認するため、条件の厳しい、境界層が薄い高  $Re$  数である  $Re = 1000$  を条件に確認する。気泡表面格子厚さと抗力係数の関係を Fig. 4 に示す。差分精度は、境界では 2 次精度の片側差分、それ以外では 2 次精度の中心差分である。Fig. 4 より抗力係数が  $\delta$  に比例していることが分かる。しかしながら、 $\delta = 0.0036a$  と  $\delta = 0.0043a$  の抗力係数の差が 1%存在している。これは Blanco らが提唱した境界層内に 3 つ以上の格子点が存在すれば計算精度が保証されるという結果と異なり、本計算手法では 7-8 点存在しても抗力係数に明らかな差が生じる。

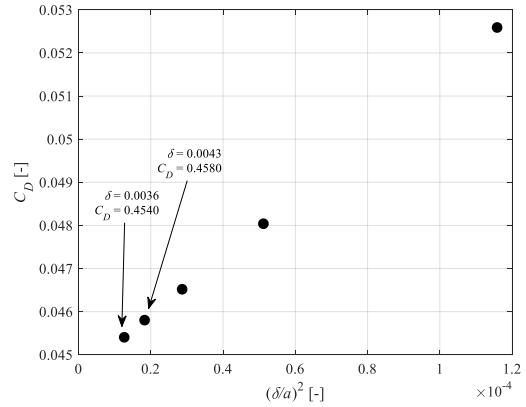


Fig. 4 Drag coefficient as a grid thickness ( $Re = 1000$ ).

Fig. 5 に気泡表面の動圧分布を、Fig. 6 に気泡表面の接線方向速度分布を示す。Fig. 5 より気泡前方の動圧分布が格子厚さによって異なることが分かるが、大きく異なることが分かるが、Fig. 6 より気泡前方の接線速度に差が見られない。動圧成分は(8)式より求まるため、本手法における動圧の差 (抗力係数の差) は、(8)式の第 2 項、気泡表面の渦度の勾配が大きく影響していると分かる。

$$P_{dy} = -u_\eta^2 + \int \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\zeta \omega) d\eta \quad (7)$$

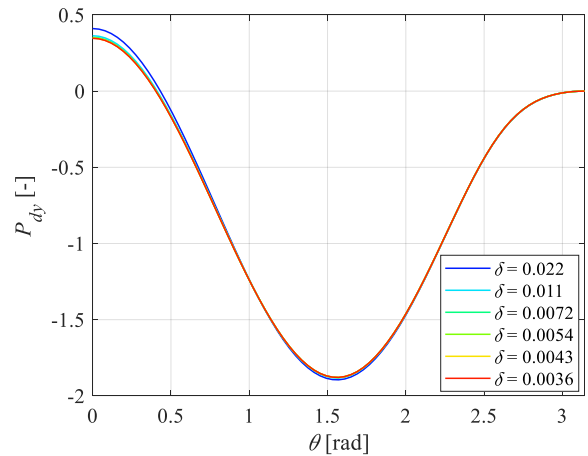


Fig. 5 Dynamic pressure on bubble surface ( $Re = 1000$ ).

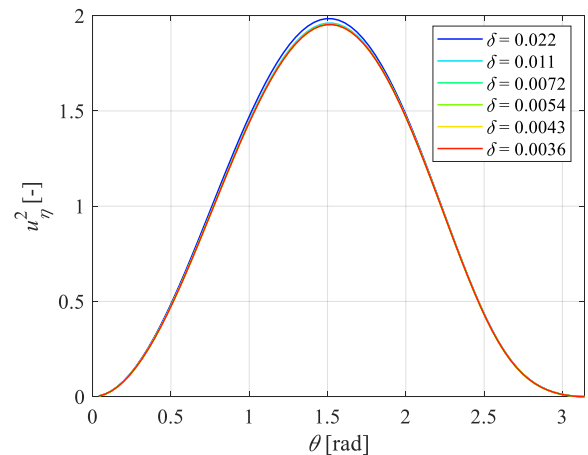


Fig. 6 Tangential velocity on bubble surface ( $Re = 1000$ ).

そこで、差分精度を境界では 4 次精度の片側差分、境界の隣の格子では 4 次の前進差分と後退差分を組み合わせたもの、それ以外では 4 次精度の中心差分にて計算を行った。Fig. 7 に抗力係数と差分精度および格子厚さの関係を示す。Fig. 7 より 4 次精度では抗力係数が  $\delta$  に比例しており、格子厚さを大きくとっても抗力係数の差が小さいことが分かる。

このことから、曲率を持つ自由界面での渦度輸送を解く場合には、界面の渦度勾配を厳格に解かなければ、結果が大きく変化することが分かる。気泡の計算において抗力係数を基準として精度を上げるには、次数を上げる、また気泡前方の格子厚さを小さくする必要がある。いずれも精度不足により抗力係数が大きく見積もられていることから、Ryskin らの計算より得られた抗力係数が Moore 解や Blanco らの結果に比べて抗力係数が大きく見積もられた原因は、格子が厚いもしくは次数が低かったことが原因ではないかと考えられる。また、Fig. 6 より格子厚さによって  $\theta \sim \pi/2$  の接線方向速度に差が見られる。この領域は抗力係数にほとんど影響を与えないため、計算精度を確認する際には抗力係数だけでなく速度分布の確認も必要である。本研究では、4 次精度の差分および、気泡表面の格子厚さ  $\delta = 0.0061a$  とした。格子厚さ  $\delta = 0.0036a$  と  $\delta = 0.0061a$  の抗力係数の差は 0.3% 未満である。

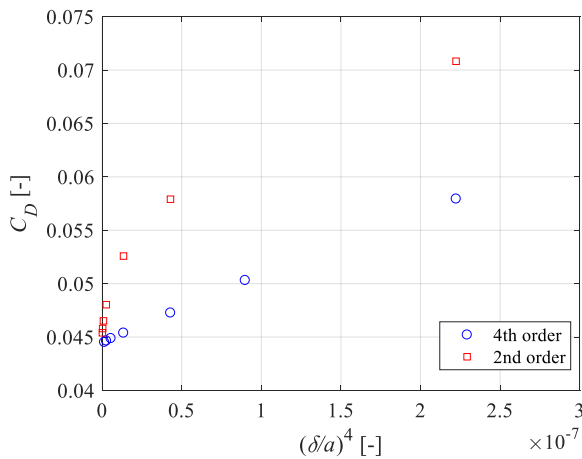


Fig. 7 Drag coefficient as order accuracy ( $Re = 1000$ ).

最後に、気泡表面を形成する格子点数を決定する。格子点数 61 では抗力係数に有意な差が生じ、格子点数 81 以上をとると、抗力係数に有意な差は生じないが、格子点数の増加に伴い後流領域の速度分布に差が見られたため格子点数を 161 とした。

#### 4. 気泡境界層速度分布

Fig. 8 に  $Re = 100$ , Fig. 9 に  $Re = 1000$  の  $\theta = \pi/2$  rad における接線方向速度分布を示す。Fig. 8, 9 より遠方では数値結果、Chen の式、ポテンシャル解が一致している。気泡表面に近づくにつれ数値結果及び Chen の式はポテンシャル解から遠ざかり、どちらも気泡表面付近での速度増加率がポテンシャル解と反対の符号を取る。また、数値結果のポテンシャル解からの速度減少量は Chen の式に比べて大きく、またその領域も広いことが分かる。本研究では、 $0 < \theta \leq \pi/2$  の領域かつ  $Re \geq 50$  において全てこの傾向を示している。

Chen の式を数値計算と合うように補正する。また、ここで行う補正は物理的な意味を介さないことに注意してほしい。ここで、境界層領域は接線方向速度がポテンシャル解の速度と 1% 以上差がある領域と仮定した。接線方向速度の摂動速度は Chen(25) より導出される。ここで、気泡表面の速度は  $(\beta/Re)^{1/2}$  に依存する。境界層領域は Chen より  $\text{ierfc}(Z) = \pi^{-1/2} \exp(-Z^2) - Z \text{erfc}(Z)$ ,  $Z = [(r-a)/a] / [2(\beta/Re)^{1/2}]$  より求まる。この 2 つの値を補正することで、Chen の

式と数値計算結果とを合わせた。詳細は、講演にて発表する。求めた値は Fig. 8, 9 より広い  $Re$  領域にて数値計算結果と良好な一致を示している。しかしながら、 $\theta > \pi/2$  においては Chen の式はもとより補正式と数値計算結果が合わなくなる。こちらについても今後検証していく予定である。

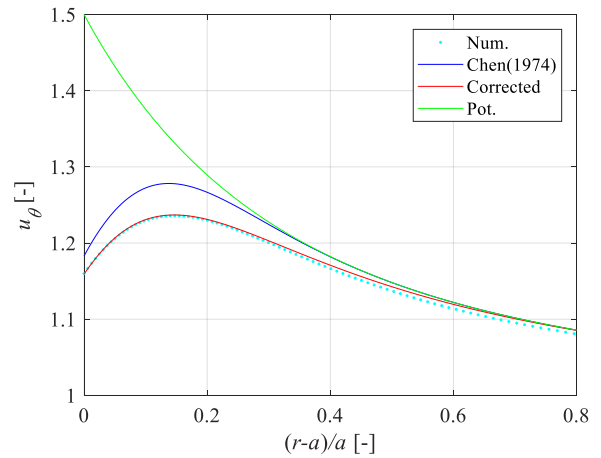


Fig. 8 Tangential velocity distribution ( $Re = 100, \theta = \pi/2$ ).

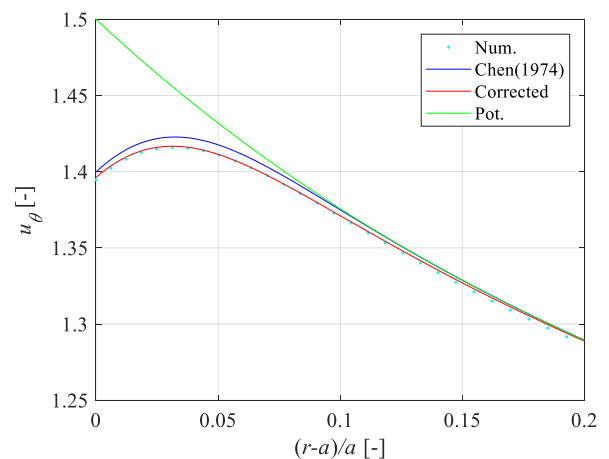


Fig. 9 Tangential velocity distribution ( $Re = 1000, \theta = \pi/2$ ).

#### 5. 結言

渦度輸送を厳密に解くために渦度-流れ関数法を用いて軸対称球形気泡周りの流れを計算した。本手法では、気泡表面の渦度勾配の精度によって、特に高  $Re$  において抗力係数に有意な差が見られる。また、抗力係数に差が生じる領域は主に気泡前方領域である。

数値計算結果および Chen の式は、どちらも気泡表面での接線方向速度の勾配がポテンシャル解とは逆符号になる。Chen の式は数値計算結果に比べてポテンシャル解からの摂動速度が少なく、またその領域も狭い。これらを補正し、数値結果と合うように式を補正した。しかし、後方よどみ点 (後流領域内) に近づくにつれ数値計算結果と式は合わなくなる。

#### 参考文献

- (1) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, P., "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow," J. Comp. Phys., 114.1 (1994), pp. 146-159.
- (2) Cano-Lozano, J. C. et al., "The use of volume of fluid technique to analyze multiphase flows: specific case of bubble rising in still liquids,"

- Appl. Math. Model, 39.12 (2015), pp. 3290-3305.
- (3) Tryggvason, G. et al., "A front-tracking method for the computations of multiphase flow," J. Comp. Phys., 169.2 (2001), pp. 708-759.
  - (4) Legendre, D. and Magnaudet, J., "The lift force on a spherical bubble in a linear shear flow," J. Fluid Mech., 368 (1998), pp. 81-126.
  - (5) Chen, J. L. S., "Growth of the boundary layer on a spherical gas bubble," J. Appl. Mech., 41.4 (1974), pp. 873-878.
  - (6) Moore, D. W., "The boundary layer on a spherical gas bubble," J. Fluid Mech., 16.2 (1963), pp. 161-176.
  - (7) Blanco, A. and Magnaudet, J., "The structure of the axisymmetric high-Reynolds number flow around an ellipsoidal bubble of fixed shape," Phys. fluids, 7.6 (1995), pp. 1265-1274.
  - (8) Dandy, D. S. and Leal, L. G., "Boundary layer separation from a smooth slip surface," Phys. fluids, 29.5 (1986), pp.1360-1366.
  - (9) Duraiswami, R. and Prosperetti, A., "Orthogonal mapping in two dimensions," J. Comp. phys., 98.2(1992), pp. 254-268.
  - (10) Ryskin, G. and Leal, L. G., "Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique," J. Fluid Mech., 148 (1984), pp. 1-17.
  - (11) Ryskin, G. and Leal, L. G., "Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid," J. Fluid Mech., 148 (1984), pp. 19-35.
  - (12) Lundgren, T. and Koumoutsakos, P., "On the generation of vorticity at free-surface," J. Fluid Mech., 382 (1999), pp. 351-366.