

低エンタルピー条件下における

極超音速平板境界層の線形安定性について

Linear Stability of a Hypersonic Boundary-layer at a Low-enthalpy condition

- 井手優紀, 宇宙航空研究開発機構, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, E-mail: ide.yuki@jaxa.jp
伊藤勝宏, 宇宙航空研究開発機構, 宮城県角田市君萱字小金沢 1, E-mail: ito.katsuhiko@jaxa.jp
Yuki IDE, JAXA, 7-44-1 Jindaiji Higashi-machi, Chofu-shi, Tokyo
Katsuhiko ITO, JAXA, 1 Koganesawa, Kimigaya, Kakuda-shi, Miyagi

Linear stability of a Mach 6.8 boundary layer is investigated at a low-enthalpy condition of the HIEST wind-tunnel. Fundamental stability aspects for waves with frequency of 15kHz, 330kHz and 345kHz, predominantly detected in the experiment, reveal that observed low-frequency waves are not due to the first mode instability and that, in some regions, the waves satisfy resonant conditions in that the combined phase of the two waves matches the phase of the third wave. In this study, boundary modes are analyzed in terms of phase velocity, based on Fedorov's classification (Fedorov A. V., Annu. Rev. Fluid Mech. (2011), 43, 79-95). It follows that the frequency determining whether an unstable mode falls into *S* or *F* mode is found to be around 87.5 kHz.

1. 研究の背景

線形安定性理論(LST)によると, 極超音速二次元境界層において最も成長するモードはMackのsecondモード⁽¹⁾である. secondモードの遷移機構における役割については, これまで多くの研究がなされてきたが完全に理解されていない. 例えばAEDC風洞⁽²⁾やNASA M6QT風洞⁽³⁾を用いた実験においては, LSTでは安定な領域にて低周波の成長とそれに続く高周波との位相結合が観測されているけれども, 低周波の発生要因やそれ以後の物理についてはよく分かっていない. 最近Chenら⁽⁴⁾は, 自身の風洞実験条件におけるflaredな円錐上の極超音速境界層をとり上げ, その安定性について安定解析手法により検討した. 彼らは, MackのfirstモードまたはGörtlerモードに属する低周波と, 振幅の大きな高周波間の相互作用を考えることで, secondモードの振幅が大きくなると低周波に位相変化が生じることや, それが高周波と共鳴することによって低周波に急成長が起こることなどを明らかにした.

JAXA高温衝撃風洞(HIEST)⁽⁵⁾を用いた実験においても, この相互作用の存在を窺わせる結果が認められている. これを受けてIto⁽⁶⁾らは最近, 一つの低周波と二つの高周波間の非線形共鳴についての理論を非粘性擾乱方程式に基づいて構築した. その結果, 三波間の周波数比が大きくなるほど共鳴作用も著しくなることが示された. しかしその物理に関する詳細な解析はまだなされておらず, 低周波の発生要因についても分かっていない.

本研究の目標は, Itoの理論の妥当性を安定解析手法により検証することである. Chenらによる検討も類似の相互作用に着目しているけれども, 本研究とは以下の二つの点で異なっている. まず, 本境界層はstraightな円錐上に形成されており, 壁面温度が外縁値と一致する冷たい流れである. 次に, HIESTの実験で観測されたものは, 高周波よりも先に発達する高振幅な低周波を含む相互作用である. 以上からまずは, 本境界層の基本的な安定性を把握することが重要と考えられる. 特に, 理論における共鳴条件を満足し, かつ実験で計測された擾乱をLSTの解によって近似可能かどうかについて検討する必要がある. これまで低周波と高周波間の共鳴条件の満足性の観点から, 極超音速境界層の安定性解析が実施された例は少ない. そこで本研究では, HIESTの実験条件下の境界層の線形安定性を調査することによって, 計測された擾乱の増幅特性と共鳴条件の満足性を検討することを目的とした. なお結果の整理においては, Fedorov^(7,8)の解の分類方法を採用し, 各擾乱がどの一様流擾乱と結びついているかについても検討した.

2. 数値解析法

本研究では, 微小擾乱の消長を記述する線形安定方程式⁽⁹⁾によって基本流の安定性を調べた. なお擾乱 \mathbf{q}' の形は次式である.

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] + c.c. \quad (1)$$

ただし, x, y, z はそれぞれ主流方向, 壁面垂直方向, スパン方向の座標, t は時刻であり, α, β, ω はそれぞれ擾乱の主流方向とスパン方向の波数と周波数である. なお本研究では, 擾乱の空間的消長にのみ着目するので, α を複素数, β と ω を実数と定義した. また, $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{T})^T$ は y 方向の振幅関数であり, $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ はそれぞれ x, y, z 方向の各速度成分, $\tilde{\rho}$ は密度, \tilde{T} は温度である. 圧力 \tilde{p} は理想気体の状態方程式を通して得られる. 解くべき式は, 式(1)を線形擾乱方程式に代入すれば導出され, 最終的には以下にまとめられる.

$$(\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 D + \mathbf{L}_2 D^2) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{L}_i (i = 0, 1, 2)$ は α, β, ω と基本流の物理量により構成される 5×5 の係数行列, D は y 方向に関する微分作用素である. $\tilde{\mathbf{q}}$ に対する境界条件は壁面と無限遠方の位置においてそれぞれ課され, 次式で与えられる.

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{T} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0. \quad (3a)$$

$$(\mathbf{L}_0|_{y \rightarrow \infty} + \mathbf{L}_1|_{y \rightarrow \infty} D) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{as} \quad y \rightarrow \infty. \quad (3b)$$

なお本研究では, 超音速モードを扱うため上部境界条件(3b)として, 非粘性擾乱方程式に基づくThompsonの条件^(10,11)を採用した.

3. 基本流

基本流はLevy - Lees - Dorodnitsyn変換⁽¹²⁾を施した圧縮性二次元の平板境界層方程式の相似解である. 外縁条件にはHIESTの低エンタルピー条件の表一の値を設定した. ただし下付き添え字 e と w はそれぞれ境界層外縁と壁面の位置における値であることを示す. 安定性を特徴づける壁面温度の条件は, 外縁の値と一致する等温条件($T_w = T_e$)に相当する. 断念条件下では, 壁面温度は $T_w (= T_{ad}) = 8.51T_e$ 程度にまで上昇するので, それに比べるとこの境界層は冷たい. ここで, T_{ad} は断念条件下における壁面温度を意味する. 得られた相似解を図1に示す. 横軸は相似変数 η である.

Tbl. 1 Flow condition at the boundary layer edge.

Ma_e	T_e [K]	ρ_e [kg/m ³]	μ_e [kg/(ms)]	T_w	Pr
6.7586	295.6387	0.039863	0.00001825641	T_e	0.7

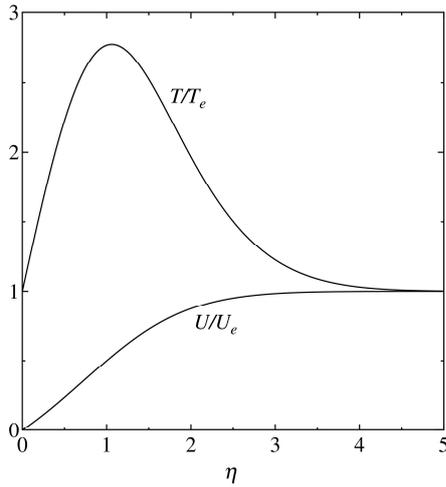


Fig. 1 Similarity solutions for a hypersonic 2D boundary layer.

4. 安定解析の結果

4. 1 二次元攪乱に対する固有値特性

一般に最も不安定なsecondモードは二次元波であるので⁽¹⁾, まずは攪乱のパラメータを $\beta = 0$ に固定してLST解析を実施した. ω については実験にて計測された支配的な攪乱の周波数で, かつItoの理論における共鳴条件を満たす可能性のある組合せの15kHz, 330kHz, 345kHzをとり上げた.

まず, 図2と3に330kHzと345kHzを持つ各モードの位相速度 $c = \omega/\alpha_r$ と成長率 $-\alpha_i$ の結果を与える. ただし下付き添え字 r と i はそれぞれ複素数の実数と虚数部を表す. 横軸はともにReynolds数 Re であり, $-\alpha_i$ には局所の基準長さ $\delta(x)$ による無次元化が施されている. ここで, Re と δ の定義は以下の通りである.

$$Re = \frac{\rho_e U_e \delta(x)}{\mu_e}, \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{x \mu_e}{\rho_e U_e}}. \quad (4)$$

各図において, 記号付き曲線は330kHz, 記号無し曲線は345kHzを持つモードに対する結果である. 図2の各実太線は, 四つの連続モード⁽³⁾の各分岐点における位相速度であり, 大きな値の順から, 早い特性速度を持つ一様流音波($U_e + a_e$), 渦度/エントロピー波(U_e), 遅い特性速度を持つ一様流音波($U_e - a_e$)に相当する. 結果の整理においてはFedorov^(7,8)にならない, 前縁近傍での位相速度によって各モードをFモード($U_e + a_e$ に漸近)とSモード($U_e - a_e$ に漸近)に分類した. なおFモードについては多数の解が存在するので, \tilde{p}_r の境界層内における零点の数 $n - 1$ によってこれらを判別し, $F_{(n)}$ と表記した. 結果を見ると, 両ケースとも $Re = 1000$ 辺りに最大の成長率を迎える不安定解が存在する. 過去の研究^(7,8)によれば, Mackのsecondモードとは, Sと $F_{(1)}$ 間の位相速度の一致(同期)による解の分岐で不安定化したものと報告されているけれども, 図2においては厳密な同期は起こっていない. Fedorovの観点による分類では, 本研究の不安定モードは両ケースともにSモードであることが分かった. これは遅い特性速度を持つ一様流音波が前縁近傍で受容され, それが下流につたって不安定化することを示唆している. 一方, $F_{(1)}$ モードは流れ場全域で安定ではあるけれども, 異なるモードとの同期による解の分岐の役割を担う. 例えば, Sモードが安定に転じた後は, $Re = 2200 \sim 2300$ において, $F_{(1)}$ は $F_{(2)}$ モードと同期し, ($F_{(2)}$ モードの)成長率が増す. いわゆるMackのthirdモードである.

次に, 15kHzを持つモードに関する結果を図4と5に示す. このケースについては, SとFモードの同期による解の分岐と不安定化が認められる. 一方, 高周波の結果と異なる点として, 低周波の場合には不安定解はFモードであった. 周波数が低くなるにつれ

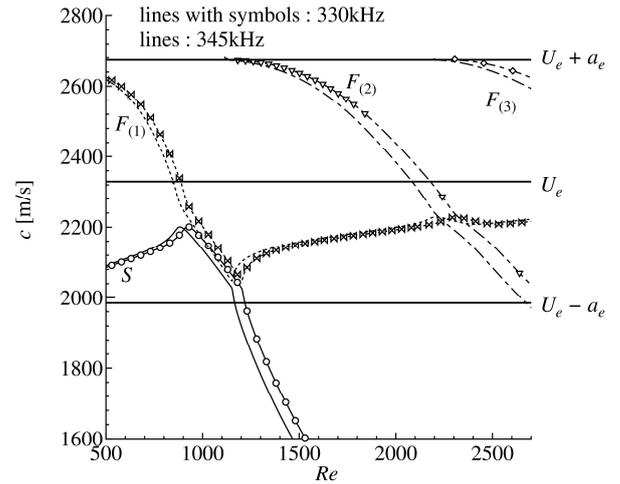


Fig. 2 Phase velocities of high frequency disturbances.

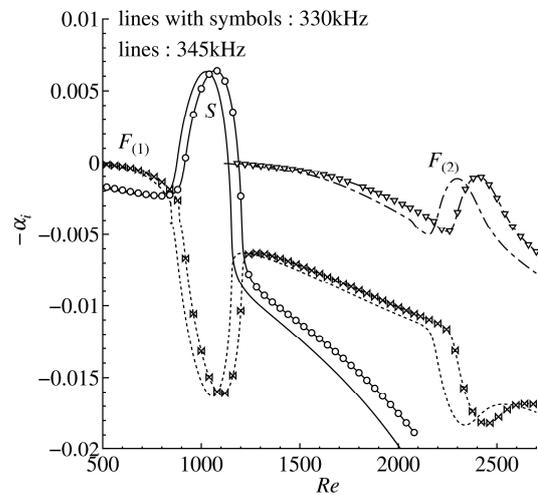


Fig. 3 Spatial growth rates in figure 2.

て, 不安定解がSからFモードに変化することはChuvakhovらの検討⁽¹⁴⁾においても報告されているが, その物理的背景についてはよく分かっていない. 過去の研究^(7,14)によれば, 不安定解がどちらに属するかは諸条件(Ma_e 数, 温度条件, 周波数など)に依存するようである.

さて, HIESTの実験においてはともに発達する低周波と高周波の共存が認められる. ここで, 図3と5を比較してみると, 低周波と高周波の不安定領域は互いに離れていることが分かる. よって, 実験で計測された三波(15kHz, 330kHz, 345kHz)の全てがMackのsecondモードであることはなさそうである. 一方, 高周波の下中立安定点付近($Re = 800 \sim 900$)において, 低周波のSとFモードが, 成長率の -10^{-5} 程度のわずかな安定状態であることはさらに調べていく必要がある. なぜなら, LST解析において無視された流れの(発達する場合の)非平行性は一般に攪乱に対して不安定化に寄与し, もしその効果を含んだ解析における成長率が正値をとれば, 発達する三波の共存可能な流れ場を構成できるからである.

最後に高周波の結果にない特徴として, 本研究における低周波には不安定な超音速モード($a_e < U_e - c$)のあることが明らかとなった. このモードの特徴は, 境界層の外側における振動的振る舞いであり, 物理的にはある角度で壁面から外側へ向かう音波の自発的放射(spontaneous acoustic radiation)の発生を意味する. 特に, 不安定な超音速モードではこの放射が強い. 自発的音波放射は冷たい境界層の場合に見られる現象であり, 最近ではBitter

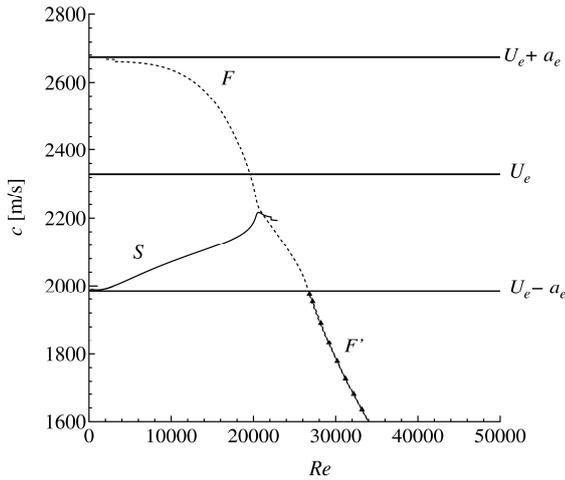


Fig. 4 Phase velocities of low frequency disturbances.

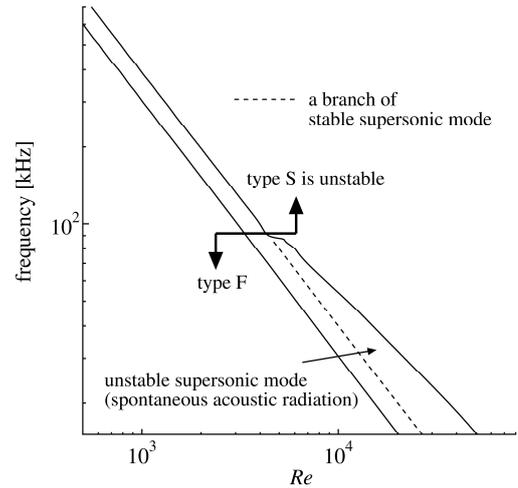


Fig. 6 Neutral stability curve of 2D Mack second modes.

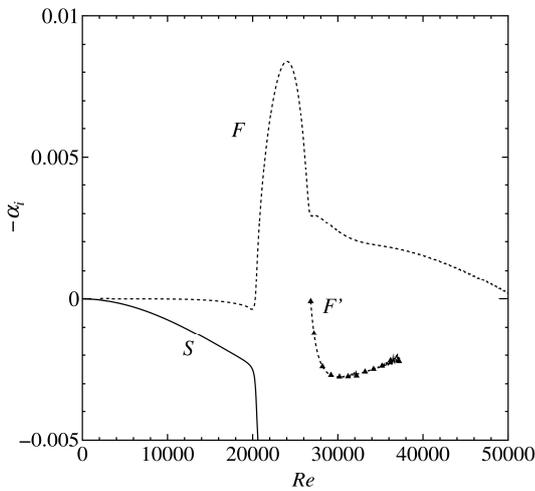


Fig. 5 Spatial growth rates in figure 4.

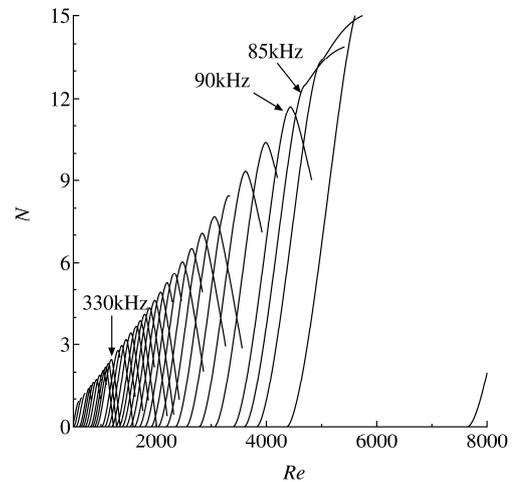


Fig. 7 N factors.

ら⁽¹⁵⁾やChuvakhovら⁽¹⁴⁾によって詳しく調べられている。それらによれば、自発的音波放射が生じると高周波から低周波へのエネルギーの輸送が起り、その結果、高周波の成長が抑制されることなどが明らかとなっている。なお図4と5の記号付き曲線(F')は、上流のFモードと $U_e - a_e$ を持つ連続モードが同期した際の解の分岐によって生じる安定な超音速モードである。

4. 2 中立安定曲線、N 値および三次元攪乱に対する解析結果

ここでMackのsecondモードに対する解析結果のまとめとして、中立安定曲線とN 値の結果をそれぞれ図6と7に与える。なおN 値の定義は次式である。

$$N(x; \omega) = \int_{x_0}^x -\alpha_i(x; \omega) dx. \quad (5)$$

ただし x_0 は下中立安定点とする。図6からHIESTの実験条件下では、約87.5kHzを境にして、それよりも高い周波数を持つ不安定なモードはSモード、低い周波数を持つモードはFモードに分類されることが分かった。よって、安定な超音速モードの起点の破線部から上中立安定点までの領域では、不安定な超音速モードによる強い自発的音波放射が発生すると考えられる。このことはN 値の結果にも表れており、85kHzから90kHzにかけて曲線の形に変化が生じるのは、図4と5において、Fモードが $U_e - a_e$ を持つ連続モードと同期する場所で、成長率の傾きが変化し、高周波の場合と比べて不安定領域が拡大するためである。

さて、Malik⁽¹⁶⁾は二つの冷たい境界層に対する安定解析と飛行実験結果の比較によって遷移N 値(N_{tr})を評価している。その結果、 Ma_e 数が14と5.6の境界層に対する各 N_{tr} 値は、それぞれ約9.5と約11.2であった。またMortensen⁽¹⁷⁾は、一様乱れの強い風洞実験環境下では N_{tr} 値はさらに小さく5程度になると報告している。ここで、HIEST実験の遷移開始位置付近にて計測された表面圧力揺らぎのパワースペクトルには、15kHzと330kHz付近にピークを持つ乱れが見られる。HIEST風洞における一様乱れの定量化はまだなされていないけれども、図7を参考にして、LST解析結果に基づく e^N 法の N_{tr} 値を推算すると、3程度と小さく実験時の一様乱れが非常に大きかったことが窺える。

一方、15kHzを持つ低周波に関しては、図7によればN が10以上の値をとることになり、 e^N 法によって判断すればMackのsecondモードではなさそうである。その他に考えられる不安定性は、Mackのfirstモードによるものである。そこで次に、15kHzを持つfirstモードに対するLST解析を実施した。一般に最も不安定なfirstモードは三次元波であるので⁽⁴⁾、ここでは β をパラメータとして解析を実施した。その結果得られた中立安定曲線を図8に示す。縦軸は ω と音速 a_e によって無次元化された β である。また、本研究では壁面冷却の影響を検討するため、様々な T_w に対する中立安定曲線を描いた。なお、本研究における温度条件は、 $T_w = 0.116T_{ad}$ である。実線($T_w = T_{ad}$)から小破線($T_w = 0.6T_{ad}$)までの結果を見ると、無次元 β がおおよそ0.25以下までは三次元化による不安定

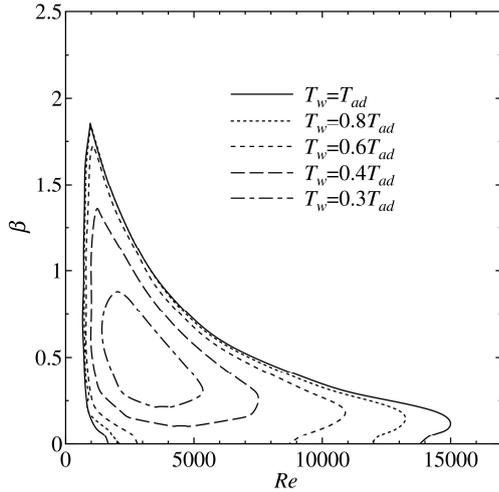


Fig. 8 Neutral stability curve of oblique first modes with frequency of 15kHz.

領域の拡大, それより大きな β に対してはその縮小が見てとれる. 壁面の冷却効果については, T_w の減少につれて不安定領域が縮小することから, 過去に報告⁽¹⁾のある通り, firstモードに対して安定化に寄与することが分かる. 特に, 本解析条件($T_w = 0.116T_{ad}$)においては, 全ての β にわたって不安定領域の存在しないことが明らかとなった. したがって, HIEST実験で計測された15kHzを持つ低周波はMackのfirstモードでもない.

4. 3 共鳴点の有無

最後に, HIEST実験条件における三波間の共鳴点の有無について検討する. ここで共鳴条件とは, 三波の位相 $\theta^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ の間に以下の関係式が成立することである.

$$\theta^{(1)} = \theta^{(2)} + \theta^{(3)}, \quad [\theta^{(i)} = \alpha_r^{(i)} x + \beta^{(i)} z - \omega^{(i)} t]. \quad (6)$$

これまで, 式(6)に基づき議論されたものには, 例えばCraik⁽¹⁸⁾による非圧縮性境界層における分調波共鳴機構や, Kosinovら⁽¹⁹⁾とMayerら⁽²⁰⁾による超音速境界層における非対称分調波共鳴機構などが挙げられる. 一方で, 極超音速境界層における大きな周波数比 $\omega^{(i)}/\omega^{(j)} (i \neq j)$ を持つ波に関する共鳴機構について着目した例はあまりない. ここで, 本研究における周波数をそれぞれ $\omega^{(1)} = 15\text{kHz}$, $\omega^{(2)} = 330\text{kHz}$, $\omega^{(3)} = 345\text{kHz}$ とすると $\omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \omega^{(3)}$ を満たすので, 共鳴する波の候補として二次元波に限定すると, 結局, 本研究の共鳴条件は以下となる.

$$\alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} = \alpha_r^{(3)}. \quad (7)$$

Itoの理論では, さらに三波の位相速度の一致を要求するけれども, 本解析結果によるとそのような解は存在しなかった. そこで次に, 式(7)を満足する解の有無について調査した. なお, 三波が成長し乱流遷移が開始されるためには, 共鳴の起こる領域において成長攪乱の存在が必要と考えられる. そこで, 低周波または高周波の下中立安定点よりも少し上流側の領域にて, 共鳴点の探索を実施した. 高周波の発達領域(図3)での各モードの波数を描いた結果が図9である. 三つの実線は各Sモード, 二つの点線は高周波の各 $F_{(1)}$ モードの波数を表している. また二種類の記号は, 15kHzを持つSモードと330kHzを持つSモードおよび $F_{(1)}$ モードの局所的な波数の各合計値である(つまり $\alpha_{r,S}^{(1)} + \alpha_{r,S}^{(2)}$ と $\alpha_{r,S}^{(1)} + \alpha_{r,F_{(1)}}^{(2)}$). ただし下付き添え字SとFはそれぞれSモードとFモードの波数の意味. 結果を見ると, $Re = 500 \sim 1000$ において, 各モードは $\alpha_{r,S}^{(1)} + \alpha_{r,S}^{(2)} \approx \alpha_{r,S}^{(3)}$ と $\alpha_{r,S}^{(1)} + \alpha_{r,F_{(1)}}^{(2)} \approx \alpha_{r,F_{(1)}}^{(3)}$ の関係式を満たすことが明らかとなった.

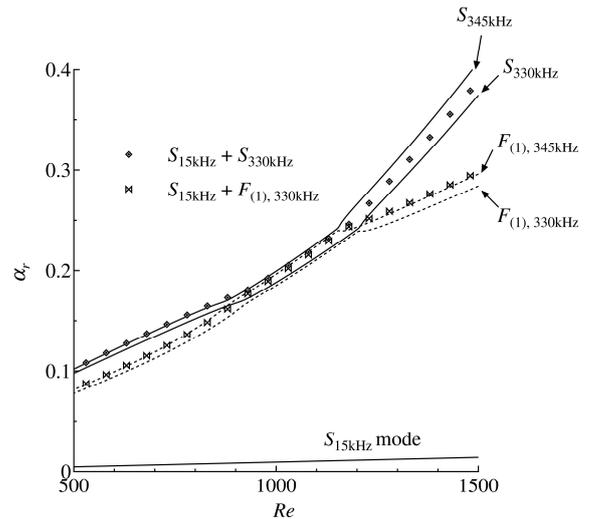


Fig. 9 Streamwise development of wavenumbers.

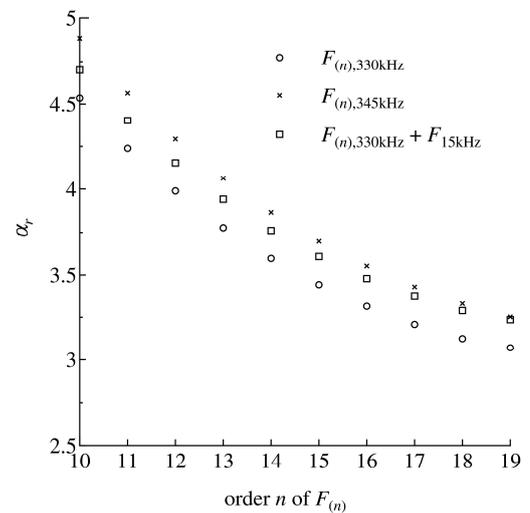


Fig. 10 Wavenumber vs order n of $F_{(n)}$ mode at $Re=20190$.

特に前者については, わずかな安定状態にある低周波のSモードと不安定な各Mackのsecondモードを含む共鳴状態を意味しているため, 今後詳しく調べていく必要がある. 最後に, N 値の結果からはその存在は現実的ではないが, 共鳴点の有無という観点にのみ立って低周波の中立安定点付近にて共鳴点を探索した結果を図10に示す. この場合, 中立安定状態に近い高周波は高次の $F_{(n)}$ モードのみであるから, これらのモードと低周波のFモード間の共鳴の可能性について調べた. 図には, $Re = 20190$ における各モードの波数を示してある. ただし, 記号○は $\alpha_{r,F_{(n)}}^{(2)}$, 記号×は $\alpha_{r,F_{(n)}}^{(3)}$ であり, 記号□は $\alpha_{r,F_{(n)}}^{(2)}$ と $\alpha_{r,F}^{(1)}$ を足し合わせた波数である. 結果を見ると, この位置では19次の高次モードが $\alpha_{r,F}^{(1)} + \alpha_{r,F_{(19)}}^{(2)} \approx \alpha_{r,F_{(19)}}^{(3)}$ の関係式を満たすことが分かった.

5. 結び

本研究では極超音速境界層の遷移機構を明らかにするために, HIEST風洞の低エンタルピー条件における Ma_e 数が6.8の境界層の線形安定性を調査し, 実験結果を参考にしながら, 主に以下の点について明らかにした.

・実験にて計測された15kHzを持つ低周波は, いわゆるMackのsecondモードでも, 三次元波を含むfirstモードでもない. しかし,

330kHzと345kHzを持つMackのsecondモードの不安定な領域における低周波は、成長率が -10^{-5} 程度のわずかな安定状態にあり、流れの非平行性を考慮すれば不安定に転じる可能性がある。

・共鳴条件の満足性について、三波間にphase lockは生じないものの、式(7)の共鳴条件を満たす領域はいずれかの波の下中立案定付近にて存在することが分かった。

参考文献

- (1) Mack, L. M., AGARD Report 709, (1984).
- (2) Kimmel, R. L. and Kendall, J. M., AIAA-91-0320, (1991).
- (3) Wilkinson, S. P., AIAA-97-1819, (1997).
- (4) Chen, X., Zhu, Y. and Lee, C., J. Fluid Mech. 820 (2017), pp.693-735.
- (5) Tanno, H., Komuro, T., Sato, K., Itoh, K., Takahashi, M. and Fujii, K., AIAA-2009-781, (2009).
- (6) Itoh, K., Tanno, H. and Komuro, T., AIAA-2017-1462, (2017).
- (7) Fedorov, A. V., Annu. Rev. Fluid Mech. 43 (2011), pp.79-95.
- (8) Fedorov, A. V. and Tumin, A., AIAA J. 49(8) (2011), pp1647-1657.
- (9) Malik, M. R., Chuang, S. and Hussaini, M. Y., J. Appl. Math. Phys. 33 (1982), pp.189-201.
- (10) Chang, C.-L., NASA TM-2004-213233 (2004).
- (11) Thompson, K. W., J. Comput. Phys., 68 (1987), pp.1-24.
- (12) Tempelmann, D., Hanifi, A. and Henningson, D. S., J. Fluid Mech. 704 (2012), pp.251-279.
- (13) Balakumar, P. and Malik, M. R., J. Fluid Mech. 239 (1992), pp.631-656.
- (14) Chuvakhov, P. V. and Fedorov, A. V., J. Fluid Mech. 805 (2016), pp.188-206.
- (15) Bitter, N. P. and Shepherd, J. E., J. Fluid Mech. 778 (2015), pp.586-620.
- (16) Malik, M. R., AIAA J. 40(3) (2003), pp.332-344.
- (17) Mortensen, C. H., J. Fluid Mech. 846 (2018), pp.789-814.
- (18) Craik, A. D. D., J. Fluid Mech. 50 (1971), pp.393-413.
- (19) Kosinov, A. D., Seminov, N. V., Shevelkov, S. G. and Zinin, O. I., Nonlinear Instability in Nonparallel Flows. Springer-Verlag (1994), pp.196-205.
- (20) Mayer, C. S. J., Wernz, S. and Fasel, H. F., J. Fluid Mech. 668 (2011), pp.113-149.