

気体論スキームを用いた数値流体解析における

パラメータ決定手法の影響評価に関する研究

Effect of parameter determination method on the stability of kinetic scheme

- 山田 浩史, 龍大院, 〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5, t17m048@mail.ryukoku.ac.jp
 大津 広敬, 龍大, 〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5, hirotaka.otsu@gmail.com
 Hiroshi Yamada, Graduate school of Ryukoku Univ., 1-5 Yokotani, Setaoecho, Otsu, Shiga, JAPAN
 Hirotaka Otsu, Ryukoku Univ., 1-5 Yokotani, Setaoecho, Otsu, Shiga, JAPAN

The purpose of this work is to develop numerical analysis method applicable to arbitrary flow region at low computational cost. The kinetic scheme family is the hydrodynamic limit of the discretized Boltzmann equation. For this reason, it can be applied to the high Knudsen number region in which continuum approximation fails, and it is also a finite difference method that is considered to be lower computational cost than molecular simulation. By improving the Modified-Kinetic Flux Vector Splitting (m-KFVS) method which was developed by Anil et al., we proposed a new m-KFVS method with stability condition. Using the Sod's shock tube problem in one-dimensional ideal gas, we compared the proposed method with the conventional method. As a result, analytical results almost agreed under appropriate parameter setting, and succeeded in reducing computational time under certain conditions.

1. はじめに

流体力学の基礎方程式にもとづく従来の差分法は、連続体近似の破綻により、高 Knudsen 数領域への適用が困難である⁽¹⁻³⁾。この連続体近似の破綻の問題が存在する為、高 Knudsen 数領域においては、任意の Knudsen 数領域に適用可能な分子シミュレーションがしばしば用いられる⁽¹⁻³⁾。しかし、分子シミュレーションは、分子数の増大に伴い計算量も増大すると云う性質を持つ為、一般に計算量が多い⁽¹⁻³⁾。

これらの問題の解決の為、本研究では、任意の流れ領域に適用可能な低計算量数値解析手法の開発を目的とする。

流体力学の基礎方程式は、任意の Knudsen 数領域を司る Boltzmann 方程式の流体力学的極限である^{(1-2), (4)}。気体論スキーム族 (Kinetic scheme family) は、離散化 Boltzmann 方程式の流体力学的極限として導出される差分法である。任意の流れ領域を司る気体論に基づき、比較的計算量が少ない差分法による為、気体論スキームは目的の数値解析手法に近いと考えられる。

気体論スキームの中、Euler 方程式が Boltzmann 方程式の流体力学的極限である事に基いたスキームとして、Kinetic Flux Vector Splitting Method⁽⁴⁾ (KFVS 法) や、Modified Kinetic Flux Vector Splitting Method⁽⁴⁾ (m-KFVS 法) などが存在する。

KFVS 法は、平衡状態における風上差分化された Boltzmann 方程式の流体力学的極限である。この方法は、分子速度が速い場合、数値粘性の増大、等エントロピー流れ中の淀み点圧力の減少、および衝撃波の不鮮明化を生じ、高次精度化をしたとしても、計算量の肥大化と、流速制限関数による精度の劣化が発生する⁽⁴⁾。

これらの問題を解決する為に、Anil 他⁽⁴⁾によって、m-KFVS 法が開発されている。m-KFVS 法は、分子速度と共に数値粘性も増大する事を解決する為に、粘性項の重み付け関数のパラメータにより数値粘性制御される⁽⁴⁾。しかし、Anil 他⁽⁴⁾の離散化では、その数値流束に含まれるパラメータには隣接する 2 つの格子点の平均値が用いられる為、計算量も KFVS 法と比較して大きくなってしまふと考えられる。また、KFVS 法、m-KFVS 法ともに、高温領域や高速流れにおいて時間刻みが小さくなる為、時間刻みが一定の差分法と比較して計算量が大きくなると考えられる。

本研究では、この問題を解決する為、新しいパラメータ決定方法を提案する。この方法では、Anil 他⁽⁴⁾の m-KFVS 法の導出過程に変更を加える事によって、数値流束の計算に各格子点におけるパ

ラメータを用いる。これにより、パラメータの平均化が不要になり、m-KFVS 法の数値流束の簡略化も達成される。また、Von Neumann の安定性解析に基づき、時間刻みが一定値以上になる様なパラメータ決定手法を改良している。これにより、計算時間の下限が保障されると考えられる。

本研究では、提案した方法と従来手法の 2 種類の m-KFVS 法について、1 次元理想気体における Sod の衝撃波管問題の解析結果を用いて比較検討する。

2. 数値計算法

2.1 気体論の支配方程式

本研究では、気体論の支配方程式として Boltzmann 方程式を用いた。 f を任意の速度分布関数、 J を衝突項、 v を分子速度とする時、外力が無い場合の 1 次元 Boltzmann 方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = J \quad (2.1)$$

と表され、平衡状態では

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$F = \frac{\rho}{I_0} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta(v-u)^2 - \frac{I}{I_0}}, \quad (2.2)$$

$$\beta = \frac{\rho}{2p}, I_0 = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} \frac{p}{\rho}, p = \rho RT$$

となる⁽⁴⁾。ここで、 F は Maxwell の速度分布関数、 I は比内部エネルギー、 I_0 は非並進自由度の比内部エネルギー、 $1/2\beta$ は速度の分散、 T は温度、 R は気体定数である。

2.2 流体力学の支配方程式と流体力学的極限

本研究では、流体力学の支配方程式として Euler 方程式を用いた。1 次元 Euler 方程式は、理想気体の場合、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2, c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

で表される⁽⁴⁶⁾。ここで、 ρ は密度、 p は圧力、 u は速度、 e はエネルギー密度、 c は音速、を表し、 t は時間、 x は位置座標、 γ は比熱比である。

ψ モーメントは、任意の速度分布関数 f に対し、

$$\langle \psi, f \rangle = \int_{R^+ \times R} \psi f \, dv \, dl, \psi = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ 1 + \frac{1}{2}v^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

と定義される⁽⁴⁾。ここで、 R は実数体、 R^+ は 0 以上の実数の集合である。

平衡状態における Boltzmann 方程式の ψ モーメントは、(2.2) 式より、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = \langle \psi, \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} \rangle = \langle \psi, J \rangle = 0, \quad (2.5)$$

$$U = \langle \psi, F \rangle, G = \langle \psi, vF \rangle$$

である為、1次元 Boltzmann 方程式の流体力学的極限は式 (2.3) に一致する (Euler 極限)。

2.3 KFVS 法

流体力学の基礎方程式が Boltzmann 方程式の極限である事に基いた差分法が、気体論スキームである⁽⁴⁾。

KFVS (Kinetic Flux Vector Splitting) 法は、気体論スキームの一種である⁽⁴⁾。1次元 KFVS 法は、

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right],$$

$$G_{j\pm\frac{1}{2}} = G_j^\pm + G_{j\pm 1}^\mp,$$

$$G^\pm = \begin{bmatrix} \rho u A^\pm \pm \rho B \\ (p + \rho u^2) A^\pm \pm \rho u B \\ (p + e) u A^\pm \pm \left(\frac{p}{2} + e \right) B \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$A^\pm = \frac{1 \pm \operatorname{erf}(S)}{2}, B = \frac{e^{-S^2}}{2\sqrt{\pi}\beta}, S = u\sqrt{\beta},$$

$$\Delta t \leq \min_x \frac{\Delta x}{v_{3\sigma}}, v_{3\sigma} = |u| + 3\sqrt{RT}$$

で表される FVS スキームである⁽⁴⁾。ここに、 Δt は時間刻み、 Δx は格子間隔、添え字の j は格子点番号、 n は時間ステップである。

式 (2.5) に Courant-Isaacson-Rees (CIR) 分離⁽⁴⁵⁾をして前進および後退差分近似をすると、

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{v + |v| F_j^n - F_{j-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{v - |v| F_{j+1}^n - F_j^n}{2 \Delta x} = 0 \quad (2.7)$$

となる為、 ψ モーメントを計算すると、式 (2.6) が導出される⁽⁴⁾。

また、KFVS 法の時間刻みは、分子速度分布の 3σ (99.73%) 帯域において、式 (2.5) の Von Neumann の安定性条件が充たされる様に決定される⁽⁴⁾。本研究では時間 t が観測時刻 t_1 を超えない様、

$$\Delta t = \min \left(t_1 - t, \min_x \frac{\Delta x}{v_{3\sigma}} \right) \quad (2.8)$$

として時間刻みを指定した。

2.4 m-KFVS 法 (従来手法)

m-KFVS (modified-Kinetic Flux Vector Splitting) 法は、Anil 他⁽⁴⁾の提案した、KFVS 法を改良した気体論スキームである⁽⁴⁾。

前述の通り、KFVS 法は、誤差項が分子速度の大きさに比例する為、分子速度が大きい所で種々の問題が発生する。この問題を解決する為、数値粘性の制御機能を設けたものが、m-KFVS 法である⁽⁴⁾。1次元 m-KFVS 法は、

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right],$$

$$G_{j\pm\frac{1}{2}} = G_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm + G_{j\pm\frac{1}{2}}^\mp, G_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm = \langle \psi, \frac{v \pm |v| \varphi}{2} F \rangle, \quad (2.9)$$

$$\Delta t \leq \frac{\varphi \Delta x}{|v|}$$

で表される FVS スキームである⁽⁴⁾。ここで、 φ は m-KFVS の粘性項の重み付け関数である。m-KFVS 法は、KFVS 法同様、平衡状態における Boltzmann 方程式の ψ モーメントが Euler 方程式に一致する事を用いる⁽⁴⁾。また、Anil 他⁽⁴⁾は、 $\varphi = e^{-\alpha|v|}$ とした

$$G_{j+\frac{1}{2}} = G_{j+\frac{1}{2}}^+ \left(U_j, \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) + G_{j+\frac{1}{2}}^- \left(U_{j+1}, \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right)$$

$$G_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm = \frac{G}{2} \pm \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\alpha^2}{4\beta} - \alpha u} G^+(\rho, u^+, \beta) - e^{\frac{\alpha^2}{4\beta} + \alpha u} G^-(\rho, u^-, \beta) \right], \quad (2.10)$$

$$u^\pm = u \mp \frac{\alpha}{2\beta} \cdot \alpha_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_j + \alpha_{j\pm 1}}{2},$$

$$\Delta t \leq \min_x \frac{\varphi_0 \Delta x}{v_{3\sigma}}, \alpha = \frac{-\log \varphi_0}{v_{3\sigma}} \quad (0 < \varphi_0 \leq 1)$$

を推奨している⁽⁴⁾。この方法では、パラメータ φ_0 を与える事で、数値粘性制御を行う。本研究において、Anil 他⁽⁴⁾の m-KFVS 法、m-KFVS 法の従来手法とは、この方法の事を示す。

m-KFVS 法と KFVS 法の違いは、Modified-Courant-Isaacson-Rees (修正 CIR) 分離⁽⁴⁾にある。これは、CIR 分離を修正したものである。式 (2.5) に修正 CIR 分離をして前進および後退差分近似をすると、

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{v + |v| \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} F_j^n + \frac{v - |v| \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} F_{j+1}^n \right) - \left(\frac{v + |v| \varphi_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} F_{j-1}^n + \frac{v - |v| \varphi_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} F_j^n \right) \right] = 0 \quad (2.11)$$

となる為、 ψ モーメントを計算すると、式 (2.9) および式 (2.10) が導出される⁽⁴⁾。

また、m-KFVS 法の時間刻みも、KFVS 法と同様に、分子速度分布の 3σ (99.73%) 帯域において、式 (2.10) Von Neumann の安定性条件が充たされる様に決定される⁽⁴⁾。本研究では時間 t が観測時刻 t_1 を超えない様、KFVS 法同様、

$$\Delta t = \min \left(t_1 - t, \min_x \frac{\varphi_0 \Delta x}{v_{3\sigma}} \right) \quad (2.12)$$

として時間刻みを指定した。式 (2.8) と式 (2.12) を比較すると分かる様に、パラメータの減少は、速度の増大や温度が上昇する事と同様に時間刻みを減少させる。

2.5 m-KFVS 法 (本研究で提案した方法)

提案した方法は、一次元の場合、

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (2.13)$$

$$G_{j\pm\frac{1}{2}} = Gm_j^\pm + Gm_{j\pm 1}^\mp, u^\pm = u \mp \frac{\alpha}{2\beta},$$

$$Gm^\pm = \frac{G}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\alpha^2}{4\beta} - \alpha u} G^+(\rho, u^+, \beta) - e^{\frac{\alpha^2}{4\beta} + \alpha u} G^-(\rho, u^-, \beta) \right],$$

$$\Delta t = \max \left(\Delta t_0, \min \left(t_1 - t, \min_x \frac{\varphi_0 \Delta x}{v_{3\sigma}} \right) \right),$$

(0 < \varphi_0 \le 1).

但し、\alpha の決定方法は、

$$\alpha = \begin{cases} \frac{-\log \varphi_0}{v_{3\sigma}}, & (v_{3\sigma} \le \frac{\varphi_0 \Delta x}{\Delta t_0}) \\ \frac{\log \frac{\varphi_0 \Delta x}{v_{3\sigma} \Delta t_0}}{v_{3\sigma}}, & (v_{3\sigma} > \frac{\varphi_0 \Delta x}{\Delta t_0}) \end{cases} \quad (2.14)$$

であり、\Delta t_0 は時間刻みの下限を表す。

式 (2. 10) から分かる様に、Anil 他⁷⁾の離散化では、その数値流束に含まれる \alpha に隣接する 2 つの格子点の平均値が用いられる。この為、計算量も KFVS 法と比較して大きくなってしまふと考えられる。また、式 (2. 8) や式 (2. 12) を見て分かる様に、KFVS 法、m-KFVS 法ともに、時間刻みが 1/v_{3\sigma} で抑えられる為、高温領域や高速流れにおいて時間刻みが小さくなる。よって、時間刻みが一定の差分法と比較しても計算量が大きくなると考えられる。

本手法では、Anil 他による式 (2. 11) の離散化を

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{v + |v|\varphi_j^n}{2} F_j^n + \frac{v - |v|\varphi_{j+1}^n}{2} F_{j+1}^n \right) - \left(\frac{v + |v|\varphi_{j-1}^n}{2} F_{j-1}^n + \frac{v - |v|\varphi_j^n}{2} F_j^n \right) \right] = 0 \quad (2.15)$$

の様に変形する。\varphi = e^{-\alpha|v|} として、その \psi モーメントを計算すると、式 (2. 13) が導出される。

図 2. 1 に m-KFVS 法の数値流束の計算アルゴリズムを示す。図 2. 1 に示す様に、従来手法 (図 2. 1 の左側) と比べて、提案した方法 (図 2. 1 の右側) の方が、アルゴリズムが簡略化されている。これにより、計算時間の短縮を図っている。

また、本手法のパラメータ決定には、安定条件

$$v = \max_x \frac{\Delta t v_{3\sigma} e^{\alpha v_{3\sigma}}}{\Delta x} \le 1 \quad (2.16)$$

を用いる。これは CFL 条件に対応する為、以下、v を拡張 Courant

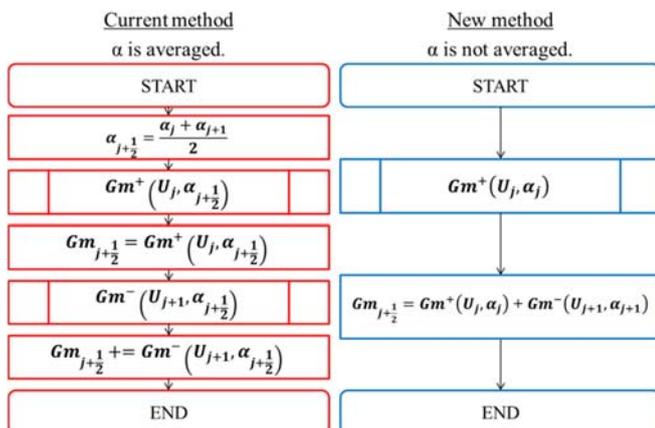


Fig. 2.1 Calculation algorithm of numerical flux of m-KFVS method.

数と呼ぶ事とする。

従来手法では、\Delta t_0 > \min_x (\varphi_0 \Delta x / v_{3\sigma}) の場合に、時間刻みが下限 \Delta t_0 以下となる為、原理上、時間刻みはいくらでも小さくなると考えられる。その為、\Delta t_0 > \min_x (\varphi_0 \Delta x / v_{3\sigma}) の場合においては、拡張 Courant 数をパラメータとして、式 (2.16) の CFL 条件を変形した

$$\alpha = \log \left(\frac{v \Delta x}{v_{3\sigma} \Delta t_0} \right) / v_{3\sigma} \quad (2.17)$$

を用いる。こうする事により、拡張 Courant 数を式 (2.16) を充たす様に選ぶ限りにおいて、本手法は安定条件を充たすと考えられる。v = \varphi_0 としても拡張 Courant 数は式 (2.16) を充たす為、v = \varphi_0 とする。これにより、式 (2.14) が導出され、任意性のあるパラメータが一つだけになる。

3. 数値実験

3.1 Sod の衝撃波管問題⁷⁾

今、x_0 を初期不連続面 (Initial discontinuity) の位置座標とする。添字は、l が初期不連続面位置座標の左側、r が右側、initial は初期値を表す事とする。

Sod の衝撃波管問題の初期値 (t=0) は、

$$\begin{bmatrix} \rho_{initial} \\ p_{initial} \\ u_{initial} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \rho_l \\ p_l \\ u_l \end{bmatrix}, & (x < x_0) \\ \begin{bmatrix} \rho_r \\ p_r \\ u_r \end{bmatrix}, & (x \geq x_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

である⁷⁾。以下に示す様に Sod の衝撃波管問題の厳密解は、1 次元理想気体の場合、図 3. 1 の様なグラフになる。領域 1 と 2 の境界面を衝撃波面 (shock)⁷⁾、領域 2 と 3 の境界面を接触不連続面 (contact discontinuity)⁷⁾、領域 4 を膨張波 (expansion fan)⁷⁾ と云う。

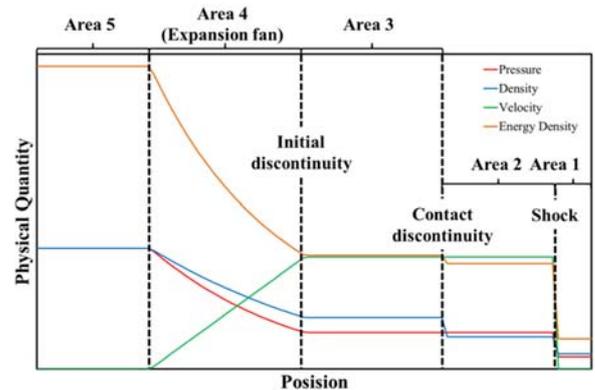


Fig. 3.1 Analytical solution of Sod's shock tube problem.

3.2 実験条件

本研究では、1 次元理想気体における Sod の衝撃波管問題を用いて数値実験を実行した。

本実験では、最初に、提案した m-KFVS 法 (以下、m-KFVS-2) の計算精度を Anil 他⁷⁾の m-KFVS 法 (以下、m-KFVS-1) の計算精度と比較し、m-KFVS-2 の計算精度を検証する。比較では m-KFVS 法として、厳密解に最も適合する最適パラメータのものを使用した。2 種類の m-KFVS 法の最適パラメータは、有効数字 2 桁の範囲で探索し、エネルギー密度が有効数字 3 桁で単調になる様な範囲から、目測で決定した。但し、解析結果の精度は、1 回の測定結果のみで比較した。

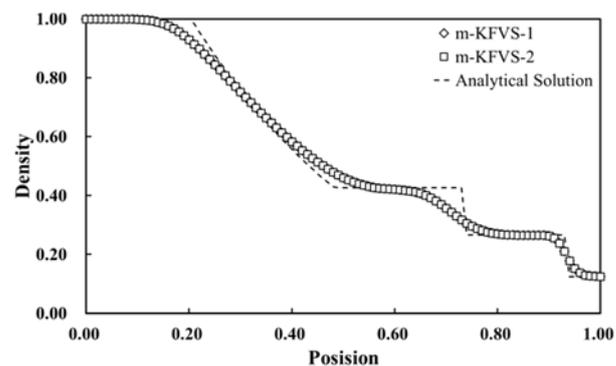
次に、2 種類の m-KFVS 法の計算時間を比較し、m-KFVS-1 に較べて m-KFVS-2 の計算時間が短縮されているかどうかを $1.0 \times 10^{-3} \leq \varphi_0 \leq 1.0$ の範囲で検証する。計算時間の測定には CPU_TIME を使用し、計算時間の測定は 2 回実行した。

最後に、最適パラメータにおける 2 種類の m-KFVS 法の計算精度を既存のスキーム (AUSM 法⁽⁵⁻⁶⁾、Roe 法⁽⁵⁻⁶⁾、KFVS 法) と比較し、Sod の衝撃波管問題において、最適パラメータでの m-KFVS-2 の計算時間が既存のスキームにと比較してどの程度の長いかを検証する。これも、計算時間の測定には CPU_TIME を使用し、計算時間の測定は 2 回実行した。

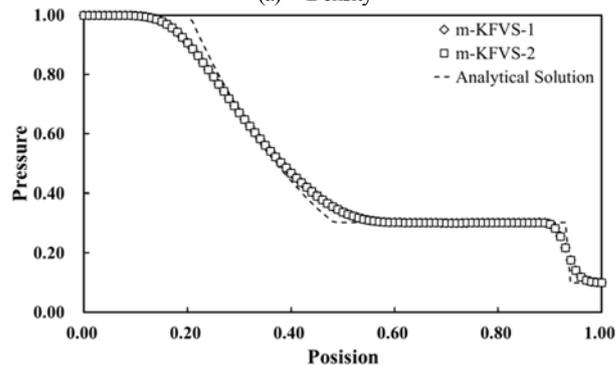
以上の数値実験においては、数値計算には Fortran95 による倍精度計算、コンパイラには TDM-GCC (64 bit) ver. 5.1.0 の gfortran、プログラムの実行には TDM-GCC (64 bit) ver. 5.1.0 の MinGW Command Prompt を用いた。位置座標の範囲は $0.0 \leq x \leq 1.0$ 、初期不連続点位置は 0.5、格子点数は 100、現象の観測時間は $0.00 \leq t \leq 0.25$ 、比熱比は 1.4 として問題の解析を実行した。但し、AUSM 法と Roe 法の時間刻み幅、および m-KFVS-2 の時間刻みの下限は 1.0×10^{-4} とした。

3.3 実験結果

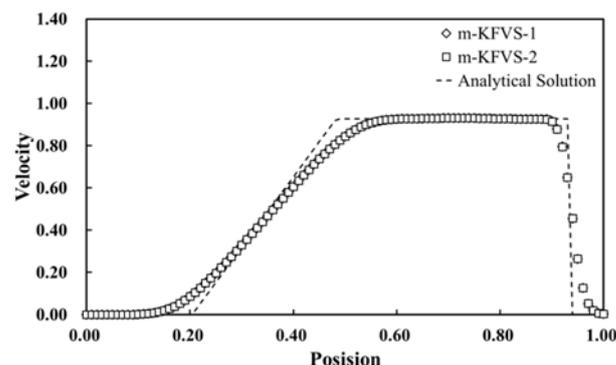
最初に、2 種類の m-KFVS 法の精度の比較を行う。以下、縦軸を物理量、横軸を位置座標として、Sod の衝撃波管問題における 2 種類の m-KFVS 法の最適パラメータでの解析結果の比較を図 3.2 に示す。2 種類の m-KFVS 法は、最適パラメータが一致して、 $\varphi_0 = 8.8 \times 10^{-1}$ であった。また、図 3.2 から分かる通り、2 種類の m-KFVS 法の解析結果は、領域 1~5 の全領域において、殆ど一致していると考えられる。これは、最適パラメータにおける計算精度に違いが現れる様な流れ領域では無かった事や、m-KFVS-1 と 2 の構造の類似性によると考えられる。



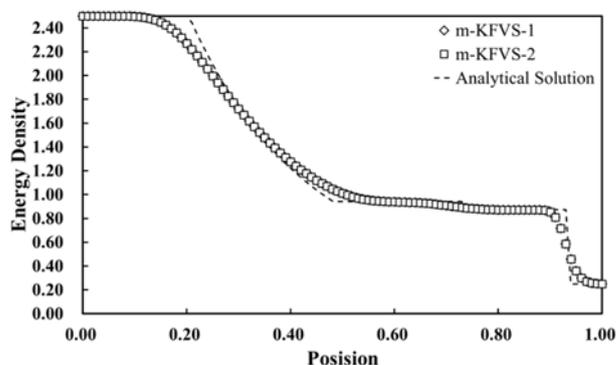
(a) Density



(b) Pressure



(c) Velocity



(d) Energy Density

Fig. 3.2 Numerical calculation results of two types of m-KFVS method (with optimum parameter $\varphi_0 = 8.8 \times 10^{-1}$, both m-KFVS-1 and 2) in Sod's shock tube problem.

次に、2 種類の m-KFVS 法の計算時間の比較を行う。以下、計算時間を縦軸、パラメータ φ_0 を横軸として、Sod の衝撃波管問題における m-KFVS 法の計算時間とパラメータの関係の測定結果を図 3.3 に示す。図 3.3 から分かる様に、m-KFVS-1 では φ_0 が小さくなる程計算時間が大きくなる傾向にあるが、m-KFVS-2 では、 $\varphi_0 = 1.0$ の近傍で m-KFVS-1 に一致するが、パラメータ φ_0 が小さくなる程 m-KFVS-1 よりも相対的に計算が早くなる傾向にあり、特に $\varphi_0 < 4.0 \times 10^{-2}$ の範囲で計算時間がほぼ一定値 $(2.88601 \pm 0.03404) \times 10^{-1}$ sec. となっていることが分かる。計算時間がほぼ一定値になるのは、当初の計画通り、本研究で提案したパラメータ決定手法が時間刻みの下限を与え、時間刻みの減少による計算時間の増大を回避している為であると考えられる。時間刻みの下限は計算時間に上限を与える為、この範囲以外においては数値流束簡略化の影響が大きいと考えられる。図 3.3 にプロットされた値だけで計算した場合、m-KFVS-1 の計算時間は

$$\text{Calculation Time (sec.)} = 1.56 \times 10^{-2} \times \varphi_0^{-1.0} \quad (3.2)$$

で近似され、m-KFVS-2 の計算時間は

$$\text{Calculation Time (sec.)} = \begin{cases} 1.56 \times 10^{-2} \times \varphi_0^{-0.89} & (0.037 < \varphi_0 \leq 1.0) \\ 2.89 \times 10^{-1} & (\varphi_0 \leq 0.037) \end{cases} \quad (3.3)$$

で近似される。この為、数値流束簡略化は、 $\varphi_0^{-1.0}$ を $\varphi_0^{-0.89}$ にし、 φ_0 の減少による計算時間の増大を抑えていると考えられる。

更に、パラメータの減少は温度の上昇や速度の増大と同様の影響を時間刻みに与える為、図 3.3 の結果は、特に高温領域や高速流れにおいて m-KFVS-2 の計算時間が短縮される事を示唆すると考えられる。よって、パラメータが小さくなる程 m-KFVS-2 は m-KFVS-1 よりも計算が早と考えられ、高温領域や高速流れではであると予想される。

最後に、最適パラメータにおける 2 種類の m-KFVS 法の計算精度を既存のスキームと比較する。以下、表 3.1 に最適パラメータでの 2 種類の m-KFVS 法、KFVS 法、AUSM 法、および Roe 法の計算時間の測定結果を示す。表 3.1 より、Sod の衝撃波管問題においては、KFVS 法と最適パラメータにおける 2 種類の m-KFVS 法は計算時間が等しく、AUSM 法、Roe 法よりも計算時間が短いと考えられる。

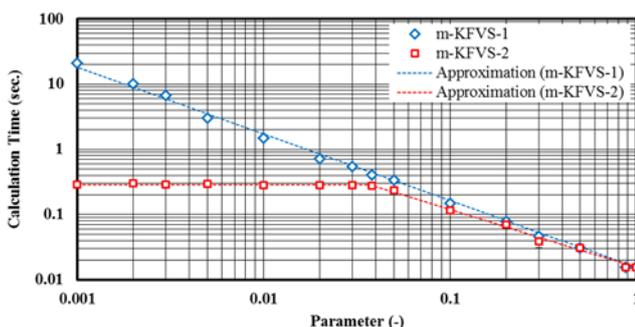


Fig. 3.3 Measurement result of calculation time and parameter φ_0 relation of m-KFVS method in Sod's shock tube problem.

Tab. 3.1 Measurement results of calculation time of two types of m-KFVS method (with optimum parameters), KFVS method, AUSM method and Roe method in Sod's shock tube problem.

scheme	calculation time (sec.)
m-KFVS-1	$(1.5600 \pm 0.0000) \times 10^{-2}$
m-KFVS-2	$(1.5600 \pm 0.0000) \times 10^{-2}$
KFVS 法	$(1.5600 \pm 0.0000) \times 10^{-2}$
AUSM 法	$(7.0200 \pm 0.7800) \times 10^{-2}$
Roe 法	$(4.29002 \pm 0.07800) \times 10^{-1}$

4. まとめ

本研究では、m-KFVS 法のパラメータ決定手法に改良を加え、計算時間の短縮を図った。提案した m-KFVS 法は、Anil 他 m-KFVS 法と計算精度がほぼ等しく、パラメータ φ_0 が十分に小さい場合において、m-KFVS 法の計算時間の短縮に成功したと考えられる。

一方、最適パラメータにおいては、提案した方法と Anil の方法で計算時間が等しく、計算時間が短縮される事は無かった。しかし、実験では時間刻みが一定値以上に保たれている為、計算時間が増大し続ける事は無くなったと考えられる。また、高温領域や高速流れにおける計算時間の短縮の可能性も示された。今後、Sod の衝撃波管問題よりも高温高速な問題を用いて検討する必要があると考えられ、今後の課題として残った。

2 種類の m-KFVS 法においては、パラメータ φ_0 は経験的に与える必要があり、パラメータ決定の為に時間を費やす必要がある。この為、パラメータを理論的に与える必要があると考えられ、今後の課題として残った。

参考文献

- (1) 日本機械学会編, “1 章 原子・分子の流れとしてみた流体力学”, 原子・分子の流れ : 希薄気体力学とその応用, 共立出版株式会社 (2009), pp. 1-15.
- (2) 日本機械学会編, “3 章 気体の平衡状態”, 原子・分子の流れ : 希薄気体力学とその応用, 共立出版株式会社 (2009), pp. 37-57.
- (3) 小林敏雄編, “7 章 稀薄流の数値解析”, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社 (2003), pp. 309-342.
- (4) N. Anil, N.K.S. Rajan and S.M. Deshpande, “Modified kinetic flux vector splitting (m-KFVS) method for compressible flows”, Computers & Fluids, Vol. 48, No. 1 (2011), pp. 137-149.
- (5) 小林敏雄編, “3 章 圧縮性流体の数値解析”, 数値流体力学ハンドブック, 丸善株式会社 (2003), pp. 67-120.
- (6) 嶋英志, “簡単な圧縮性 CFD スキームの話”, ながれ, Vol. 34, No.2 (2015), pp. 67-79.
- (7) 山下和之, CAN1D モデルパッケージ md_shktb 衝撃波管, ver1, 宇宙シミュレーション・ネットラボラトリーシステムの開発 (平成 12 年度計算科学技術活用型特定研究開発推進事業), http://www.astro.phy.s.chiba-u.ac.jp/netlab/cans/cans1d/md_shktb/Readme.pdf, (2016/10/13 参照).