

AUSMV 型式解法の改良と数値不安定の回避について

Improvement of AUSMV-type Scheme with Healing of the Numerical Instabilities

○ 中森一郎, アドバンスソフト株式会社, 東京都千代田区神田駿河台 4-3, nakamori@advancesoft.jp
Ichiro NAKAMORI, AdvanceSoft Corporation, Kanda Surugadai 1-9-20 Chiyoda-ku, Tokyo, JAPAN

In order to obtain the stable analyses on the highly skewed computational cells, remedies on the unstructured mesh are developed based on the shock-fix method. Also, a flux splitting scheme is implemented to obtain the stable analyses for shock wave and the high-resolute analyses for contact discontinuity. These methods are applied to various types of problems in which both the square elements and the triangular elements are used for the fluid computation.

1. はじめに

超音速流れにおいて, 物体の前方に生じる離脱衝撃波に沿う方向にだけ格子の解像度が高くアスペクト比が大きい計算格子を用いると衝撃波の形状が壊れやすいことは Pandolfi⁽¹⁾らによって示されている通りであるが, 格子アスペクト比がカーバンクル現象に関与することは, 単にスキームの脆弱性と関係があることだけに留まらず, このことは CFD を利用する側にとって些か難儀な問題である. 例えば, 離脱衝撃波に外側から別の衝撃波を突入させて衝撃波と衝撃波の干渉を計算する際には離脱衝撃波に沿う方向に或る程度の格子解像度を確保しなければならず, そのような場合には衝撃波と衝撃波干渉を解析する以前に数値的なカーバンクルによって衝撃波面が崩壊する危険性がある. また, 衝撃波面に格子線が沿うようにすることで風上法が上手く機能し, 衝撃波面がシャープに捕らえられることは経験的に知られているが, 三角形や四面体などを含む非構造格子系を適用する場合は, 衝撃波面と格子線の成す角度が大きく数値的な拡散も強い. そればかりかその影響により生じる衝撃波背後の諸量のばらつきが発端となって衝撃波面と物体の間の亜音速領域でそれらの擾乱が成長し, 空力加熱のような温度微分に関わる分布に対して看過し得ないような影響を及ぼす可能性もある.

本報告では, こうした計算格子に由来するカーバンクルの発生を抑えることと, 三角形要素のような形状を含む計算格子上でも安定した計算手法を得ることを目的として, AUSMV タイプの手法の改良と適用結果について述べる.

2. 数値解法

支配方程式は下記の圧縮性 Navier-Stoke であり, 非粘性流れを扱う際は粘性項を省略している.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dv + \sum_k [E(Q) - E_v(Q)] S_k = 0 \quad (1)$$

ここで Q は解ベクトル $Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)$ であり, ρ は密度, u, v, w は速度成分を表し, e は単位体積当たりの全エネルギーを表す. また, 圧力は理想気体に従うものとして扱う.

さらに, 非粘性流束項については

$$E(Q) = T^{-1} T E(Q) = T^{-1} F(Q) \quad (2)$$

として $F(Q)$ を扱うこととする. セル境界に直交する軸を一つ持つ座標系での流束表現は, その局所直交座標系での速度成分 u_n, u_t , および u_m を使用して表現すれば下記ようになる.

$$F(Q) = (\rho u_n, \rho u_n^2 + p, \rho u_n u_t, \rho u_n u_m, \rho u_n H)^t \quad (3)$$

ここで H は $H = (e + p) / \rho$ である. また, T は以下のようなデカルト座標と局所直交座標との間の回転による変換を表す行列を内部に持つ行列であり, $(n_x, n_y, n_z)^t$ はセル境界に垂直な単位ベクトルを表す. また, $(l_x, l_y, l_z)^t$ と $(m_x, m_y, m_z)^t$ は互いに直交し, $(n_x, n_y, n_z)^t$ と $(m_x, m_y, m_z)^t$ も直交する単位ベクトルを表す.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & l_x & l_y & l_z & 0 \\ 0 & m_x & m_y & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

なお, 空間 2 次精度とするために以下のような制限関数付きの MUSCL 補間⁽³⁾を用いており, ことわりの無い限り制限関数には minmod 関数を用いた.

$$Q_{i,k} = Q_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta}_i, \quad (5)$$

$$\bar{\Delta}_i = \text{minmod}(\Delta_i, Q_j - Q_i)$$

Δ_i はセル中心 i からみてセル境界 k と反対側の位置で評価される Q_i との差である. これを本稿では MUSCL-TVD と称している. なお, 時間積分に関しては, 定常解を得ることを目的とする場合には LU-SGS 法⁽⁴⁾を用い, 非定常問題を扱う場合には Euler 陽解法か TVD-Runge-Kutta⁽⁵⁾を用いており, いずれの時間積分法を用いたかは扱う問題ごとに記述する.

3. Shock-fix 法

Pandolfi ら⁽¹⁾によれば Roe⁽¹³⁾の finite difference splitting(FDS)や AUSM⁽¹⁴⁾, AUSM+⁽¹⁵⁾, AUSMV⁽⁸⁾, AUSMD⁽⁸⁾, HLLC⁽¹⁰⁾といった接触面や境界層に対して数値粘性の少ない衝撃波捕獲スキームは, 空間 1 次精度で使用する場合でさえも, 衝撃波に沿う方向に解像度が高い格子上では全てカーバンクルを生じることが分かっている. 例えば, Fig.1 の説明で後述するように, 周方向の格子数が大きいほどカーバンクルが出現しやすい. カーバンクル対策として提示されている様々な手法のうち, Wada⁽⁸⁾らの Shock-fix 法や, Pandolfi らによる方法は, 構造格子の配置を前提にしているものの, 衝撃波に沿う方向に横波が伝播しづらくさせることを意図してその方向にだけ散逸的なスキームを適用する, もしくは散逸項を付加してカーバンクルを抑制しようとする手法と考えられる. Shock-fix 法の実際をさらに見ていくと, 例えば, Fig. 1 には計算格子と $M=20$ の非粘性極超音速流の解析結果を示しており, 周方向に 320 分割, もう一つの方向に 20 分割とした計算格子⁽¹⁾を用いている. ここでは時間積分に LU-SGS を用いて CFL=1.0 とし, MUSCL-TVD 補間の空間 2 次精度とした AUSMDV を使用し, Shock-Fix を担うスキ

ームに Hanel⁽¹¹⁾の Flux Vector Splitting(FVS)スキームを用いている。Hanel の FVS スキームを 1 次精度で使用する場合と 2 次精度 MUSCL-TVD を適用する場合で比べると、後方でカーバンクル現象を被ることが Fig. 1(c)からわかり、散逸性の高い 1 次精度で Hanel の FVS スキームを使用するほうが Shock-Fix のツールとして推奨すべきと考えられる。

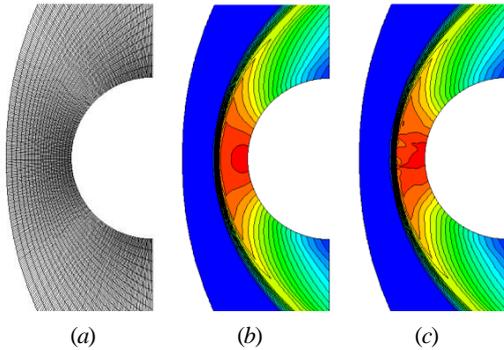


Fig. 1 Density contours solved by AUSMDV with MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 20 by using 320x20 grid system. (a)grid, (b) SF with 1st order Hanel's FVS, (c) SF with 2nd order Hanel's FVS

しかしながら、周方向の格子数を 320 分割から 640 分割に増加させ、もう一つの方向は 20 分割のままとした計算格子では、1 次精度の Hanel の FVS を Shock-Fix のツールとして用いても上手くいかないことがわかる(Fig. 2)。これは、激み流線を横断する方向に数値粘性が一層掛かりにくい状況となるためであって、さらに安全なカーバンクル対策を講じる必要がある。

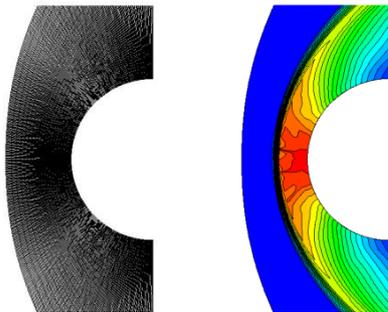


Fig. 2 Hypersonic inviscid flow solved by AUSMDV with MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 20 by using 640x20 grid system(density contours). Grid(left) and SF with 1st order Hanel's FVS(right) results.

また、オリジナルの Shock-Fix 法⁽⁸⁾は構造格子のデータ点の取り方を前提としているため非構造格子では用いづらい。このため、衝撃波を跨ぐ方向とそれ以外の方向を区別せずに衝撃波検知を単純化し、三角形要素のような非構造格子でも適用が可能な手法を考えることとする。圧力勾配を用いて衝撃波位置を検知しそのセルの周囲に目印を付ける方法とした。検知方法は幾つか考えられるが、具体的には(6)式のように実施した。

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega'_i \leq 0.2 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{where } \omega_k = |p_i - p_j| / \min(p_i, p_j), \quad \omega'_i = \max(\omega_k(i))$$

(6)式では、まず計算セル*i*と*j*で挟まれた面*k*で圧力差の情報を格納しておく。次に、これらの圧力差情報から、計算セル*i*を囲

む面*i(l)*の中から最大値を選択し、計算セル*i*毎に ω_i を格納する。ただし、衝撃波以外の圧力勾配情報を除外することを目的として閾値 (=0.2) 以下は ω_i をゼロとしている。後述するように衝撃波内部とその近傍で1次精度とし、それ以外は通常の MUSCL-TVD を適用することを想定しているが、これらの切り替えが極端であると定常解への収束が悪くなるため、 $\omega_i = 1$ と始めに印を付けられた場所の ω_i の値は変更せずに ω_i の分布を緩和させた。また、緩和の過程は以下の1セット2段回の漸化式のように表され、そのセットの繰り返し数は、特に記載が無い場合はn=10回とした。LU-SGS 陰解法や Euler 陽解法を用いる場合には、この工程を各タイムステップで実行するが、3段階の Runge-Kutta 時間積分を適用する場合は、1タイムステップ進める間の各々の Runge-Kutta ステージでこの工程を実行することとした。

$$\omega_i(n+1/2) = \frac{1}{2} \omega_i(n) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \max_k [\omega_k(i)(n)] + \frac{1}{2} \min_k [\omega_k(i)(n)] \right\} \quad (7)$$

$$\omega_i(n+1) = \begin{cases} \omega_i(n) & \text{if } \omega_i(n) = 1 \\ \max(0, \min(1, \omega_i(n+1/2))) & \text{else} \end{cases}$$

ここで添え字*k(i)*は計算セル*i*と面を共有する計算セル全てを表す。このようにして得た ω_i を用いて、セル番号*i*と*j*で挟まれたセル境界*k*のフラックスは以下のように dissipative なスキームへ強制的に差し替えるようにする。

$$f_k = \begin{cases} f_{k,dissipative} & \text{if } \omega_i > 1.E-5 \text{ or } \omega_j > 1.E-5 \\ f_{k,non-dissipative} & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

$f_{k,dissipative}/non-dissipative$ については次章で述べる。また、散逸性の高い空間1次精度のスキームを衝撃波周囲に配置するほうが有利であることは Fig. 1 のところで述べた通りであり、そのことを踏襲するため、(8)式による dissipative なスキームへの差し替えと並行して(5)式に示した MUSCL 内挿式を次のように変更する。

$$Q_{i,k} = Q_i + \frac{1}{2} [1 - \max(\omega_i, \omega_j)] \bar{\Delta}_i \quad (9)$$

(9)式では、セル境界を挟むセル中心の ω_i もしくは ω_j がゼロ以上の値を持つ場合は、TVD 制限関数に関係なく空間精度を1次精度に近づけることを意図している。上記の(6)~(9)式の手順を Shock-Fix2(SF2)と表記し、これ以降では Shock-Fix⁽⁸⁾とは区別して用いることとする。

4. 風上法の改良

SF2により検知した計算セルにおいて使用する数値流束は、衝撃波面に沿う方向の運動量に対して強い散逸効果を持ち、衝撃波捕獲に優れ、定常衝撃波に対してエンタルピーの保存性が良いことが望ましい。これらの性質を併せ持つ FVS 法は和田⁽²⁾によって提案されており、本報告においてはこれを FVS-W と表記し、SF2と併用し $f_{k,dissipative}$ として用いることとする。FVS-W は以下のように記述される。

$$\begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n u_t \\ \rho u_n H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_L u_{nL}^+ + \rho_R u_{nR}^- \\ \rho_L u_{nL} u_{nL}^+ + \rho_R u_{nR} u_{nR}^- + p^+ + p^- \\ \rho_L u_{tL} u_{nL}^+ + \rho_R u_{tR} u_{nR}^- \\ \rho u_n H = \rho_L H_L u_{nL}^+ + \rho_R H_R u_{nR}^- \end{pmatrix} \quad (10)$$

ここで添え字 l は(3)式の l または m に相当する. また, FVS-W における u_n^\pm と p^\pm は次式で表される⁽²⁾.

$$u_n^\pm = \pm \frac{c(1-f^\mp M_n)}{f^+ - f^-}, p^\pm = \frac{p}{c} f^\pm u_n^\pm, \quad (11)$$

$$f^\pm = -\gamma M_n \pm \sqrt{(\gamma^2 - 1)[M_n^2 + 2/(\gamma - 1)]}$$

ここで $M_n = u_n / c$ であり, セル境界に垂直方向の速度成分を音速で除した値を用いる. また, γ は比熱比であり理想気体の場合は $\gamma = \rho c^2 / p$ で諸量と結び付けられ, 反応気体を扱う際には, 密度, 音速, 及び圧力から形式的に定義して用いることができる.

衝撃波から離れた領域は SF2 (FVS-W) の適用外となり, スキームには $f_{k, non-dissipative}$ が適用される. そこでは, 移動接触不連続面, スリップライン, および境界層に対する精度の確保が必要である. また, FVS-W と速度分割と圧力分割法が類似した形式であるほうがスキームの切り替え時に不都合が少ないと考え, FVS-W に立脚した AUSM-V タイプのスキームを用意する. まず, FVS-W の質量流束を圧量依存項とそれ以外に分類して書き換えておく.

$$\rho u_n = (\rho u_n)^+ + (\rho u_n)^-$$

where

$$(\rho u_n)^+ = \rho_L c_L (\lambda_1^+ / c)_L + \frac{1}{2} (p/c)_L [(\lambda_2^+ + \lambda_3^+ - 2\lambda_1^+) / c]_L \quad (12)$$

$$(\rho u_n)^- = \rho_R c_R (\lambda_1^- / c)_R + \frac{1}{2} (p/c)_R [(\lambda_2^- + \lambda_3^- - 2\lambda_1^-) / c]_R$$

ここで添え字の L と R はそれぞれセル境界の左側と右側を表し, 空間 1 次精度の場合は $L=i, R=j$ であり, MUSCL-TVD 補間を用いる場合はその補間値が入ることを表す. また, u_n が定義されるのと同方向での運動量流束は FVS 形式で次のように記述される.

$$\rho u_n^2 + p = (\rho u_n^2 + p)^+ + (\rho u_n^2 + p)^-$$

where

$$(\rho u_n^2 + p)^+ = (\rho u_n)^+ (u_n)_L + \frac{1}{2} p_L [(\lambda_2^+ - \lambda_3^+) / c]_L \quad (13)$$

$$(\rho u_n^2 + p)^- = (\rho u_n)^- (u_n)_R + \frac{1}{2} p_R [(\lambda_2^- - \lambda_3^-) / c]_R$$

セル境界面の接線方向の運動量流束とエネルギー流束も同様に書ける.

$$\begin{pmatrix} \rho u_n u_t \\ \rho u_n H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(\rho u_n)^+ u_t]_L + [(\rho u_n)^- u_t]_R \\ [(\rho u_n)^+ H]_L + [(\rho u_n)^- H]_R \end{pmatrix} \quad (14)$$

ここで λ_i^\pm は, FVS-W に対応させると以下の形式を持つ.

$$\lambda_1^\pm = u_n p^\pm / p$$

$$\lambda_2^\pm = p^\pm / p [u_n (1 - \rho c^2 / p) + c] + (\rho c^2 / p) u_n^\pm \quad (15)$$

$$\lambda_3^\pm = p^\pm / p [u_n (1 - \rho c^2 / p) - c] + (\rho c^2 / p) u_n^\pm$$

これらの λ^\pm は, 保存則に関連する拘束条件 $\lambda^+ + \lambda^- = \lambda$ を満たす. (15)式を(12)式と(13)式に代入し, (14)式と併せて FVS-W が構成できるが, この手順では未だオリジナルの FVS-W から逸脱していない. 一般に FVS 法は接触不連続面に対して過大な数値粘性を含む. これを是正することを目的として, 数値流束が接触不連続面に対して適切な値となるようになるべく変更点の少ない設計を考えると, セル境界を跨いで接触不連続面が存在する際, つまり圧

力差と面を跨ぐ速度差が無く $p_{L/R} \rightarrow p, (u_n)_{L/R} \rightarrow u_n$ のとき, $c_{L/R} \rightarrow (c_i + c_j) / 2, (\lambda_i^\pm)_{L/R} \rightarrow (u_n \pm |u_n|) / 2$ と変更し, セル境界面の接線方向の運動量流束とエネルギー流束を AUSM のように質量流束の向きで定義し直せば良い⁽¹²⁾. そこで, これらの変更に関し, 次のように圧力場の情報を有する重み係数 s で定義を切り替える形式を用いた.

$$c_{L/R}^{new} = s c_{L/R}^{old} + (1-s)(c_i + c_j) / 2$$

$$\lambda_i^\pm = s f^\pm u_n^\pm M_n + (1-s)(u \pm |u|) / 2 \quad (16)$$

ただし, セル境界の両側の音速 $c_{L/R}^{old}$ はセル中心の音速 $c_{i/j}$ を使用することで計算を簡便化して用いた. また, セル境界面の接線方向の運動量流束とエネルギー流束は以下のように表せる.

$$\rho u_n u_t = s [(\rho u_n)^+ (u_t)_L + (\rho u_n)^- (u_t)_R]$$

$$+ (1-s) \left[\frac{1}{2} (\rho u_n) ((u_t)_L + (u_t)_R) - \frac{1}{2} |\rho u_n| ((u_t)_R - (u_t)_L) \right] \quad (17)$$

$$\rho u_n H = s [(\rho u_n)^+ H_L + (\rho u_n)^- H_R]$$

$$+ (1-s) \left[\frac{1}{2} (\rho u_n) (H_L + H_R) - \frac{1}{2} |\rho u_n| (H_R - H_L) \right]$$

重み係数 s は, AUSMDV⁽⁸⁾ の AUSMD と AUSMV の切り替え方を参考にして圧力分布を拠り所として決定した. ただし, セル境界を挟んだ無次元化された圧力差の絶対値が ε を下回るころでは下記のように $s=0$ となるようにした.

$$s = \min \left[1.0, K \cdot \max \left(0, |p_i - p_j| / \min(p_i, p_j) - \varepsilon \right) \right] \quad (18)$$

ここでは $\varepsilon = 10^{-10}$ と $K = 10$ と設定して以下の計算で用いている. 以上の(12)式から(18)式までの手順で得られる風上法を, 本報告においては AUSM-V modified (AVM) と仮称し, 先に述べた SF2 法 (1 次精度 FVS-W で用いる) と併用する手法を AVM+SF2 と記述して以下で用いることとする. この手法を Fig. 2 と同一の問題に適用し, AVM+SF2+MUSCL-TVD で解いた結果を Fig. 3a に示す. 等高線からは密度分布の歪みは見られず正常に解けていることが確認できる. また, FVS-W と MUSCL-TVD を組み合わせるだけでは上手くいかず, TVD 的なメカニズムだけで安定な解を得ることは難しいことが窺える. このことは, 比較的頑丈とされる HLLE を用いた場合でも同様であった (Fig. 3c). これらのことから, 衝撃波に沿う方向だけ解像度が高く, 且つアスペクト比の大きな計算

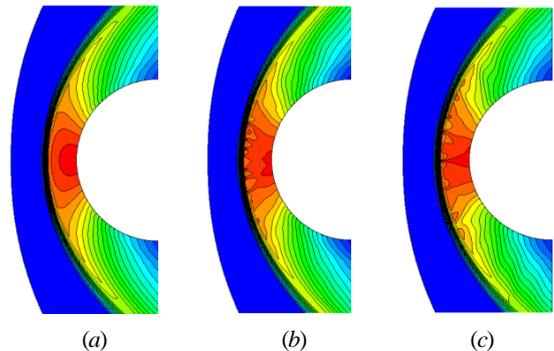


Fig. 3 Hypersonic inviscid flow solved with SF2 and MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 20 by using 640x20 grid system (density contours). (a)AVM+SF2+MUSCL-TVD, (b)FVS-W+MUSCL-TVD, (c)HLLE+MUSCL-TVD

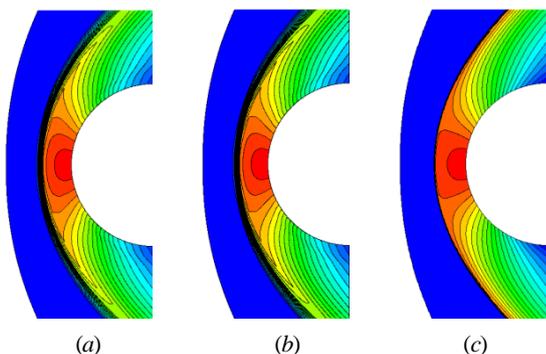


Fig. 4 Hypersonic inviscid flow solved with AVM+SF2 +MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 20(density contours).
(a)1280x20 cells, (b)2560x20 cells, (c)320x160 cells.

格子を使用せざるを得ない場合は、衝撃波の周囲に SF2 のような何らかの対策が必要と考えられる。

四角形要素を用いた検証として、さらに格子のアスペクト比を歪ませる場合と、通常のアスペクト比のまま格子サイズを小さく採った場合の計算を実施した。計算格子の要素数は 1280x20 と 2560x20, ならびに 320x160 を用い、上記で扱った同じ流れの条件を設定した。Fig. 4 にその結果を示しており、不安定はいずれの場合も現れないことが確認できた。

次に、流れの条件(M=20)を同一のままとし、要素数は約 25,000 の三角形要素を用いた計算を実施した。空間精度は MUSCL-TVD により最大 2 次精度とした。Fig. 5 に計算要素と密度コンター、及び激み流線上の密度分布を示す。計算セルの形状は歪みが偏らないような標準的な形状を用いている。SF2 のような手当てを用いない場合は、式(18)で K=10 とした AVM スキームでも僅かにカーバンクルに遭遇し、衝撃波背後から激み点に向けて密度が上昇しきらないのが見てとれる(Fig.5d)。比較のために AVM(K=0)と AUSMDV、及び SLAU⁶⁾の結果も示しており、AUSM 型スキームでもカーバンクルを起こすことが分かる(Fig. 5e~Fig. 5g)。これらの事柄から、衝撃波と物体表面に挟まれた亜音速領域において完全に AUSM 系のスキームとするよりも、(16)式や(17)式のような手順により散逸的な FVS の性質を残すほうが若干有利であると考えられる。また、衝撃波面に沿う方向には圧力勾配が比較的弱く、(18)式のようにセル境界を跨ぐ圧力情報のみでは衝撃波面に沿う方向に適用する計算スキームを散逸的なスキームへ切り替えさせることが難しい。このため、SF2 のような多方向の圧力情報を考慮した手当てを講じるほうが、より確実に安定した解を得ることができると考えられる。なお、式 (7) に示した ω_i の分布は Fig. 6 のように可視化され、圧力分布を利用した衝撃波の検知が 4 角形要素の場合 (Fig. 6 left) でも 3 角形要素の場合 (Fig. 6 right) でも正しく実施されていることが見てとれる。また、式 (7) の反復数 n が $n=10$ の場合を示しており、flag の値が 0 から 1 へと連続的に変化するような分布としている。この反復数 n の値の決定については、次章の斜め衝撃波の検証例であらためて述べる。

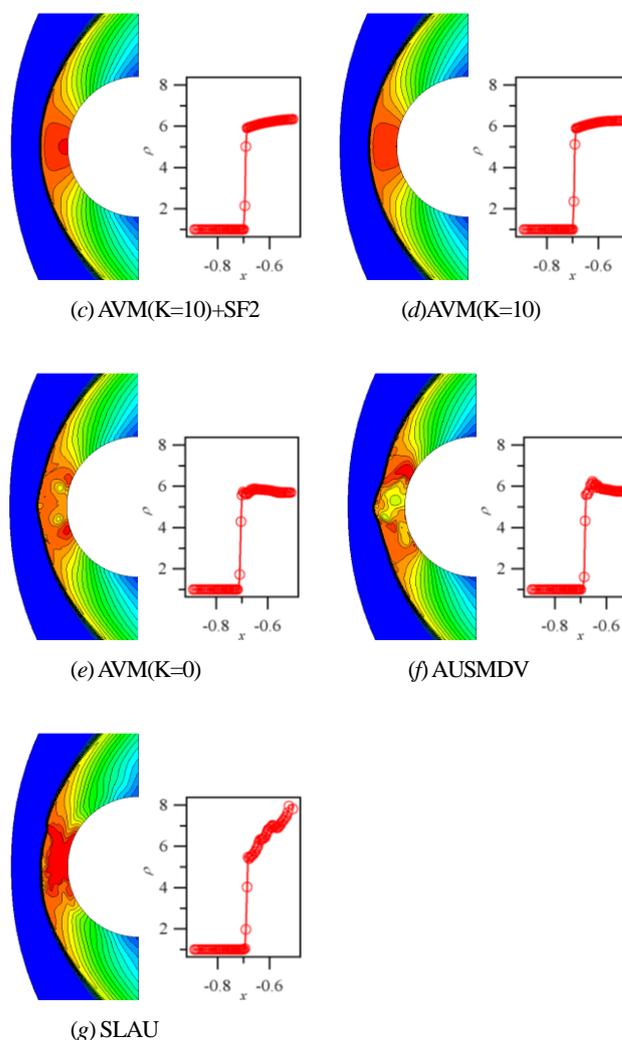
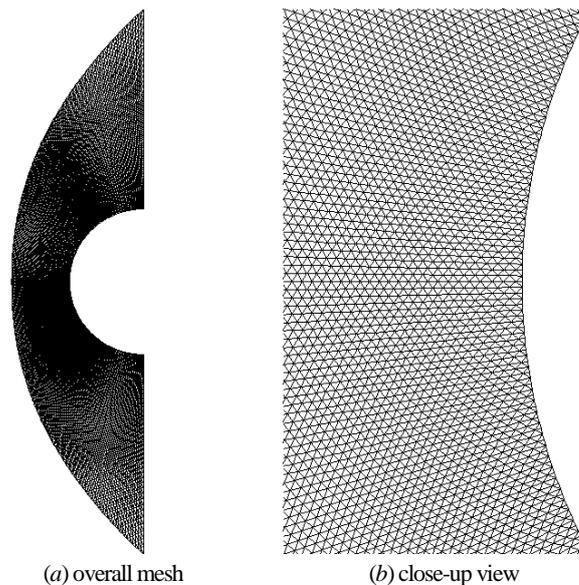


Fig. 5 Hypersonic inviscid flow around a cylinder at free stream Mach 20 with MUSCL-TVD on the unstructured mesh(density contours and profiles on the stagnation streamline).

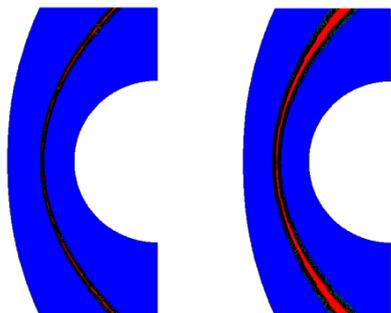


Fig. 6 Hypersonic inviscid flow solved by AVM+SF2 with MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 20(shock detecting flag ω_i contours). Left is 320x160 grid system, and right is unstructured mesh(approximately 25,000 triangular elements).

4. 検証例

上記に述べた経緯で構築された解析手法 (AVM+SF2) を種々の基本的な検証問題に対して適用し, 必要に応じて他の解析手法との比較を示しながら, それぞれの計算結果について以下に記述する.

4.1 1次元定常衝撃波

SF2 を適用時に和田⁽²⁾の FVS の性能が保持されることを検証することを目的として, 上流側のマッハ数 $M=25$ の 1 次元定常衝撃波問題⁽²⁾を AVM+SF2 により計算して結果を検討した. 等間隔に 100 点の計算格子を用い, 50 番目以前と 51 番目以降のそれぞれに衝撃波の前後の量を初期値として与え, LU-SGS で CFL=0.5 として定常解を得た. 空間 1 次精度と MUSCL-TVD 法による 2 次精度の場合について, 衝撃波上流の状態が無次元化した数値をそれぞれ Table 1 と Table 2 に示す. いずれの場合も衝撃波は完全に 4 点で捕獲されることが確認された. また, トータルエンタルピーが定常流で保存される性質は AUSM 系のスキームと接続する上で矛盾が無いはずであり, この検証問題においては衝撃波前後でトータルエンタルピーが一定値で保たれることを確認した.

4.2 1次元非定常接触不連続面

移動する接触不連続面の捕獲性能を比較検討することを目的として 1 次元非定常接触不連続面の計算を実施した. 初期条件については, 文献(8)に倣い, 領域の中心から右側が $(\rho, p, u)_R = (10, 1.0, 0.3c_R)$ とし, 左側が $(\rho, p, u)_L = (0.125, 1.0, 0.3c_R)$ となるように等間隔な 30 個の計算セル上に配置した. 時間刻みは CFL=0.45 で決定し, 空間精度は 1 次精度とし, Euler 陽解法を用

Table 1 Density and total enthalpy distributions near the 1-D steady shock(1st order scheme with SF2 was used).

Cell number	Density	Total enthalpy
47	1.0000000000	1.0000000000
48	1.0000000000	1.0000000000
49	1.0000000000	1.0000000000
50	1.89057587197	1.0000000000
51	5.53073958311	1.0000000000
52	5.95238095238	1.0000000000
53	5.95238095238	1.0000000000
54	5.95238095238	1.0000000000

Table 2 Density and total enthalpy distributions near the 1-D steady shock (MUSCL-TVD with SF2 was used).

Cell number	Density	Total enthalpy
47	1.0000000000	1.0000000000
48	1.0000000000	1.0000000000
49	1.0000000000	1.0000000000
50	1.89157966681	1.0000000000
51	5.53167596612	1.0000000000
52	5.95238095238	1.0000000000
53	5.95238095238	1.0000000000
54	5.95238095238	1.0000000000

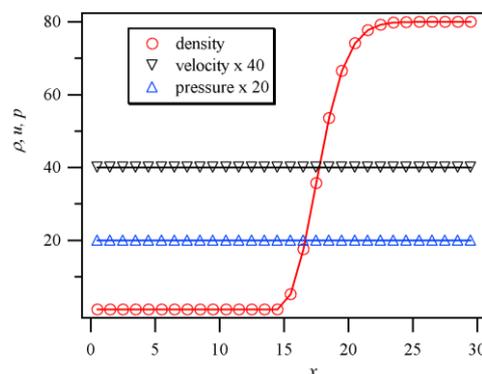


Fig. 7 Moving contact discontinuity solved by AVM+SF2 and Roe's finite difference splitting(FDS) with first-order in space. The line shows the numerical solution by the FDS scheme.

いて 200 ステップ進めた結果を Fig.7 に示す. 初期値の左端の量で無次元化した密度, 速度, および圧力を示している. この問題では, 圧力場が正しく解かれている限りにおいては, SF2 の有無は無関係となる. 比較のため Roe⁽¹³⁾の FDS による数値解を実線で示す. FDS は近似リーマン解法であり, 計算セルのセル境界を過ぎる速度の垂直成分と圧力が等しい場合は, そのセル境界における接触面に関する厳密解を数値流束に対して与えるので, FDS と AVM+SF2 の結果がほぼ一致するという事は, 移動する接触面に対して余計な数値粘性が発生しにくいと考えられる.

4.3 2次元移動衝撃波問題

比較的長い流路を移動する衝撃波に適用することを想定する場合, 格子の歪みが起因となって衝撃波面が崩壊するようなことは避けなければならない. そのことを確認するため, 先ず Quirk⁽⁷⁾の提示した 2次元移動衝撃波問題に本スキームを適用し検討し, 流れは非粘性で移動衝撃波のマッハ数 $M_s = 6$ を扱った. 空間精度は 1 次精度とし, CFL=0.5 として時間刻みを決定し, Euler 陽解法を用いた. 計算セルは 1 辺の長さが 1 の正方形であり, 流れ方向 (x 方向)に 800 個, 初期の衝撃波に沿う方向(y 方向)に 20 個を配置した. ただし, 文献(1)で述べられているように, スキームの脆弱性を強調することを目的として, 文献(7)において $\Delta y = \pm 10^{-6}$ と設定されているに比べて, $\Delta y = \pm 10^{-3}$ の大きな擾乱をセンターライン上の格子点座標に与えた. SF2 のような手当てを適用しない場合が Fig. 8(a)~(c)であり, 程度差は在るにせよ, SLAU,

AUSMDV, AVM のいずれも衝撃波面に不安定性が見られることが分かり、衝撃波面に沿う方向の擾乱を衝撃波近傍で散逸させる SF2 手法は移動衝撃波のケースにおいても有効であることが確認できた。さらにメトリックによる擾乱が至る所で無視できないような場合を想定しつつ検討することを目的として、三角形要素を用いて調査した。流れの諸条件は同一とし、底辺の長さが2の直角三角形要素(Fig. 9)を用いて前述したのと同様の計算領域とし、衝撃波面に対してセル境界が45度となるような状況で調査した。また、より実際的な場合を想定し、MUSCL-TVD と TVD-Runge-Kutta 陽解法を用いた。Fig. 9 にその結果を示す。3 角形要素を用いた場合は、SF2 の併用に殆ど依存せず AVM スキームは正常な結果を出力することも分かった。

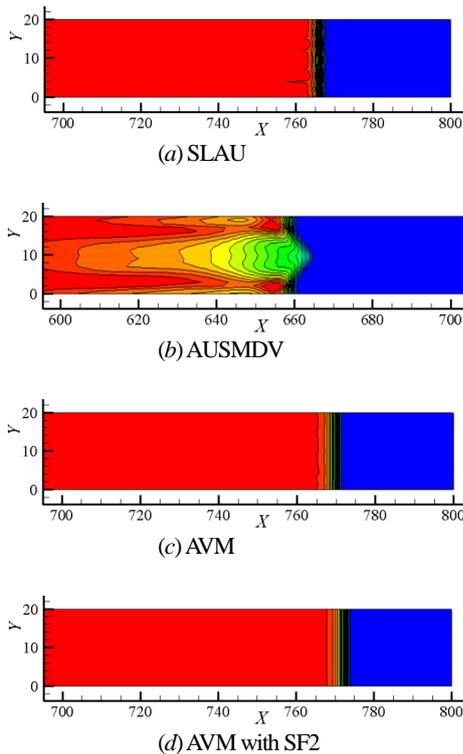


Fig. 8 Moving shock at $M_s = 6$ solved by the 1st-order scheme on the structured grid system.

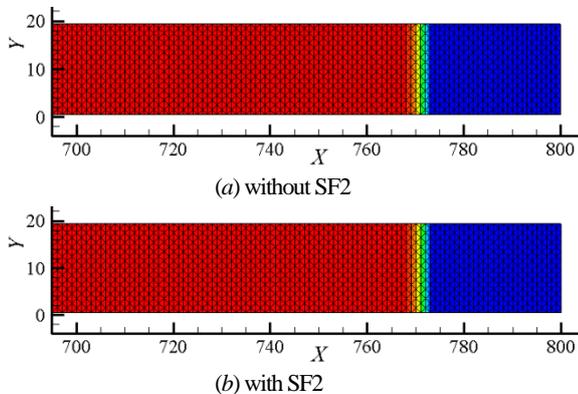


Fig. 9 Moving shock $M_s = 6$ solved by AVM+MUSCL-TVD (unstructured mesh and density contours).

4.4 2次元定常斜め衝撃波

ここでは、式 (7) で用いられるパラメータ N が解の収束性に与える影響を検討することを目的として定常な斜め衝撃波の数値解について調査した結果について述べる。Tramel⁽¹⁷⁾らの文献内容に倣って流れは非粘性とし、一様流マッハ数 4、圧縮コーナーの偏向角を 30 度に設定した。用いた計算格子数は、流れ方向に 60 点、もう一つの方向に 220 点とし、時間積分には LU-SGS を使用して CFL=2 とした。MUSCL-TVD の制限関数自体に起因する収束性の劣化と切り離して結果を観察することを目的として、この検証問題だけは MUSCL-TVD の制限関数として、補間候補をスムーズに選択する Van Albada⁽¹⁶⁾リミッター関数を用いた。SF2 に関連して式 (7) で用いられるパラメータ N をゼロとして衝撃波近傍とその周囲を 0 と 1 の flag で区別すると、残差は 5 桁より小さくならず定常解への収束が劣化することが Fig. 12 からわかり、よって本報告の計算では $N=10$ として用いている。また、この問題に HLLC⁽⁹⁾や HLLC⁽¹⁰⁾スキームを用いると、斜め衝撃波の背後に格子幅に対応した数値振動が現れることが知られている⁽¹⁷⁾。これを比較検証するために、圧縮コーナーを原点に採り流出境界まで

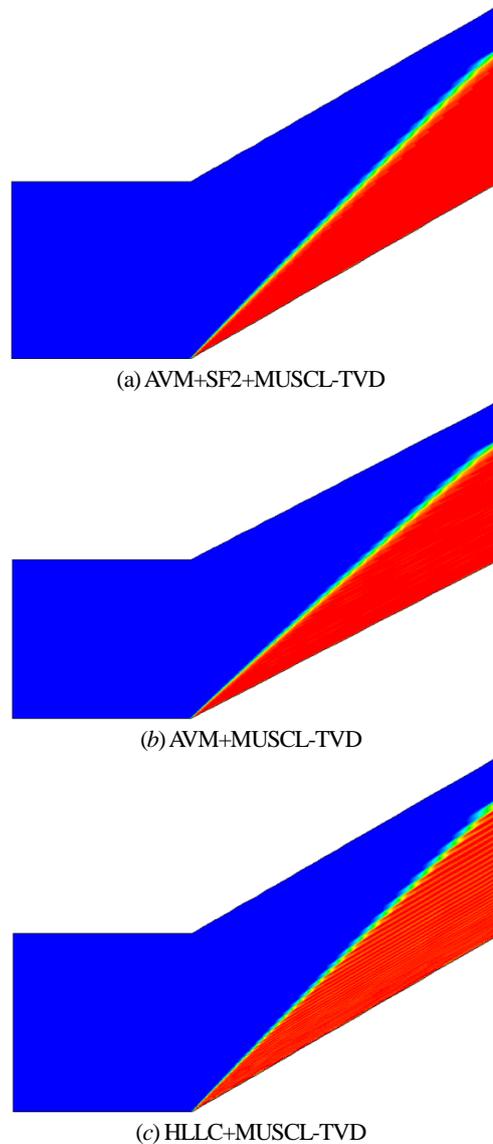


Fig. 10 Density contours using MUSCL-TVD for the $M=4$, 30degree.

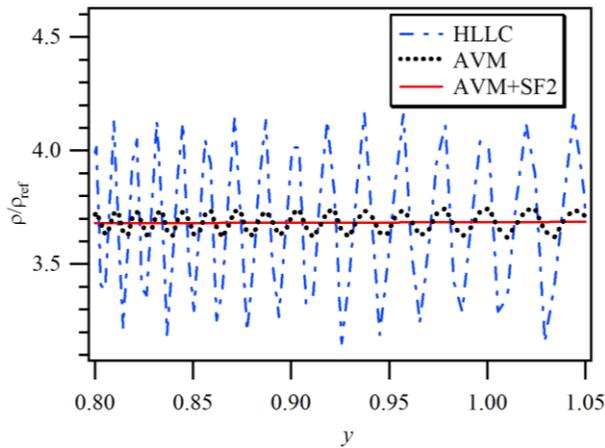


Fig. 11 Comparison of density distributions solved with MUSCL-TVD.

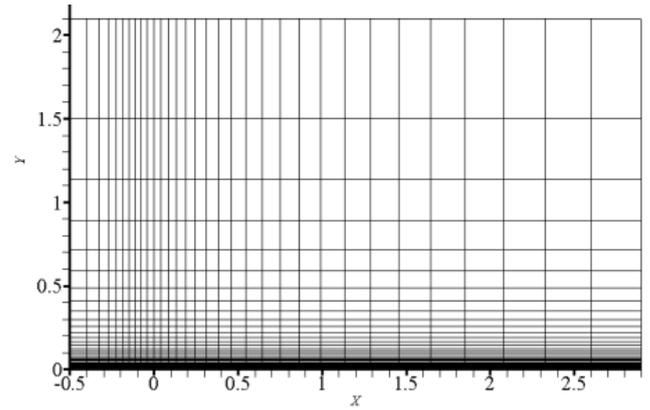


Fig. 13 Computational grid for the laminar boundary layer(32x48 cells).

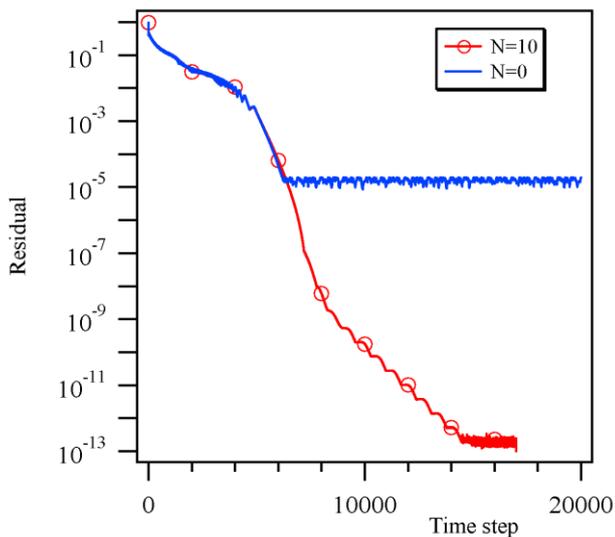
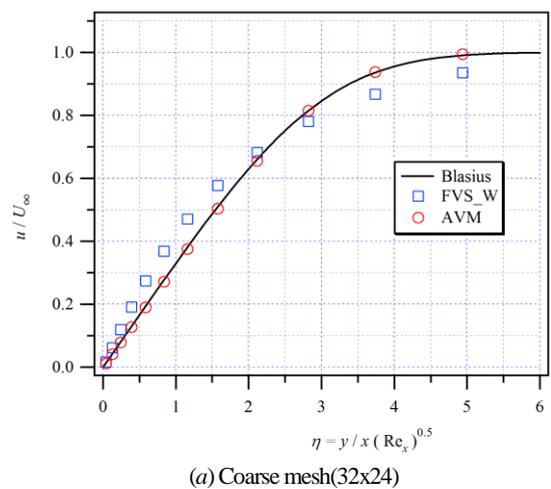


Fig. 12 Comparison of residual history.

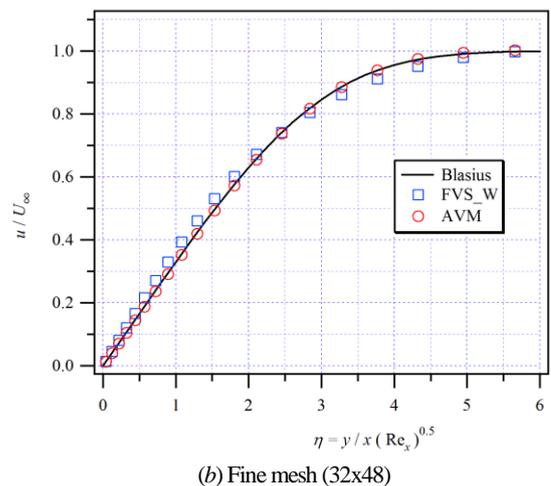
の距離の75%のx座標における密度分布の比較を Fig. 11 に示す。グラフの横軸はy座標、縦軸は一樣流で無次元化された密度である。例えば、HLLCによる数値解の振幅は、全幅で25%程度も含まれるのに対し、AVMでは1.4%程度に抑えられることがFig. 11 から見てとれる。さらに、SF2をAVMを併用することにより振動は殆ど無くなることがわかった。この理由は、FVS系のスキームを用いると衝撃波を4点以上(斜め衝撃波ではそれ以上の要素数)の格子にまたがって捕らえるために衝撃波直後の諸量の値に差異が付きづらく、また、SF2で強制的に衝撃波近傍の流線間で散逸効果も入るため、流線を横断する方向に諸量の分布が正常になると考えられる。

4.5 平板上の層流境界層

ベースとなる風上法には、圧力勾配が存在する箇所はその度合いに応じてFVS_Wにシフトする要素が組み込まれているため、境界層の計算で予測精度を確認することを目的として平板上に発達する層流境界層で検証した。Fig.13は用いた計算格子の全領域を示している。空間精度はMUSCL-TVDにより2次精度相当とし、時間積分にはLU-SGSを用い、CFL=100として計算を実施した。Fig.14は流れ方向に32セル、平板から垂直方向に24セルと48セ



(a) Coarse mesh(32x24)



(b) Fine mesh (32x48)

Fig. 14 Velocity profile on the flat plate at $Re_x = 10^5$.

ルの2種類の計算格子を用いた場合の速度分布図である。壁面近傍の最小格子幅は共に 3×10^{-4} と設定した。Fig.14には一樣流マッハ数 $M=0.3$ の設定の下で、 $x=1(Re_x=10^5)$ での流れ方向の速度成分をプロットしており、比較のためFVS-Wの結果も併記している。32x24セルの粗い計算格子を用いた場合には、ブラジウス解と本法の数値解は凡そ一致しているのが見てとれる。また、細かい格子(32x48)を用いた場合も粗い格子のときと同様にブラジウス解と一致し、格子依存性が少ないことを確認した。これらの事柄が

ら、圧力勾配が殆ど無い問題においてはAVMスキームが(16), (17), 及び(18)式を経由して FVS-W へ切り替わる影響は殆ど無視できると考えられる。

4.6 2次元円柱周りの極超音速粘性流

上述した平板上の亜音速流とは異なり、流れ方向の圧力分布が強く衝撃波も存在するような流れを扱う際には、本手法はFVS-W的なスキームへ移行してその分だけ散逸的な性質が強まる可能性がある。このため別途の検証が必要と考えられ、2次元円柱周りの極超音速粘性流で検証計算を実施した。流れの諸条件は、一様流マッハ数 8.1(流速 1296.1m/s)、一様流温度 63.73K、一様流圧力 370.6Pa であり円柱の半径は 20mm とした。物体温度が 300K の等温壁条件を課しプラントル数 $Pr=0.71$ とすれば、Fay-Riddell⁽¹⁸⁾の予測式を用いて推定される激み点の空力加熱率は 0.713MW/m^2 であった。この検証計算に対して3種類の計算格子で解析を実施した。1つ目は物体表面が 160 分割で物体と流入境界の間が 80 分割 (160x80)の四角形要素、2つ目も同様の四角形要素で 320x160、3つ目が要素数約 51,000 要素の三角形と四角形の複合格子とした。また、3タイプとも物体近傍の最小格子幅は円柱の直径の 1×10^{-5} 倍とした。時間積分にはLU-SGSを用い、 $CFL=500$ で計算を実施した。Fig. 16 と Fig. 17 は、それぞれ AVM+MUSCL-TVD と AVM+SF2+MUSCL-TVD による圧力コンター図である。SF2の有無による差異を観察するための比較図であるが、両者とも大きな問題は見当たらず、同じ計算格子の結果を比較するとほぼ同一であることが見てとれる。しかしながら、Fig. 18(a)と Fig. 19(a)の円柱表面上の熱流束分布で比較すると、SF2を併用しない場合は圧力分布に特に問題がないものの、激み点近傍の熱流束の予測に失敗していることが見てとれる。これは熱流束が温度の1階微分から求められるため微細なカーブクル不安定の影響を受けやすいためと考えられる。激み点の熱流束の予測値は Table 3 にまとめており、SF2を併用する場合は、3種類のいずれの計算格子を用いた場合でも数値解はFay-Riddell⁽¹⁸⁾の解析解 (0.173MW/m^2)に近く、解析解との相違は3%以内であった。これらの事柄から衝撃波周囲でメトリックに由来して発生する何らかの擾乱をその近傍で速やかに散逸させることがやはり望ましく、AVMスキームは常にSF2と併用することにより衝撃波を含む流れの正確な予測が可能であると考えられる。

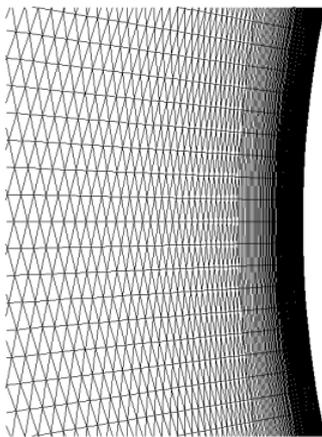


Fig. 15 Close-up view of the computational cells(51840 elements), square elements near the wall, and triangular elements far from the wall.

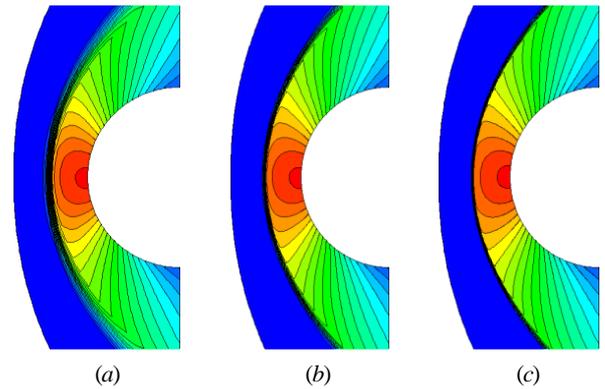


Fig. 16 Hypersonic viscous flow solved by AVM+MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 8.1 (pressure contours). (a) 160x80 cells, (b) 320x160 cells, (c) 51840 cells(hybrid mesh).

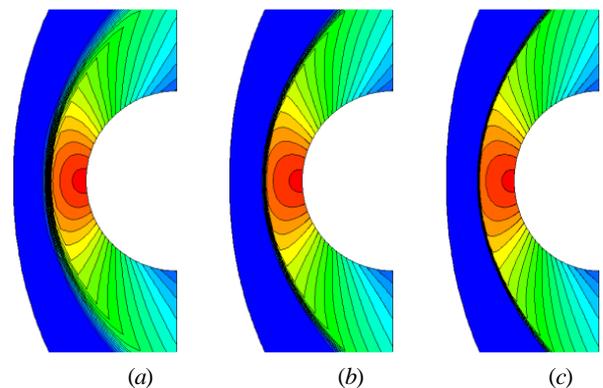
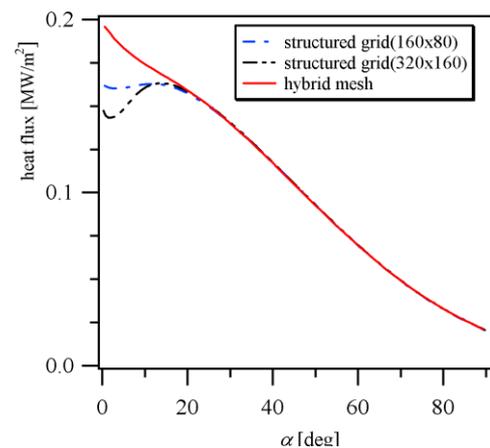
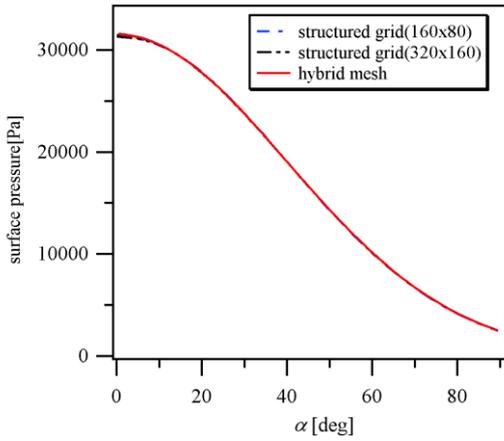


Fig. 17 Hypersonic viscous flow solved by AVM+SF2+MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 8.1 (pressure contours). (a) 160x80 cells, (b) 320x160 cells, (c) 51840 cells(hybrid mesh).



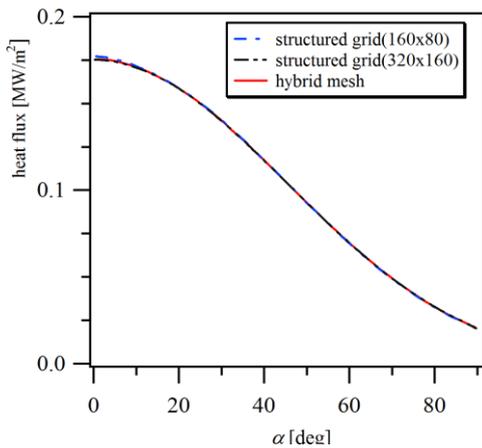
(a) Aerodynamic heating rate distributions on the wall.

Fig. 18 Hypersonic viscous flow solved by AVM+MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 8.1.

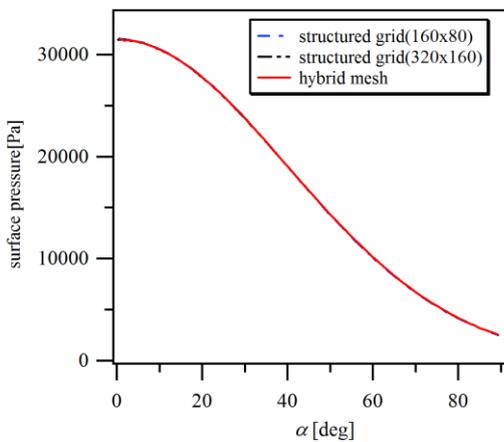


(b) Surface pressure distributions.

Fig. 18 Hypersonic viscous flow solved by AVM+MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 8.1.



(a) Aerodynamic heating rate distributions on the wall.



(b) Surface pressure distributions.

Fig. 19 Hypersonic viscous flow solved by AVM+SF2+MUSCL-TVD around a cylinder at free stream Mach 8.1.

Table 3 Aerodynamic heating rate at the stagnation point(Fay-Riddell's analytic solution is 0.173MW/m²).

computational mesh	shock-fix2	\dot{q} [MW/m ²]
structured grid(160x80)	ON	0.178
structured grid(320x160)	ON	0.176
hybrid mesh(51,840elements)	ON	0.176
structured grid(160x80)	OFF	0.161
structured grid(320x160)	OFF	0.147
hybrid mesh(51,840elements)	OFF	0.195

最後に、計算スキームによる相違がどれほどであるかについて同じ検証問題を用いて調査したので、その結果について以下に示す。計算格子は物体表面が 320 分割で物体と流入境界の間が 80 分割(160x80)の四角形要素とし、前述した構造格子のアスペクト比を 2 倍に採り、衝撃波とその背後で不安定が現れやすい状況と比較することとした。SF2 を使用しない場合の表面熱流束分布を Fig.20 に示す。AUSMDV, SLAU, AVM の 3 種類で比較したとき、どのスキームも正しくない解となっていることが見てとれる。一方、SF2 を適用した場合の熱流束分布の比較図が Fig. 21 であり、この場合はどのスキームも概ね正しい解を与えるが、激み点近傍を拡大してみると(Fig. 21b), SLAU だけ激み点近傍で折れ曲がる分布を与えることが分かった。このことから、SF2 による衝撃波とその周囲のみの安定性確保だけでは熱流束の正確な予測には十分とはいえず、衝撃波と物体に囲まれた亜音速領域において、FVS スキームのように、流線と流線の間にある程度まで数値粘性の発生を許容するような散逸的な性質を若干残すほうがこの種の問題に対して有利ではないかと考えられる。

Table 4 Aerodynamic heating rate at the stagnation point(Fay-Riddell's analytic solution is 0.173MW/m²) on the structured grid(320x80).

computational mesh	shock-fix2	\dot{q} [MW/m ²]
AVM	ON	0.177
AUSMDV	ON	0.177
SLAU	ON	0.175
AVM	OFF	0.112
AUSMDV	OFF	0.247
SLAU	OFF	0.166

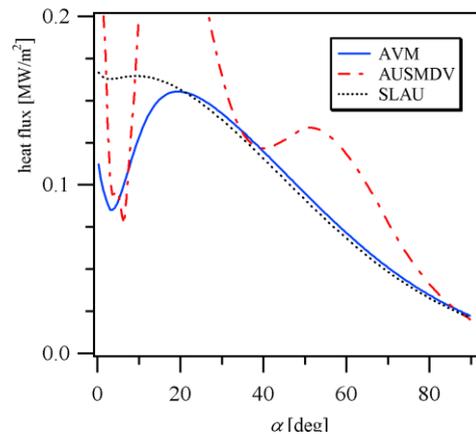
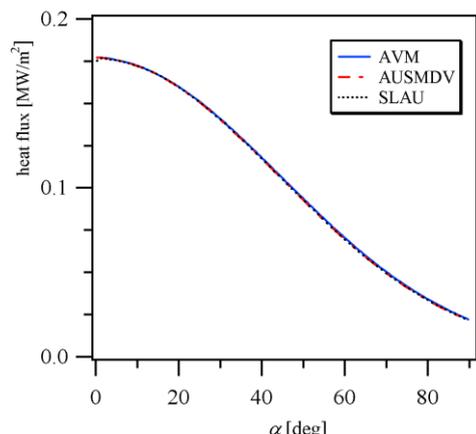
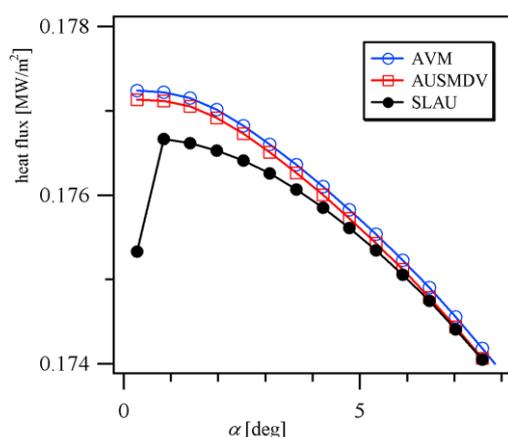


Fig. 20 Aerodynamic heating rate distributions around a cylinder at free stream Mach 8.1 using 320x80 cells. No shock-fix method was used.



(a) Aerodynamic heating rate distributions on the wall.



(b) Close-up view near the stagnation point.

Fig. 21 Aerodynamic heating rate distributions around a cylinder at free stream Mach 8.1 using 320x80 cells with the shock-fix2(SF2).

5. まとめ

本稿で述べた手法(AVM+SF2)について以下に簡潔にまとめる。

- AVM は AUSMV 系と FVS-W を組み合わせた手法である。
- Shock-fix 法の考え方に倣い Shock-fix2(SF2)を構成し, SF2 には FVS-W を併用させることにより衝撃波の数値的不安定を非構造格子でも抑制できることを確認した。
- AVM+SF2+MUSCL-TVD の組み合わせは, 衝撃波に沿う方向に格子解像度が高く尚且つ格子アスペクト比が大きな格子上においてもカーバンクルが生じにくい。
- HLL 系スキームを使用すると斜め衝撃波背後の格子の配置に呼応して数値振動が発生することが知られているが, AVM+SF2+MUSCL-TVD 使用時には殆ど見られなかった。
- 1次元定常衝撃波が4点で捕獲され, 定常流れではエンタルピーの保存性が良いという FVS-W の特徴を有する。
- 1次元の移動接触不連続面の捕獲性能が近似リーマン解法の一つである Roe スキームと同等である。
- 上記事項に関連して, 剪断層を横断する方向に数値的な質量流束が発生しにくい境界層の予測精度が良い。
- 衝撃波を含む領域に3角形要素の非構造格子を, 壁面近傍には4角形を配する複合格子を用いる場合でも, 激み点近傍で異常な数値解は発生せず, 空力加熱の評価が可能であることが確認された。

参考文献

- (1) Pandolfi, M. and D'Ambrosio, D., "Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the "Carbuncle" Phenomenon," *Comput. Phys.* Vol. 166, pp.271-301, (2001).
- (2) 和田, "流束分離法の最近の研究動向について," 第 8 回数値流体力学講演論文集(1994), pp. 53-56.
- (3) Löhner, R.: *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods*, 2nd Edition. John Wiley & Sons, 2008.
- (4) Men'shov, I. and Nakamura, Y., "Implementation of the LU-SGS Method for an Arbitrary Finite Volume Discretization," 第 9 回数値流体力学シンポジウム (1995), pp. 123-124.
- (5) Gottlieb, S and Shu, C. W, "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes," *Math. Comp.*, Vol. 67, No. 221, pp.73-85.
- (6) Shima, E. and Kitamura, "On New Simple Low- Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds," *AIAA Paper 2009-136* (2009).
- (7) Quirk, J. J., "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *ICASE Report 92-64*, 1992.
- (8) Wada, Y. and Liou, M.-S., "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," *NASA TM 106452, ICOMP-93-50; AIAA-94-0083*.
- (9) Einfeldt, B., "On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 25(2), pp.294-318, 1988.
- (10) Toro, E. F., Spruce, M. and Speares, W., "Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver," *Shock Waves*, Vol.4, pp.25-34, 1994.
- (11) Hänel, D., Schwane, R., and Seider, G., "On the Accuracy of Upwind Schemes for the Solution of the Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper 87- II05CP*, 1987.
- (12) Nakamori, I. and Nakamura, Y., "An Upwind Scheme for Inviscid and Viscous Hypersonic Flow," *AIAA Paper 95- 1732CP*, 1995.
- (13) Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *J. Comput. Phys.*, Vol.43, 1981, pp.357-372.
- (14) Liou, M.-S. and Steffen, C.J., "A New Flux Splitting Scheme," *J. Comput. Phys.* Vol.107, 1993, pp.23-39.
- (15) Liou, M.-S., "A Sequel to AUSM: AUSM+, *J. Comput. Phys.* Vol.129, 1996, pp.364-382.
- (16) Kermani, M.J., Gerber, A.G., Stockie, J.M., "Thermodynamically Based Moisture Prediction Using Roe's Scheme", 4th Conference of Iranian AeroSpace Society, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran(2003).
- (17) Tramel R. W., Nichols R. H., Buning P. G., "Addition of Improved Shock-Capturing Schemes to OVERFLOW 2.1," *AIAA Paper 2009-3988*, 2009.
- (18) Fay, J. A. and Riddell, F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 25, No. 2, pp. 73-85, 1958.