

圧力境界条件を考慮したシームレス仮想境界法に関する研究

Validation on Seamless Immersed Boundary Method with pressure boundary condition

- 戎 慶輔, 京工繊大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : g.e.k.1031@gmail.com
 田尻 恭平, 京工繊大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : tajiri@kit.ac.jp
 田中満, 京工繊大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : mtanaka@kit.ac.jp
 西田秀利, 京工繊大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : nishida@kit.ac.jp
 Keisuke EBISU, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech. , Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Kyohei TAJIRI, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Mitsuru TANAKA, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Hidetoshi NISHIDA, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN

In the conventional immersed boundary method, the unphysical pressure oscillations are appeared near the boundary, because of the pressure jump between fluid and inside the boundary. In this paper, the pressure boundary condition is considered in order to improve the unphysical pressure oscillations near the boundary. Also, in the seamless immersed boundary method, the pressure boundary condition is introduced to obtain the more precise solution. Two dimensional channel flow with wall region is considered in order to validate the effect of pressure boundary condition. As the results, it is found that the conventional immersed boundary method with pressure condition gives the solution with small oscillations, and the improved solution is obtained in the seamless immersed boundary method with pressure condition.

1. 緒言

計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics:CFD) は流れの支配方程式を数値的に解き, コンピュータのみに流れを再現し, 流れ現象を解明するもので, コンピュータの進展と共に発展してきた. CFD の発達に伴い流れ現象の解明だけでなく製品の設計や開発において実験が困難, 不可能な場合でも数値的な解を与えることが可能となり, 開発コストの低減, リードタイムの短縮がはかれるようになってきている.

複雑形状を有する物体周りの流れの解析において, 従来では, 境界適合座標系が一般的に採用されてきた. しかし, 複雑な物体形状では, 計算格子の自動化が困難であり, コストを削減するうえで障害となる. そこで, 従来の解析手法とされている. 境界適合座標系に比べて, 格子形成が容易であるデカルト座標系での複雑流れ解析が現在再び注目されている. デカルト座標系において物体表面を表現する方法の一つとしてフィードバック外力法⁽¹⁾や直接外力法⁽²⁾などの埋込み境界法が存在する. これらの従来の埋込み境界法では, 流れ場全体の解析としては有効性のある結果が得られるが, 仮想境界近傍で非物理的な圧力振動が生じてしまい, 物体表面上の物理量を正確に求めることが困難となる. そこで非物理的な圧力振動を除去するためにシームレス仮想境界法⁽³⁾が提案された. これらの手法は境界の圧力条件を考慮しておらず, 境界において圧力条件が満足されている保証はない. さらに, 境界上で圧力条件を課すことにより解の質的向上が期待される. 本研究ではシームレス仮想境界法に圧力条件を考慮する手法を採用し, その有効性の検証を実施する. そこで, 本論文では速度, 圧力をセル中心で定義するコロケーション格子を用いて, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の離散化を行う, コロケーション差分法を用いて, 圧力境界条件を考慮した仮想境界法を採用し, 2次元平行平板間流れについて圧力の振動抑制性能を検証する.

2. 計算方法

基礎方程式は, 連続の式, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式) に外力項を加えたものである.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G_i \quad (2)$$

これらの式はすべて無次元表示である. ここで, 無次元化は代表量として, 代表長さ $[L_0]$, 代表速度 $[U_0]$, 代表密度 $[\rho_0]$, 動粘性係数 $[\nu]$ を用いている. Re はレイノルズ数であり, $Re = \bar{L}_0 \bar{U}_0 / \bar{\nu}$ で定義される. また, 運動方程式 (2) の G_i はシームレス仮想境界法における外力項である.

格子系としてはコロケーション格子を用い, NS 方程式の解法としては Fractional Step 法を採用する. 式 (2) の時間微分項を前進オイラー法で離散化し, 式 (3), (4) のように 2 段階に分けて計算する.

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t (F_i^n + G_i^n) \quad (3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$F_i^n = [-u_j^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}]^n \quad (5)$$

また, 圧力方程式の解法には SOR 法を用いて収束解を得るものとする.

2.1 シームレス仮想境界法

運動方程式にはシームレス仮想境界法を適用し, 外力項の評価には直接外力評価法を用いる. Fig.1 のような仮想境界を持つ場合, 外力項は以下のように評価される. まず, 仮想境界上における速度条件を満足するように境界最近傍点での速度を内挿により求め, その点において式 (3) に付加するべき外力項の値を評価する. Fig.1 のように, 境界最近傍点の速度をその点に隣接する点の速度 u_{i+1} と境界上の速度 U から線形的に求め, これを \bar{U}_i とする. $n+1$ 時間段階において \bar{U}_i を満足するような外力 G_i^n は式 (3), (4) より式 (6) のように表せる.

$$G_i^n = -F_i^n + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\bar{U}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (6)$$

従来の外力評価法では仮想境界の流体側のみ、あるいは境界を挟むように外力を与えていたが、両者とも境界近傍で非物理的な圧力振動を生じてしまう。そこでシームレス仮想境界法においては Fig.1 のように仮想境界内部 (物体内部) の全ての格子点に速度条件を満足するような外力項を付加することにより、圧力振動を除去することが出来る。

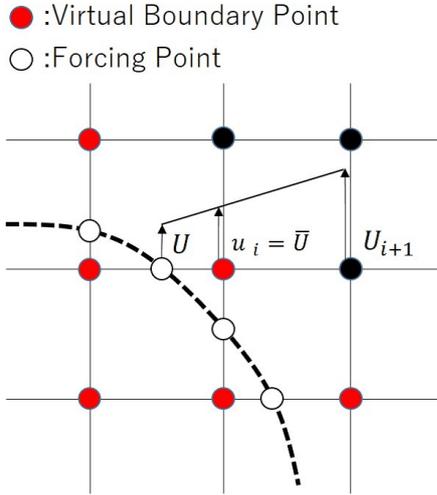


Fig. 1: Forcing point.

3. 仮想境界における圧力条件

通常、圧力方程式を計算する際、仮想境界に対して特別な処理は行わないが、本研究では仮想境界上の点で簡易的な圧力条件 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ を課す。

Fig.2 に示すように、境界点を (a, b) とすると隣接点における圧力は Taylor 級数展開を用いることにより以下のように与えられる。

$$p(a + l_x, b + l_y) = p(a, b) + [l_x \frac{\partial p}{\partial x} + l_y \frac{\partial p}{\partial y}]_{(a,b)} + \frac{1}{2} [l_x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2l_x l_y \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + l_y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}]_{(a,b)} + \dots \quad (7)$$

ここで、境界点における単位法線ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y)$ とするとノイマン条件は

$$\frac{\partial p}{\partial n} = n_x \frac{\partial p}{\partial x} + n_y \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

と書き換えられる。式 (8) の関係を式 (7) に代入することにより、

$$p(a + l_x, b + l_y) = p(a, b) + [l_x - \frac{n_x}{n_y} l_y] \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2} [l_x^2 - 2 \frac{n_x}{n_y} l_x l_y + \frac{n_x^2}{n_y^2} l_y^2] \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_{(a,b)} + \dots \quad (9)$$

が得られる。従って、Taylor 級数展開の 1 次項まで考慮する場合は 2 隣接点、2 次項まで考慮する場合は 3 隣接点の圧力が既知であれば、境界上 (a, b) の圧力及び圧力

勾配が決定できる。1 次項まで考慮する場合、隣接点 1,2 の圧力を用いて

$$p(a, b) = \frac{-1}{l_{1x} - l_{2x} - \frac{n_x}{n_y} (l_{1y} - l_{2y})} \times [(l_{2x} - \frac{n_x}{n_y} l_{2y}) p_1 - (l_{1x} - \frac{n_x}{n_y} l_{1y}) p_2] \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = \frac{1}{l_{1x} - l_{2x} - \frac{n_x}{n_y} (l_{1y} - l_{2y})} (p_1 - p_2) \quad (11)$$

と境界上の圧力及び圧力勾配が決定される。

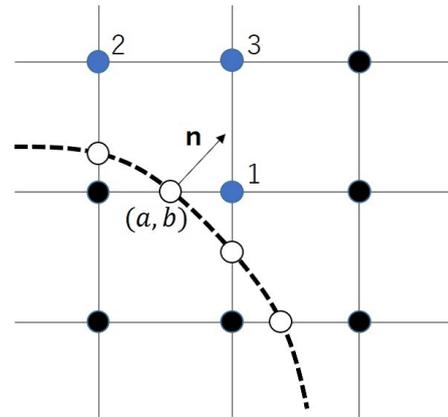


Fig. 2: Grid points used the Taylor series expansion.

2 次元平行平板間流れの場合、計算格子と壁面が平行であることから、壁面垂直方向の圧力勾配が 0 となるようにする。Fig.3 の場合、仮想境界点で $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ を満たせばよいので

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (12)$$

となる。この式 (12) を圧力ポアソン方程式に代入し、解くことで圧力条件を満たすことができる。

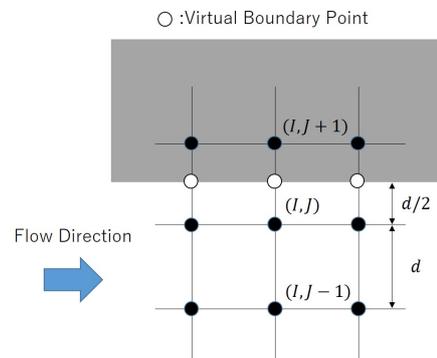


Fig. 3: Pressure boundary condition.

4. 2次元平行平板間流れの解析による検証

4.1 計算条件

ここでは、2次元平行平板間流れの問題における圧力勾配を考慮したシームレス仮想境界法の有効性の検証を行う。計算領域は Fig.4 のように設定する。

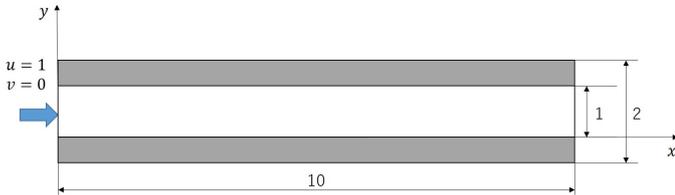


Fig. 4: Computation domain.

計算格子は直交等間隔であり、その格子間隔は $\Delta x = \Delta y = 0.025$ とする。流れは流入部で速度 $u = 1, v = 0$ によって駆動させ、流出部では線形外挿によって与える。ただし、壁面内部に関しては流入部、上下壁面部において $u = 0, v = 0$ となるようにした。圧力に関しては流入部で 0 次外挿、上下壁面部でノイマン型で与え、流出部は $p = 1$ となるようにした。時間間隔は $\Delta t = 0.001$ とし、SOR 法における加速係数は 1.85 とした。

定常流れの計算における各物理量 (u, v, p) の解析解の収束判定条件は以下のような L2 残差を用いる。

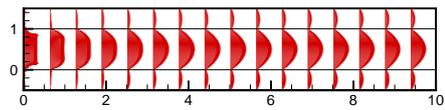
$$L2 - Residual = \left[\frac{\sum (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)^2}{N_{max}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

ただし、 ϕ は各物理量、 n は時間段階、 N_{max} は総格子点数である。また、定常流にするために、レイノルズ数 $Re = 100$ に設定した。

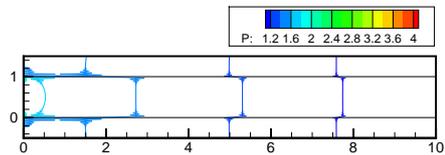
4.2 計算結果

仮想境界法 (IBM) とシームレス仮想境界法 (SIBM) で解析した結果を Figs.5,6 に示す。また $y = 0.5$ での圧力勾配の分布を解析解とともに Fig.(7) に示す。

SIBM の解析結果では一様流が流路を過ぎていくにつれてポアズイユ流に変化していることがわかる。また、速度の最大値は 1.495 であり、解析解との誤差は 0.3 % と良好な結果となった。圧力勾配も Fig.7 からわかるように解析解に収束しているのがわかり、数値としては -0.1204 となり解析解 -0.12 との誤差は 0.3 % となった。一方、IBM の結果としては壁面内部にも速度が発生しており、ポアズイユ流にはなっていない。また、圧力分布にも振動が発生していることがわかる。速度の最大値は 1.228 となり誤差が 18 % と非常に大きくなっている。

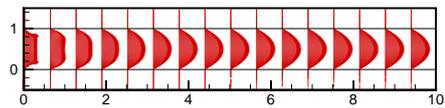


(a) Velocity vectors.

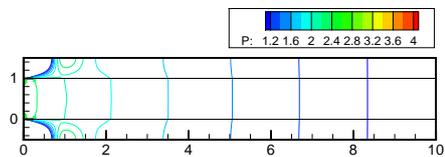


(b) Pressure contours.

Fig. 5: IBM solution.



(a) Velocity vectors.



(b) Pressure contours.

Fig. 6: SIBM solution.

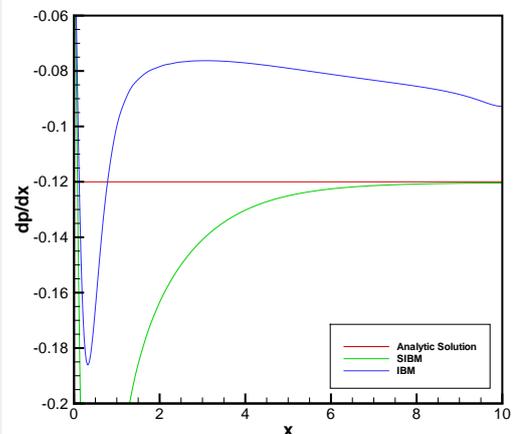
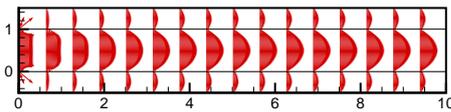


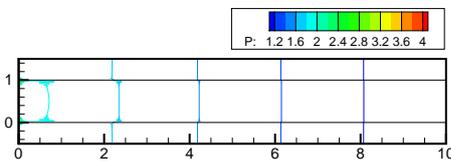
Fig. 7: Pressure gradient on $y=0.5$.

5. 圧力条件を考慮した 2 次元平行平板間流れの解析

圧力条件を考慮した IBM および SIBM の結果を Figs.8,9 に示す. $y = 0.5$ での圧力勾配の分布を解析解とともに Fig.(10) に示す. また, 圧力条件を考慮していない結果との比較を Fig.11 に示す. Fig.11 より IBM においては明らかに境界近傍の非物理的圧力振動が抑制されていることが認められる. SIBM においても流入境界付近の圧力分布に改善が認められる.

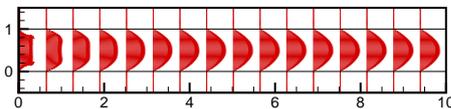


(a) Velocity vectors.

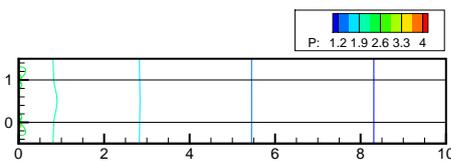


(b) Pressure contours.

Fig. 8: IBM solution with pressure condition.



(a) Velocity vectors.



(b) Pressure contours.

Fig. 9: SIBM solution with pressure condition.

6. 結論

本研究では仮想境界法における圧力振動抑制を目的として, 圧力条件を考慮した仮想境界法, 圧力条件を考慮したシームレス仮想境界法を適用し, その有効性を 2 次元平行平板流れの解析により検証した. その結果, 圧力境界条件を考慮した手法は仮想境界法においては圧力振動の抑制に, シームレス仮想境界法においては解の質向上に有効であることがわかった.

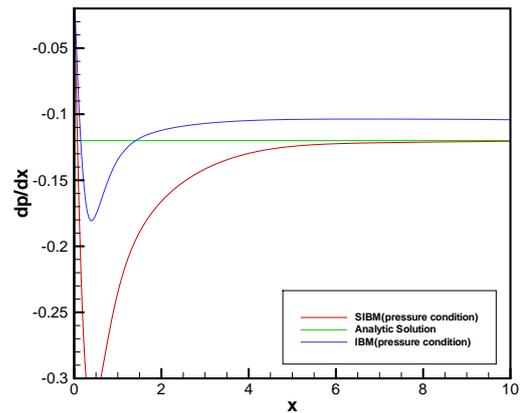
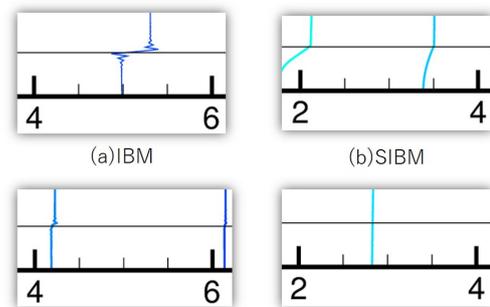


Fig. 10: pressure gradient with pressure condition on $y=0.5$.



(c) IBM (pressure condition) (d) SIBM (pressure condition)

Fig. 11: Close up view of pressure field

7. 参考文献

- (1) Saiki, E.M. and Biringen, S., Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method, *J. Comput. Phys.*, 123, (1996), 450-465.
- (2) Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Hohdosof, j., Combined immersed boundary finite difference methods for three-dimensional complex simulation, *J. Comput. Phys.*, 161, (2000), 35-60.
- (3) Nishida, H. and Sasao, K., Incompressible flow simulations using virtual boundary method with new direct forcing terms estimation, *Computational Fluid Dynamics 2006* (Springer), (2009), 371-376.