

Marker particle 法と Penalization 法の併用による 剛体の着水現象の数値解析

Numerical analysis of water-entry problems of rigid bodies by the combined use of the marker particle method and the penalization method.

- 陶山 皓太, 中大院, 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail : suyama@cfm.mech.chuo-u.ac.jp
 中山 司, 中央大, 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail : nakayama@mech.chuo-u.ac.jp
 Kota Suyama, Chuo University, 13-27, Kasuga 1-chome, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan
 Tsukasa Nakayama, Chuo University, 13-27, Kasuga 1-chome, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

This paper deals with the numerical analysis of the water-entry problem of a rigid body. The problem is formulated as a coupled problem of solid, liquid and gaseous phases. To discriminate between a liquid region and a gaseous region, the marker particle method is employed. To discriminate between a solid region and a fluid region, the penalization method is employed. The governing equations of fluid are discretized by the finite element method in space and by the finite difference method in time. The proposed method has been applied to the analysis of the water entry problems of a rectangular body and a wedge, and computational results are compared with available experimental data. Encouraging results are obtained.

1. 緒言

数値流体力学の分野では気相・液相・固相の3相連成解析が盛んに行われており、その中の一つに物体の着水現象がある。着水現象は、飛行艇の着水や宇宙船の海上着水、船舶のスラミングなどに例を見ることができる。スラミングとは荒海上を船舶が航海する時、船首が波によって持ち上げられた後海面にたたきつけられる現象である。この時、海面から強い衝撃圧を受けて船体外板などに局所的にダメージを被ったり、時には船首部甲板を座屈させ海難事故を引き起こすことさえある。着水現象のような気液固3相の連成問題を有限要素法で解くときの手法は、ラグランジュ的な手法とオイラー的な手法に大別することができる。ラグランジュ的な手法は、時間ステップごとに自由表面や物体の境界に合わせて計算領域のメッシュの再分割を行う。そのため、境界条件を正確に課することができるが、計算アルゴリズムの複雑化につながるという欠点がある。一方、オイラー的な手法は計算領域全体を固定メッシュで覆い、そのメッシュ上で自由表面や移動物体の境界を追跡する。

本研究では、オイラー的な手法を採用し、気相と液相の識別と流体相と固相の識別にそれぞれ異なる方法を用いる。気相と液相の識別にマーカー粒子法(marker particle method)⁽¹⁾を用いる。この手法は、固定メッシュ上にマーカー粒子と呼ばれる仮想的な粒子を配置し、自由表面を識別する。液体と気体の物性を担う2種類の粒子を用意し、それらの粒子の境目として自由表面を表現する。また、流体相と固相の識別に penalization 法⁽²⁾を用いる。この手法は、物体領域を仮想的な流体領域とみなし、固体表面での境界条件を仮想流体に対する拘束条件と考え、これを流体の運動方程式にペナルティ項として付加する方法である。マーカー粒子法と penalization 法を併用した3相連成解析の計算手法を構築し、それを着水衝撃現象の解析に適用した結果を報告する。

2. 支配方程式

2.1 流れの支配方程式

Fig. 1 に示すような、固体を重力によって静止水面に落下させ、水中に進入させる問題を考える。ここで Ω_f は流体領域、 Ω_b は物体の内部領域、 Γ_1 は固体壁、 Γ_b は物体表面である。流体は非圧縮性ニュートン流体の2次元層流とする。このとき流れの支配方程式は、非圧縮性ナ

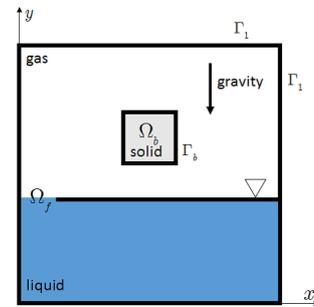


Fig. 1: Computational model for water entry of a rigid body

ビエ・ストークス方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (\Omega_f \text{ 内}) \quad (1)$$

と連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\Omega_f \text{ 内}) \quad (2)$$

である。ここに、 \mathbf{u} は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 \mathbf{g} は重力加速度である。境界条件は次のように与える。

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_b \quad (\Gamma_b \text{ 上}) \quad (4)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{u}}_b$ は物体の速度である。

2.2 物体の運動方程式

本研究で扱う固体は剛体とし、固体の変形、回転運動は考えない。このとき、物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} + m \mathbf{g} \quad (5)$$

である。ここに \mathbf{r} は物体の重心の位置ベクトル、 \mathbf{f} は流体力である。

3. 気液固 3 相の識別法

3.1 気相と液相の識別法

気相と液相の識別にはマーカー粒子法を用いる。マーカー粒子法とは、液体と気体の物性を担う 2 種類の粒子を使って、それぞれの粒子群が占める領域を液相、気相と識別する方法である。粒子が保持する物性 (密度, 粘性係数) は不変である。マーカー粒子とは別に、流れの支配方程式を解くための有限要素メッシュが用意される。そのため、各節点において密度や粘性係数の値が必要となるが、これらの値は液体と気体が占める領域の変化に伴って時々刻々変化する。そこで、マーカー粒子法では、節点の周囲に分布する粒子の保持する物性値を Fig. 2(a) のように補間によって求める。補間式として

$$A = \frac{\sum_{p=1}^N w_p a_p}{\sum_{p=1}^N w_p}$$

$$w_p = S \left(\frac{x_p - x_i}{\Delta x}, \frac{y_p - y_i}{\Delta y} \right)$$

$$S(\alpha, \beta) = \begin{cases} (1 - |\alpha|)(1 - |\beta|) & (|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\alpha| > 1, |\beta| > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{ア})$$

を用いる。ここに、 (x_i, y_i) は節点の座標、 (x_p, y_p) は粒子の座標、 N は関与する粒子の数である。また A は補間によって得られる物性値、 a_p は粒子が保持する物性値を表す。粒子の移動は、粒子速度 \mathbf{u}_p を用いて

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \mathbf{u}_p^{n+1} \Delta t \quad (\text{イ})$$

によって行う。ここに、 \mathbf{x}_p は粒子の位置ベクトル、 Δt は時間増分である。粒子速度 \mathbf{u}_p は、式 (ア) を用いて、粒子周辺の節点の速度の補間によって求める (Fig. 2(b))。計算手順は次のとおりである。

1. 補間された物性値を用いて流れの支配方程式を解く。
2. 粒子速度を求める。
3. 式 (イ) によって粒子を移動させる。
4. 式 (ア) によって節点の物性値を求める。
5. 1 から計算を繰り返す。

マーカー粒子法では、VOF 法やレベルセット法のように移流方程式を解く必要がないので、数値拡散の混入による計算精度の低下がない。

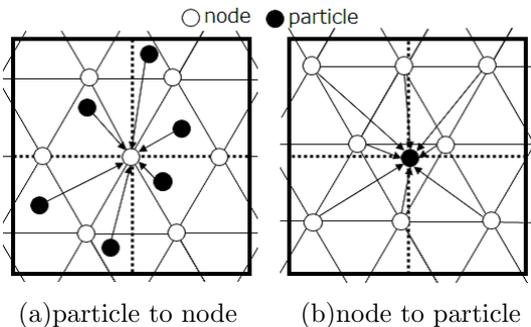


Fig. 2: Positional relationship at interpolation

3.2 流体相と固相の識別法

流体相と固相の識別には penalization 法を用いる。Penalization 法とは、固体領域 Ω_b 内を仮想的な流体が占めると考え、領域 Ω_b 内も流体領域の一部と考える。そして、 Ω_b 内の仮想流体に

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_b \quad (\Omega_b \text{ 内}) \quad (6)$$

という条件を課す。これを支配方程式 (1), (2) に対する拘束条件と考え、式 (1) の右辺にペナルティ項として

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \rho \lambda \chi (\hat{\mathbf{u}}_b - \mathbf{u}) \quad (\Omega \text{ 内}) \quad (7)$$

のように組み込む。ここに右辺第 4 項がペナルティ項であり、 λ はペナルティ係数、 χ は

$$\chi = \begin{cases} 1 & (\Omega_b \text{ 内}) \\ 0 & (\Omega_f \text{ 内}) \end{cases} \quad (8)$$

で定義されるマスク関数である。式 (7) で付与したペナルティ項 $\rho \lambda \chi (\hat{\mathbf{u}}_b - \mathbf{u})$ は、領域 Ω_b 内でのみ作用し、 $\mathbf{u} \neq \hat{\mathbf{u}}_b$ の場合は、流体が領域 Ω_b 内に進入するのを防ぐように作用する仮想的な外力の役割を果たす。式 (7) を Ω_f と Ω_b を合わせた領域で解く。これにより、有限要素メッシュは固体の位置に依らず、固定したままでよい。

4. 流れの方程式の離散化

4.1 空間方向の離散化

空間方向の離散化には有限要素法を用いる。有限要素として Fig. 3 に示す三角形要素を用いる。Fig. 3(a) のように要素を四つの小三角形に分けて、速度 \mathbf{u} とマスク関数 χ を小三角形内で x, y の 1 次多項式で近似する。圧力 p は、Fig. 3(b) のように要素全体で x, y の 1 次多項式で近似する。式 (2), (7) に対する弱形式を導き、空間方向に離散化すると次のような半離散化式を得る。

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + [\mathbf{A}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}] \mathbf{U} - \mathbf{H}\mathbf{P} - \mathbf{F} - \mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (10)$$

ここに、 \mathbf{U}, \mathbf{P} はそれぞれ速度と圧力の節点値を成分とするベクトルであり、 $\mathbf{0}$ は零ベクトルである。 \mathbf{M} は質量行列、 $\mathbf{A}(\mathbf{U}) \mathbf{U}$ は移流項、 $\mathbf{D}\mathbf{U}$ は拡散項、 $\mathbf{H}\mathbf{P}$ は圧力項、 \mathbf{F} は重力項、 $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U})$ はペナルティ項である。

4.2 時間方向の離散化

時間方向の離散化には差分法を用いる。時間軸を一定の長さ Δt の小区間に分割し、時刻 $t^n = n\Delta t$ と時刻 $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ に挟まれた代表的な区間に注目する。物理量の時刻 t^n での値を知り、時刻 t^{n+1} の値を求めるものとして式 (9), (10) を離散化すると次式のようなようになる。

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + [\mathbf{A}(\mathbf{U}^n) + \mathbf{D}] \mathbf{U}^n - \mathbf{H}\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{F} - \mathbf{G}(\hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{U}^n) = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (12)$$

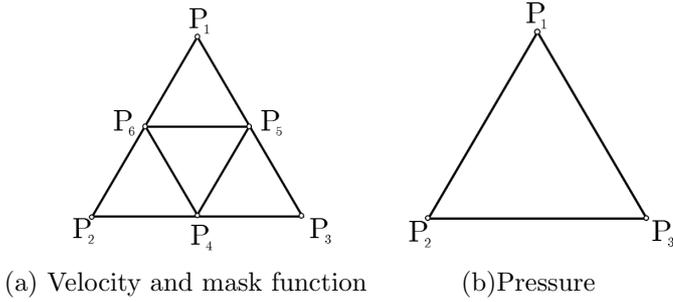


Fig. 3: Finite elements and nodes

式 (11), (12) を, \mathbf{U}^{n+1} , \mathbf{P}^{n+1} を未知数とする連立一次代数方程式にまとめると,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

となる. これを共役残差法⁽³⁾を用いて解く.

5. 固体の運動方程式の時間積分

固体の運動方程式 (5) を解き, 固体の速度と位置を更新する. この微分方程式の解法にはルンゲ・クッタ法を用いる. 固体の速度を \mathbf{v} とすると, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ である. これを用いて式 (5) を

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}/m + \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

のように書き直し, 簡単に

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{R}(\Phi) \quad (15)$$

と表すとき, これを次のような 2 段階の時間積分法で解く.

$$(i) \quad \Phi^{n+\frac{1}{2}} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}(\Phi^n) \quad (16)$$

$$(ii) \quad \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \mathbf{R}(\Phi^{n+\frac{1}{2}}) \quad (17)$$

流体力 \mathbf{f} は固体周辺の節点圧力を固体表面に補間し, 固体表面に沿って積分することで求める.

6. 数値計算

6.1 矩形物体の着水

矩形物体の着水計算を行い, Cheng ら (1974)⁽⁴⁾ が行った実験結果と比較する. Fig. 4 に計算モデルを示す. 壁境界には全てすべりなし条件を課し, 物体の初期位置は, Fig. 4 のように物体先端が自由表面に接する位置とする. 物体の幅 L を 0.076m , 質量を 10.22kg とし, 鉛直下向きに 0.33m/s の初速度を与える. 液体は水とし, 密度を $1.00 \times 10^3\text{kg/m}^3$, 粘性係数を $1.00 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする. 気体は空気とし, 密度を 1.21kg/m^3 , 粘性係数を $1.82 \times 10^{-5}\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする. メッシュの要素数は 8250, 節点数は 16761, マーカー粒子数は 202125, 時間増分 Δt は $4.4 \times 10^{-5}\text{s}$, ペナルティ係数 λ は $1.1 \times 10^5\text{s}^{-1}$ とする. 代表要素長さ h を $1.07 \times 10^{-2}\text{m}$ として, マーカー粒子法の補間計算に用いる Δx , Δy は $1.78h$ とする.

Fig. 5 に底面中心の圧力の時間変化を示す. 着水時の衝撃圧が発生したあと, 圧力が周期的に振動する様子が

見られる. この原因を, Fig. 6 に示すように, 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に固体が移動して節点 B を横切る場合で考えてみる. 時刻 t において, 節点 B のマスク関数 χ は 0 であり, この節点において式 (7) のペナルティ項は無効である. このとき, 節点 B に隣接する節点 C においては, 節点 B の方向に流体領域が広がっていると認識されている.ところが, 時刻 $t + \Delta t$ になって固体が節点 B を横切ると, 節点 B では $\chi = 1$ となり, ペナルティ項が有効になる. これは, 節点 C にとっては, 節点 B の位置に突然に固体壁が出現することを意味する. このとき, 節点 C における流れはその壁に遮られるために節点 C の圧力は

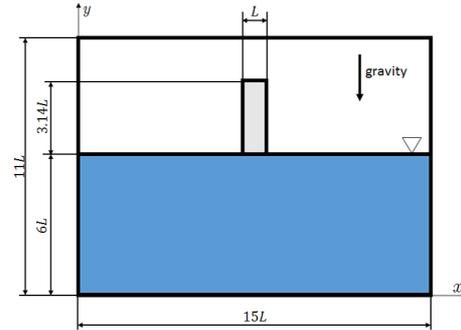


Fig. 4: Computational model for the water entry of a rectangular body

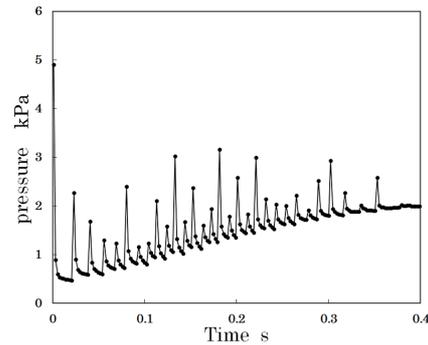


Fig. 5: Time history of the pressure calculated without the smoothed Heaviside function

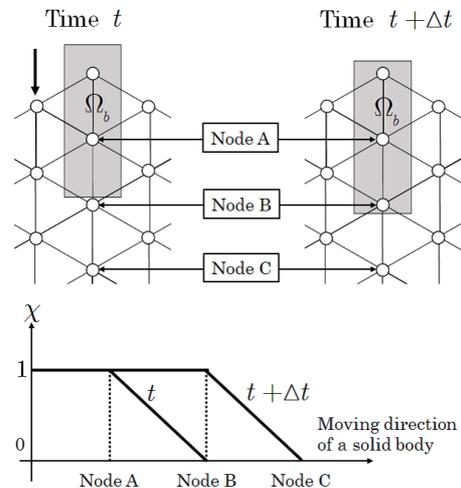


Fig. 6: Shift of the mask function χ according to the movement of a solid body during the time interval Δt

急激に上昇する。固体先端が節点 B と C の間を移動する間に節点 C の圧力は本来とるべき値に近づいて下がっていくが、固体が節点 C を横切ると隣接する節点の値が急激に上昇する。このような現象の原因は、マスク関数を式 (8) のような不連続関数で定義したことにあると考えられる。そこで、次式のように不連続部分を勾配の急な連続関数で近似する smoothed Heaviside 関数⁽⁵⁾の使用を検討してみる。

$$\chi = \begin{cases} 1 & (z \geq \varepsilon \text{ のとき}) \\ 0.5(1 + \frac{z}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varepsilon} z) & (|z| \leq \varepsilon \text{ のとき}) \\ 0 & (-z \geq \varepsilon \text{ のとき}) \end{cases} \quad (18)$$

ここに、 ε は、固体境界に沿う帯状の領域の半幅であり、この帯状の領域内で関数を連続化させる。以下の計算では、要素の代表長さを h とするとき、 $\varepsilon = 2h$ としている。 $|z|$ は、固体境界に垂直に測った、固体境界と節点の間の距離を表し、固体内部に向かう向きを正とする。

式 (18) を用いて行った計算で得られた圧力の時間変化を Fig. 7 に示す。このとき、メッシュの要素数は 48900、節点数は 98427、マーカー粒子数は 775202、時間増分 Δt は 8.8×10^{-6} s、ペナルティ係数 λ は $2.2 \times 10^4 \text{s}^{-1}$ とする。代表要素長さ h を 2.15×10^{-3} m とし、マーカー粒子法の補間計算に用いる Δx 、 Δy は $1.41h$ とする。○は本手法による計算結果、実線は Cheng ら (1974) の実験結果である。着水直後の衝撃圧は、実験値が 6.19kPa であるのに対して、計算値は 6.10kPa である。その後の圧力の時間変化においても、実験値と良好な一致を示している。Fig. 5 における着水直後の衝撃圧を Fig. 7 のそれと比較すると、その差は明らかであり、周期的な振動は見られず、smoothed Heaviside 関数の使用が有効であることを示している。矩形物体の変位の時間変化を Fig. 8 に示す。実験結果と同様の傾向を示し、滑らかな曲線が確認できる。

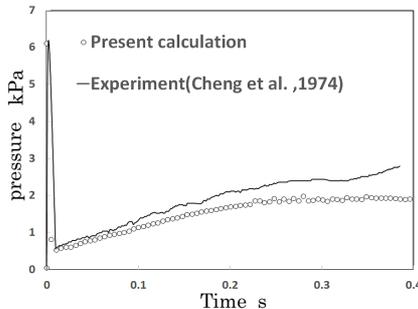


Fig. 7: Time history of the pressure acting at the center of the impact surface calculated with the smoothed Heaviside function

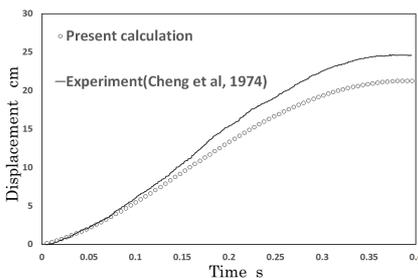


Fig. 8: Time history of the displacement of a rectangular body

6.2 楔形物体の着水

楔形物体の着水計算を行い、Zhao ら (1997)⁽⁶⁾が行った実験結果、Oger ら (2006)⁽⁷⁾が行った SPH 法による計算結果と比較する。Fig. 9 に計算モデルを示す。壁境界には全てすべりなし条件を課し、物体の初期位置は、Fig. 9 のように物体先端が自由表面に接する位置とする。Fig. 10 に楔形物体のモデルを示す。Zhao ら (1997) の実験では P1~P5 の位置に圧力測定点を設けている。物体の幅 L を 0.5m、質量を 241kg とし、鉛直下向きに 6.15m/s の初速度を与える。液体は水、気体は空気とし、物性値は 6.1 節と同様である。メッシュの要素数は 126000、節点数は 253021、マーカー粒子数は 752001、時間増分 Δt は 1.1×10^{-6} s、ペナルティ係数 λ は $2.2 \times 10^4 \text{s}^{-1}$ とする。代表要素長さ $h = 2.50 \times 10^{-3}$ m とし、マーカー粒子法の補間計算に用いる Δx は $2.6h$ 、 Δy は $1.5h$ とする。

楔形物体の落下速さの時間変化を Fig. 12 に示す。○は本手法による計算結果、青線は Zhao ら (1997) の実験結果である。実験結果と非常に近い結果であることから、速度の計算について良好な結果であると言える。Fig. 11 に、 $t = 0.00435$ s, 0.0158 s, 0.0202 s における圧力分布を示す。図の左列は物体周辺の圧力分布を示したもので、図中の白線は自由表面である。 $t = 0.00435$ s では、楔形物体先端に着水衝撃が発生し、物体から離れる程に減衰していく様子を確認できる。 $t = 0.0158$ s では、物体の移動に伴い水が押しつけられ発生する高い圧力と物体斜辺に沿った自由表面形状を確認できる。 $t = 0.0202$ s では、楔形物体先端を中心とし、徐々に減衰していく圧力分布と、楔形物体の鋭角によって発生する水しぶきを確認できる。図の右列は、物体の右斜面に沿う圧力分布を示したもので、縦軸は圧力、横軸は楔先端から斜面に沿って測った距離を表す。圧力と距離は無次元化されている。黒線が本手法による計算結果、青線は Zhao ら (1997) の実験結果、黄線は Oger ら (2006) の SPH 法による計算結果で

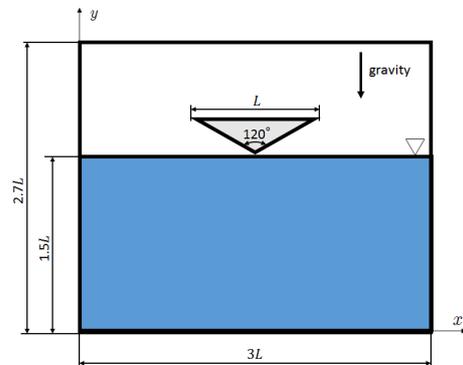


Fig. 9: Computational model for the water entry of a wedge

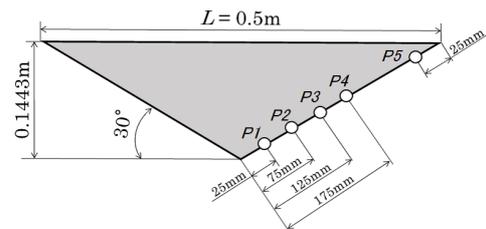


Fig. 10: The size of a wedge and the measuring points of pressure

ある. $t = 0.00435\text{s}$ では, 実験結果, SPH 法による結果ほど顕著ではないが, 斜辺上部に向けて圧力の上昇を確認できる. $t = 0.0158\text{s}$ では, 実験結果, SPH 法による結果と同様に斜辺下部から上部に向けて圧力の上昇を確認できる. $t = 0.0202\text{s}$ では, SPH 法による結果と同様に斜辺下部から上部に向けて圧力の降下が確認できる

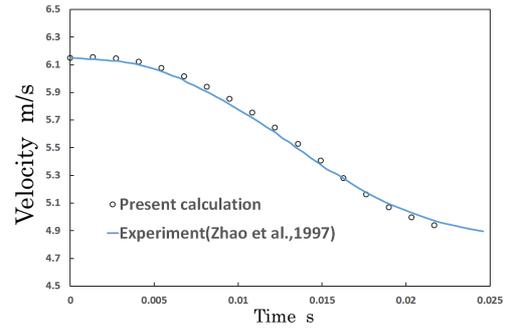


Fig. 12: Time history of falling speed of a wedge

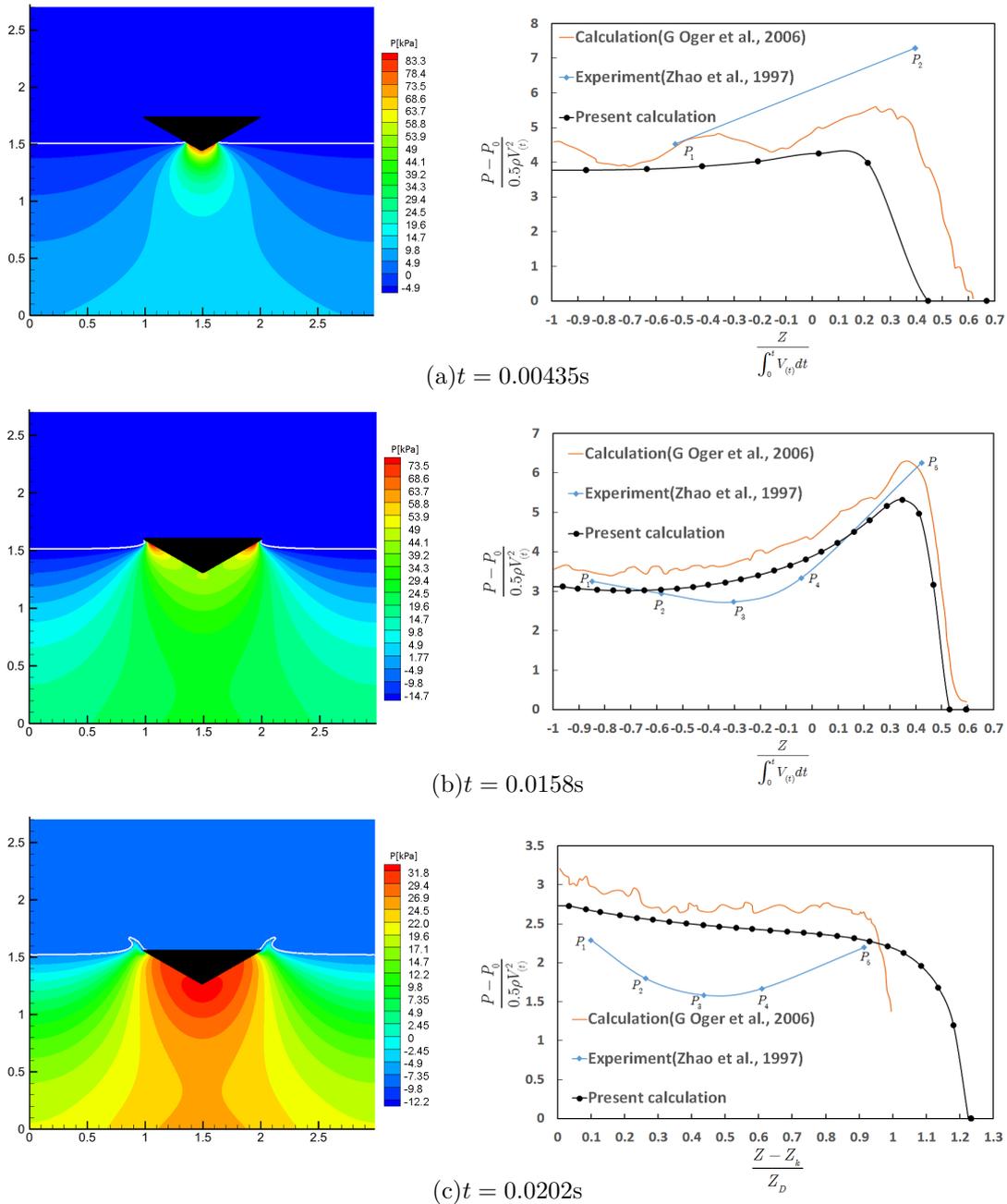


Fig. 11: Comparison of pressure distribution along the right face of a wedge

7. 結言

マーカー粒子法と penalization 法を併用して剛体の着水現象を解析するための数値計算法を構築した。矩形物体の着水計算では, Smoothed Heaviside 関数を導入することによって, マスク関数の値が 0 から 1 への切り替わることによって起因する圧力振動を抑えることを示した。楔形物体の着水計算では, 実験, SPH 法での計算結果との定量的な比較を示し良好な結果を得た。

参考文献

- (1) W. J. Rider, D. B. Kothe, A marker particle method for Interface Tracking, May 30, (1995)
- (2) Philippe Angot, A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows, Numer. Math. , 81(1999), pp. 497-520.
- (3) 小国力編著, 行列計算ソフトウェア, 丸善株式会社, 1991
- (4) Cheng, R. Y. K. and Leland, T.J.W., “ Numerical solution for low-velocity penetration of rigid body into still fluid ”, Numerical Methods in Fluid Dynamics (edited by C. A. Brebbia and J. J. Connor), Pentech Press, London, (1974), pp. 272-289.
- (5) Siddhartha Verma, Gabriele Abbati, Guido Novati, Petros Koumoutsakos, Computing the Force Distribution on the Surface of Complex, Deforming Geometries using Vortex Methods and Brinkman Penalization, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 00, 2017, pp. 2-19.
- (6) Zhao, R., Faltinsen, O. and Aarsnes, J., Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation, Proceedings of the 21st Symposium on Naval Hydrodynamics, (1997), pp. 408-423.
- (7) Oger G., Doring, M., Alessandrini, B. and Ferrant P., Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries, Journal of Computational Physics 213, (2006), pp. 803-822.