

# 回転-静止円盤間に生じる流れの全体安定性解析

Global stability analysis of confined cavity flow between a rotating and stationary disk

- 小寺 裕基, 阪大院工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, kodera@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
- 岡林 希依, 阪大院工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, okabayashi@mech.eng.osaka-u.ac.jp
- 竹内 伸太郎, 阪大院工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, shintaro.takeuchi@mech.eng.osaka-u.ac.jp
- 梶島 岳夫, 阪大院工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, kajisima@mech.eng.osaka-u.ac.jp
- 安 炳辰, 荏原製作所, 神奈川県藤沢市本藤沢 4-2-1, an.byungjin@ebara.com
- 能見 基彦, 荏原製作所, 神奈川県藤沢市本藤沢 4-2-1, nohmi.motohiko@ebara.com
- 大淵 真志, 荏原製作所, 神奈川県藤沢市本藤沢 4-2-1, obuchi.masashi@ebara.com

Global stability analysis (GSA) is applied to a 3-D confined cavity flow between rotating and stationary disks (viz., rotor and stator). The Arnoldi method extended for incompressible viscous flow is used together with the eigenvalue spectrum conversion to solve the eigenvalue problem of the GSA. As a first step, the GSA is conducted in an axisymmetric flow, and circular vortices are obtained as eigen modes. Then, the GSA is applied to a flow with circular vortex at a higher Reynolds number, and eigen vectors of spiral vortex are obtained. The numbers of the several spiral vortices in the circumferential direction show good agreement with the unstable modes reported in the literature.

## 1. 緒言

円筒で囲まれた回転-静止円盤間に生じる流れでは、両円盤近傍の境界層の不安定化により大規模な螺旋状の渦構造が発生し、その挙動は詳細に調べられている<sup>(1, 2)</sup>。遠心ポンプのような流体機械の設計において、このような螺旋渦の発生を予測・制御することは抵抗低減につながる重要な課題であり、回転-静止円盤間の流れの安定性の研究<sup>(2, 3)</sup>が盛んに行われてきた。しかしながら、これらの安定性に関する研究は円盤の半径を無限大と仮定し、半径方向に相似となる速度分布を安定解析の基本流としており、実機に存在する円筒壁による影響を考慮していない。これらは流れ場を境界層、剥離せん断層、後流などの局所流に分解し、それぞれに平行流近似を用いて局所安定性を解析するものである。一方、局所安定性と対比される全体安定性に関する研究<sup>(4, 5, 6, 7, 8, 9)</sup>が近年行われてきている。全体安定性解析は流れ場を局所流に分解せず、一体として扱うため、局所流の相互関係が考慮でき、任意の流れ場に対して適用できるため工学的応用範囲が広い。したがって、前述した円筒壁の影響を考慮した安定解析が可能である。

本研究の目的は全体安定性解析により円筒で囲まれた回転-静止円盤間に生じる大規模な螺旋渦構造の発生メカニズムを明らかにすることである。本稿では異なる二つのレイノルズ数における定常な三次元流れを基本流として、それぞれ全体安定性解析を行い、その結果について報告する。

## 2. 全体安定性解析

### 2.1 概要

Navier-Stokes 方程式の空間微分項をまとめて  $f$  として、

$$\frac{du}{dt} = f \quad (1)$$

と記述する。この時、 $u, f$  はともに  $N$  次元ベクトル、 $u = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_N)$  である。 $N$  は  $u$  の自由度であり、格子数と変数 (速度, 圧力など) の数の積で与えられる。 $N$  は二次元解析では  $10^4 \sim 10^5$ , 三次元解析では  $10^5 \sim 10^7$  程度である。基本流の速度を  $\bar{u}$ , 微小擾乱を  $u'$  とおき、 $u = \bar{u} + u'$  を (1) に代入し、微小擾乱の時間発展方程式

$$\frac{du'}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) u' \quad (2)$$

を得る。その解を  $u' = \tilde{u}e^{\lambda t}$  ( $u'_i \in \mathcal{R}, \tilde{u}_i \in C, \lambda_i \in C$ ) ( $i = 1, \dots, N$ ) と仮定することで方程式は

$$Au' = \lambda u' \quad \text{where } A = \frac{\partial f}{\partial u} \quad (3)$$

なる固有値問題に帰着する。ここで、 $A$  は  $N \times N$  次元の非対称実行列である。固有値  $\lambda$  の実部はその正/負が微小擾乱の発達/減衰を表し、虚部が微小擾乱の振動数を表す。

### 2.2 固有値求解の方法

式 (3) における係数行列  $A$  は非常に大規模であるので全固有値を求めることは事実上不可能である。そこで全体安定性解析では Time-Stepping Iterative Approach<sup>(4, 5, 6, 7, 8, 9)</sup> (以後, TSIA) と呼ばれる方法が用いられることが多い。TSIA は近似固有値解法である Arnoldi 法<sup>(10)</sup> と CFD の時間積分ルーチンを利用したスペクトル変換法を組み合わせることによって、効率的に固有値問題を解くことができる手法である。最も重要な、より不安定化しやすい固有モードだけの近似固有値を求めることにより、次元数の低下した固有値問題を導く。また、その大きな利点は、大規模係数行列  $A$  を直接計算する必要が無いこと、従来の流体の数値計算法を用

いて解析可能であることである．以下にその詳細を示す．

Arnoldi 法は  $N \times N$  の大規模非対称行列  $A$  の固有値を近似的に求める． $A$  の近似固有値  $\varphi^{(M)}$  は以下のように  $M$  個の正規直交基底の線形和で表される．

$$\begin{aligned}\varphi^{(M)} &= z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \cdots + z_{M-1} \zeta_{M-1} + z_M \zeta_M \quad (4) \\ &= \mathbf{V}_M \mathbf{z}^{(M)} \quad (5)\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_M = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M)$$

$\varphi^{(M)}$  を式 (3) に代入して得られる残差ベクトルが擾乱ベクトル  $\zeta_j$  と直交する条件を課す．

$$(\mathbf{A} - \lambda_a^{(M)} \mathbf{I}) \varphi^{(M)} \perp \zeta_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad (6)$$

$\lambda_a^{(M)}$  は  $A$  の近似固有値であり， $\mathbf{I}$  は単位行列である．上式を変形して， $N \times N$  から  $M \times M$  ( $M < N$ ) に次元数が低下した

$$\mathbf{V}_M^T \mathbf{A} \mathbf{V}_M \mathbf{z}^{(M)} = \lambda_a^{(M)} \mathbf{z}^{(M)} \quad (7)$$

なる固有方程式が得られる．一般に，Arnoldi 法を用いた計算では，絶対値の大きな固有値を持つ固有モードについては  $N$  に比べて十分小さな  $M$  ( $M \ll N$ ) で収束解が得られる<sup>(5)</sup>．したがって，安定性の低いモードの固有値を効率的に得るために，固有値のスペクトル変換を行う．式 (3) を線形性を損なわない範囲で時刻  $t$  から時刻  $t+T$  まで積分すると次式となる．

$$\mathbf{u}'(t+T) = \mathbf{B} \mathbf{u}'(t) \quad \text{where } \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A}T) \quad (8)$$

$\mathbf{B}$  は擾乱を  $T$  だけ時間発展させる作用素である．これにより  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_a$  と  $\mathbf{B}$  の固有値  $\lambda_b$  の関係は次のようになる．

$$\lambda_b = \exp(\lambda_a T) \quad (9)$$

このスペクトル変換により， $\lambda_b$  での安定性の判定は次のようになる．

$|\lambda_b| > 1$  不安定，  $|\lambda_b| = 1$  中立，  $|\lambda_b| < 1$  安定

ゆえに，不安定なモードの固有値が安定なモードの固有値より絶対値が大きくなるので，効率良く Arnoldi 法を適用できる．

TSIA では Arnoldi 法を行列  $\mathbf{B}$  に対して適用し，固有値の逆変換をして行列  $\mathbf{A}$  の近似固有値を求める．よって，以降は Arnoldi 法に関することは  $\mathbf{B}$  を用いて記述する．

Arnoldi 法の計算アルゴリズムを示す．Arnoldi 法では次の反復的な方法で効率的に  $\mathbf{V}_M$  と  $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$  を計算する．任意初期ベクトル  $\mathbf{u}'_1$  に対し，

$$\zeta_1 = \mathbf{u}'_1 / \sqrt{\mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1} \quad (10)$$

を計算する．そして， $\zeta_{k+1}$  を順次，以下の反復で求める．

for  $k = 1$  to  $M$

$$\mathbf{u}'_{k+1} = \mathbf{B} \zeta_k - \sum_{j=1}^k h_{j,k} \zeta_j \quad (11)$$

$$h_{j,k} = \zeta_j \cdot \mathbf{B} \zeta_k \quad (12)$$

$$h_{k+1,k} = \sqrt{\mathbf{u}'_{k+1} \cdot \mathbf{u}'_{k+1}} \quad (13)$$

$$\zeta_{k+1} = \mathbf{u}'_{k+1} / h_{k+1,k} \quad (14)$$

next  $k$

$h_{j,k}$  は  $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$  の要素である．このアルゴリズムでは  $h_{j,k}$  は上 Hessenberg 行列として求められる．以降では，上 Hessenberg 行列  $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$  を  $\mathbf{H}$  とおく． $\mathbf{H}$  の固有ベクトルから  $\mathbf{B}$  の近似固有ベクトルは次のように計算する．

$$\mathbf{H} \psi_j = \lambda_j^{(h)} \psi_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad (15)$$

$$\varphi_j^{(M)} = \sum_{k=1}^M (\psi_j)_k \zeta_k \quad (16)$$

ここで， $\psi_j$   $\lambda_j^{(h)}$   $\psi_j^{(M)}$  はそれぞれ  $\mathbf{H}$  の固有ベクトル，固有値， $\mathbf{B}$  の近似固有ベクトルである．

上記のアルゴリズムにおいて，必ずしも大規模係数行列  $\mathbf{B}$  を直接知っておく必要は無く， $\mathbf{B} \zeta_k$  さえ求まれば良い．そこで基本流  $\mathbf{U}_0$  と微小擾乱  $\varepsilon \zeta_k$  との和及び差を取り，それを初期条件として  $T$  だけ時間発展させ，その解  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{U}_0 + \varepsilon \zeta_k)$ ， $\mathbf{u}_2 = \mathbf{B}(\mathbf{U}_0 - \varepsilon \zeta_k)$  から  $\mathbf{B} \zeta_k$  を次の式で順次計算する．

$$\mathbf{B} \zeta_k = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{2\varepsilon} \quad (17)$$

以上のようにして， $h_{j,k}$   $\zeta_k$ ， $\mathbf{B} \zeta_k$  を求めていく．

TSIA では，Arnoldi 法で縮小化された行列の次元  $M$  とスペクトル変換における時間積分区間  $T$  には任意性があり，固有値の精度に大きく影響する．

### 3. 数値計算法

#### 3.1 基礎方程式と離散化手法

円筒座標系での非圧縮 Navier-Stokes 方程式と連続の式を基礎方程式とする． $(r, \theta, z)$  方向の運動方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + \Lambda u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = & \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re_R} \left( \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \Lambda u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = & \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_R} \left( \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (19)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \Lambda u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_R} \Delta u_z \quad (20)$$

ただし,

$$\Lambda = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で表される．また，連続の式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

である．代表長さ，代表速度はそれぞれ円盤半径  $R_1$ ，円盤末端速度  $R_1\omega$  とし，レイノルズ数は  $Re_R = R_1^2\omega/\nu$  で表される． $\nu$  は動粘性係数である．

空間の離散化にはスタガード格子による 2 次精度中心差分で行う．時間進行法としては，対流項と粘性項に 2 次精度の Adams-Bashforth 法を用いる．速度場と圧力場のカップリングには SMAC 法を用いる．以上の計算法を基本流の計算及び全体安定性解析の TSIA の両方に用いる．

### 3.2 計算条件

計算対象は Fig. 1 の Rotor, Stator, Inner wall, Outer wall に囲まれた領域内の流れであり，Rotor は角速度  $\omega$  で回転している．アスペクト比  $L = (R_1 - R_0)/H$ ，曲率パラメータ  $R_m = (R_1 + R_0)/(R_1 - R_0)$  によりその形状を決定する．本計算では  $L = 5^{(1)}$ ， $R_m = 5^{(1)}$  とした．また，線形性を保つための係数  $\varepsilon$  は  $\varepsilon = 0.001^{(5)}$  と設定する．

境界条件は底面 ( $z = 0$ ) で  $(u_r, u_\theta, u_z) = (0, 0, r\omega)$  とし，その他の壁面 ( $z = H, r = R_0, R_1$ ) は  $(u_r, u_\theta, u_z) = (0, 0, 0)$  とする．ポアソン方程式は周方向にフーリエ変換し，各波数  $k_\theta$  ごとに二次元 ( $r, z$ ) の SOR 法を適用した．

軸対称流れに対する解析では， $r, \theta, z$  の各方向に等間隔に 64 の格子を配置し，時間刻みは  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-3}$ ，レイノルズ数は  $Re_R = 20000$  とした．また，環状渦を伴う流れに対する解析では， $r, z$  の各方向に tanh 関数を用いて不間隔に 64 の格子を配置し， $\theta$  方向は等間隔に 64 の格子を配置した．この時， $\Delta r_{\min} = 1.69 \times 10^{-3}$ ， $\Delta z_{\min} = 3.37 \times 10^{-4}$  である．時間刻みは  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ ，レイノルズ数は  $Re_R = 74250$  とした．

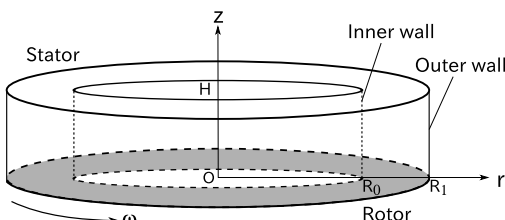


Fig. 1: Computational domain of a confined cavity flow between rotating and stationary disks.

### 4. 軸対称流れに対する全体安定性解析

基本流の  $r-z$  断面の速度ベクトルと  $v_z$  等値面をそれぞれ Fig. 2, 3 に示す．基本流は Rotor により  $r-z$  断面内に旋回する流れが生じており，上下壁の境界層から成る定常な軸対称流となっている．一般に Rotor の境界層は Ekman 層，Stator の境界層は Bödewadt 層と呼ばれる<sup>(1, 2)</sup>．

また，Rotor 近傍の流れが Outer wall に当たって上昇する様子が観察される．このことから円筒壁の影響を考慮した安定解析の必要性が示唆される．

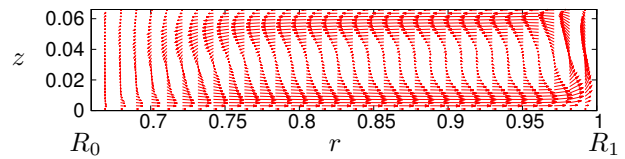


Fig. 2: Baseflow in the meridional plane drawn every 2 grids.



Fig. 3: Iso-surface of the baseflow. ( $v_z = 3.0 \times 10^{-3}$ )

この基本流に対して，縮小化次元数  $M$  を 600，時間進行  $T$  を Rotor が 2 回転する時間を基準とした無次元時間で 2 と設定して全体安定性解析を行った．Fig. 4 に固有値  $\lambda_n$  を降順に示す．比較のために  $M = 300, 700$  の場合も示した． $M = 700$  の場合と比較して， $M = 600$  では大きい方から 109 番目の固有値まで十分な精度で固有値が求まっている．一方で， $T$  に関する固有値の収束性を確かめるために Fig. 5 を図示した．計算を行った 3 ケースの時間積分区間では収束性があまりよくない．線形とみなせる時間スケールについて詳しく再度検討していく必要がある．

代表的な固有ベクトル (Mode1) を  $v_z$  の等値面として可視化した．Fig. 6(a) より  $Re_R = 20000$  の定常流に微小擾乱が加わると，Inner wall 付近では環状の渦構造が発達しやすいようである．この環状の渦構造は Serre ら<sup>(1)</sup> による DNS の研究で確認されたものと定性的に一致している．Serre ら<sup>(1)</sup> によると環状の渦は軸対称な Ekman 層と Bödewadt 層が不安定化したあとに生じる定在渦である．このことから，全体安定性解析では基本流が次の状態に遷移した際の流れを予測できたと考えられる．そ

れを確かめるため、もう一つのケースとして次節では環状の渦構造が含まれる  $Re_R = 74250$  の流れを基本流として全体安定性解析を行った。

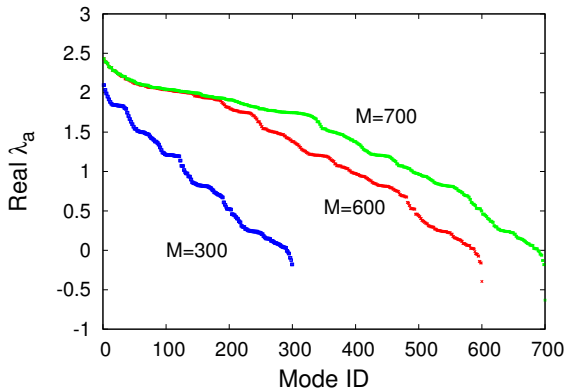


Fig. 4: Spectrum of the real part of  $\lambda_a$  in the descending order ( $T=2$ ).

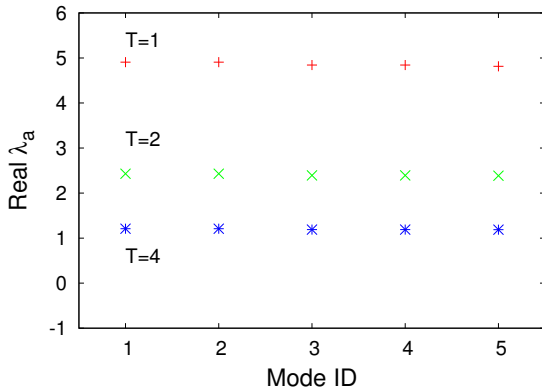


Fig. 5: Real part of  $\lambda_a$  of three different integration time  $T$  ( $M=600$ ).

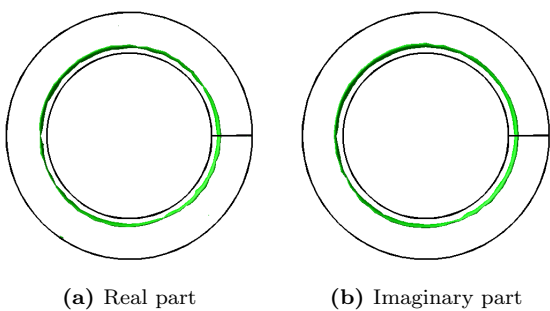


Fig. 6: Iso-surface of eigenvector of mode 1. ( $v_z = 5.0 \times 10^{-4}$ )

### 5. 環状渦を伴う流れに対する全体安定性解析

基本流の  $r-z$  断面の速度ベクトルと  $v_z$  等値面をそれぞれ Fig. 7, 8 に示す。Fig. 7 から基本流は  $Re_R = 20000$  の時よりも境界層の分離が進み、Ekman 層、コア層、Bödewadt 層の 3 領域から成る Batchelor タイプの流れである事が分かる。また、Fig. 8 より第 4. 節で導か

れた不安定モード (Fig. 6) に似た複数の環状の渦構造が実際に  $Re_R = 74250$  で発生していることが確認できる。

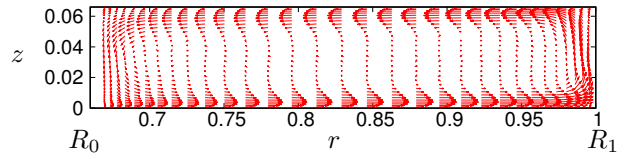


Fig. 7: Baseflow in the meridional plane drawn every 2 grids.



Fig. 8: Iso-surface of the baseflow. ( $v_z = 1.0 \times 10^{-3}$ )

この基本流に対して縮小化次元数  $M$  を 300, 積分時間  $T$  を無次元時間で 2 として全体安定性解析を行った。Fig. 9 に固有値  $\lambda_a$  を降順に示す。参考のために  $M=100, 200$  の場合も示した。Fig. 9 の分布の重なりが無いことから、本計算では十分な精度で固有値が求まっておらず、追加の計算が必要である。しかし、ほとんどの固有値は正であり、擾乱は発達していくため、不安定となるモードについて可視化を試みる。

Fig. 10, 11 に固有ベクトル (不安定モード) を  $v_z$  の等値面として可視化した。これらの他にも実部は環状、虚部は螺旋状であるものや実部は螺旋状、虚部は環状のものなど様々な固有モードの組み合わせが見られた。実部に関して、最大固有値の固有モードである Fig. 10(a) では、Rotor, Stator の近傍で環状の等値面が観察された。Fig. 11(a) では、これまで  $Re_R = 20000$  では観察されなかった螺旋状の渦構造が見られ、6 つの螺旋渦と 2 つの環状渦が共存状態にある。Serre ら<sup>(1)</sup> は  $Re_R = 90000$  に対応するレイノルズ数でも DNS を行っており、6 つの螺旋渦と 3 つの環状渦が共存状態にある可視化結果を得ている。螺旋渦の本数や 2 つの違う形状の渦が共存状態にある点で Fig. 11(a) はこの結果に類似する。

本節では遷移後の流れを予測できるのかを確かめる目的で環状渦を基本流にして全体安定性解析を行った。Launder ら<sup>(12)</sup> によると、低レイノルズ数から徐々に高レイノルズ数へ変化させていくと、上下の境界層から成る定常な軸対称流は環状渦を伴う流れへと遷移し、さらにその流れは螺旋渦と環状渦の共存状態を経て、螺旋渦のみの流れに遷移する。よって、本計算により「全体安定性解析では

基本流が次の状態に遷移した後の流れの予測ができる」という予想を支持する結果を得た。しかし、Fig. 11(a)では、Serre ら<sup>(1)</sup>のような Rotor と Stator で分離した渦構造を捉えることができていない。この理由は究明中である。

また、固有ベクトルの可視化結果から円筒壁付近で非常に渦が発達しやすいと推察されるが、基本流の  $r-z$  断面の速度ベクトルにおいては、円筒壁の境界層が十分に捉えきれていないように思われる。したがって、今後の課題として円筒壁付近の格子解像度を高めることが挙げられる。さらに、螺旋渦の本数や傾きなどの詳細を確かめるために、周方向の格子数も再検討する余地がある。

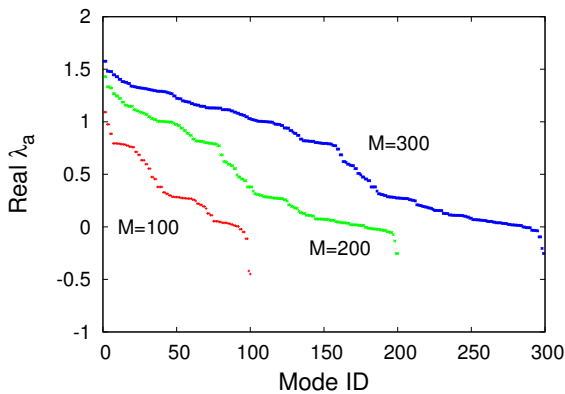


Fig. 9: Spectrum of the eigenvalue  $\lambda_a$  in the descending order of  $\text{Real}[\lambda_a]$ .

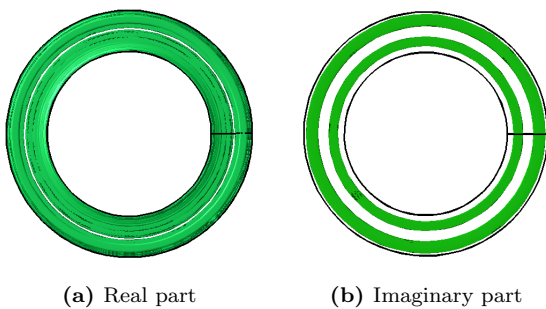


Fig. 10: Iso-surface of eigenvector of mode 1. ( $v_z = 5.0 \times 10^{-4}$ )

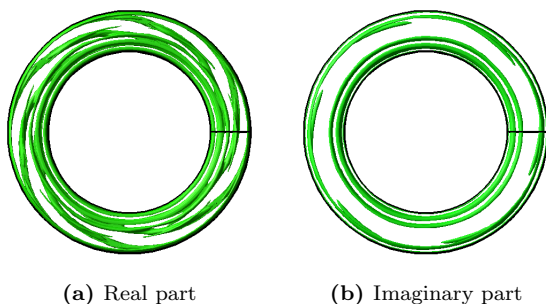


Fig. 11: Iso-surface of eigenvector of mode 17. ( $v_z = 5.0 \times 10^{-4}$ )

## 6. 結言

円筒で囲まれた回転-静止円盤間に生じる三次元流れの全体安定性解析を行い、2通りの基本流に対してそれぞれ下記のような結果を得た。

### 軸対称な流れの場合

縮小化次元数  $M$  が  $M = 600$  ほどで十分な精度の固有値が得られた。しかし、時間積分区間  $T$  については検討の必要がある。不安定モードの可視化により、円筒の内壁及び外壁付近に環状の渦構造が発達しやすいという結果を得た。

### 環状渦を伴う流れの場合

縮小化次元数  $M$ 、時間積分区間  $T$  とともに適切な値を調べていき、十分な精度の固有値を求めていかなければならない。軸対称を基本流とした場合 ( $Re_R = 20000$ ) では見られなかった螺旋状の渦構造が不安定モードとして観測された。

### 参考文献

- (1) Serre, E., Crespo del Arco, E., Bontoux, P., “Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs,” J.Fluid Mech., 434 (2001), pp. 65-100.
- (2) Serre, E., Tuluszka-Sznitko, E., Bontoux, P., “Coupled numerical and theoretical study of the flow transition between a rotating and a stationary disk,” Physics of Fluids., 16.3 (2004)
- (3) 伊藤, 村田, “回転円盤と静止円盤間の流れの安定性,” 日本機械学会論文集 (B 編), 51.472 (1985), pp. 3902-3910.
- (4) 千葉, “非圧縮性粘性流体の全体安定性の数値的研究,” 学位論文 東京大学大学院航空宇宙工学専攻, (1997).
- (5) 千葉, “非圧縮性粘性流体の全体安定性解析,” 数値流体力学, 7 (1998), pp.20-48.
- (6) 竹内, 三宅, 梶島, “全体安定性解析による円形噴流の崩壊過程の解析,” 日本機械学会論文集 (B 編), 68.665 (2002), pp. 30-37.
- (7) Theofilis, V., “Global Linear Instability,” Annual Review Fluid Mech., 43 (2011), pp. 319-352.
- (8) 大道, “圧縮性渦流れの全体安定性解析に関する研究,” 学位論文 東京大学大学院新領域先端エネルギー工学専攻, (2014).
- (9) 手塚, “剥離流れの全体安定性解析,” 日本航空宇宙学会誌, 61.6 (2013), pp. 214-220.

- (10) Arnoldi, W.E., “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem,” *Quarterly of Applied Mathematics*, 9 (1951), pp. 17-29.
- (11) Shen, J., “Hopf bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow,” *J.Comp.Phys.*, 95 (1991), pp. 228-245.
- (12) Launder, B. et al., “Laminar Transitional and Turbulent Flows in Rotor-Stator Cavities.” *Annu.Rev.Fluid.Mech.*, 42 (2010), pp. 229-248.