

可変境界条件を有する ALE シームレス仮想境界法に関する研究

Study on ALE seamless immersed boundary method with variable boundary condition

- 成田 亘, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : kou1228ron@gmail.com
 西田 秀利, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : nishida@kit.ac.jp
 田中 満, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : mtanaka@kit.ac.jp
 田尻 恭平, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : tajiri@kit.ac.jp
 Kou NARITA, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Hidetoshi NISHIDA, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Mitsuru TANAKA, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN
 Kyohei TAJIRI, Dept.of Mechanophysics.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN

In this paper, we propose an ALE seamless immersed boundary method with variable boundary condition. By using the ALE formulation, the computational domain including the object moves itself, instead of object moving. In order to validate the present approach, the flow around a square cylinder in the domain which varies from a channel to an open boundary is considered. In comparison with the conventional approach, it is found that present approach gives the appropriate solution. Then, it is concluded that present ALE seamless immersed boundary method with variable boundary condition is very versatile for arbitrary flow around a moving object.

1. 緒言

計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics : CFD) は流れの支配方程式を数値的に解き, コンピュータ上で流れを再現し, 流動現象を解析するものである. CFD の発達に伴い, 流動現象解析だけでなく, 製品の設計や開発において, 実験が困難な場合でも数値解を与えることができ, その低コストかつ迅速性により, 開発コストの削減とリードタイム短縮を図ることが出来るようになってきている.

複雑形状を有する物体周りの流れ解析において, 従来では, 境界適合座標系が一般的に採用されてきた. しかし, 物体形状の複雑化により, 格子生成の自動化が困難となるため, 境界適合座標系に比べて, 格子形成が容易であり, 計算効率に優れたデカルト座標系での格子形成が現在再び注目されている. デカルト座標系において物体表面を仮想境界点で表現する方法の一つとして仮想境界法⁽¹⁾が提案されている. 仮想境界法とは, 仮想境界点に速度条件を満足するように運動方程式に外力項を付加して計算を行う手法である. しかしながら, 仮想境界近傍で, 非物理的な圧力振動が生じるため, 物体表面上の物理量を正確に求めることが困難になってしまう. これを解決するため, 物体内部の格子点上においても物体の速度条件を満たすように外力項を付加して計算を行うシームレス仮想境界法⁽²⁾と呼ばれる手法が提案されている.

本研究では, 流体内部を物体が移動する数値シミュレーションに対する手法として ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法⁽³⁾が採用される. 移動境界問題へ適用する場合, 通常, 座標系を物体の移動に合わせて再設定し直す必要があり, 計算時間の増大や複雑化の原因となるが, ALE 法は Lagrange 法と Euler 法の有効な部分を合わせて, 物体の移動を表現する手法である. この手法では, 物体の移動にともなって計算格子を移動させるため, 物体と計算格子の位置関係を変化させることなく計算を行うことができる. そのため, 物体の移動による計算格子の再設定は必要としない.

しかし, 先に述べたシームレス仮想境界法と ALE 法を併用した手法において, 時々刻々外部状況が変化する可変境界条件に対するシームレス仮想境界法の有効性を検証する試みは行われていない.

そこで本研究ではシームレス仮想境界法の有効性を検証することを目的として, 2次元平行平板間流れや, さらには角柱を有する場合についてシームレス仮想境界法を適用し, その有効性を検証する. また, 境界条件を時

間によって変化させた場合についても適用し, 移動物体の数値シミュレーションに対する ALE シームレス仮想境界法の有効性の検証を行う.

2. 基礎方程式

基礎方程式は, 以下に示す無次元化された連続の式, 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式), ALE 表示非圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (ALE 表示 NS 方程式) である.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j - c_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + G_i \quad (3)$$

ここで, u_i は速度成分, p は圧力である. また c_j は計算格子の移動速度を表す. なお, Re はレイノルズ数, G_i は外力項を表す.

3. 計算手法

3.1 シームレス仮想境界法 (SIBM)

シームレス仮想境界法 (SIBM) に対する運動方程式は, 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に外力項 G_i を付加した式 (2), (3) のような形となる. また, 支配方程式に付加する外力項を評価することに関して, 直接外力評価法⁽⁴⁾を採用する. 直接外力評価法では, 仮想境界上において速度条件を満足するように, 境界に最も近いセルでの値を線形補間により導出し, そのセルにおいて支配方程式に付加するべき外力項の値を計算する. すなわち, \bar{U} に対しては, Fig.1 のように, 境界に最も近いセルでの速度 U を, 隣接するセルの速度 U_{i+1} と境界上での速度 U から線形的に求め, $u_i = \bar{U}$ とする.

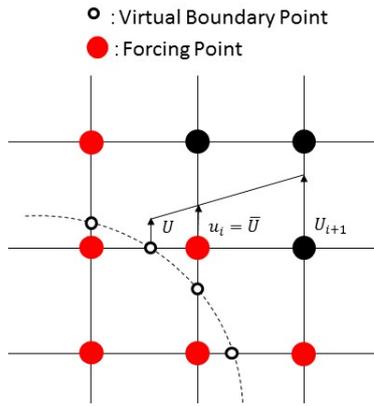


Fig. 1: Direct forcing treatment

外力項は時間積分に前進オイラー法を用いる場合、以下のように評価される。

$$G_i = \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right]^n + \frac{\bar{U}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (4)$$

ここで、 \bar{U}_i^{n+1} は線形補間によって評価した速度であり、次時間段階における速度が $\bar{u}_i^{n+1} = \bar{U}_i^{n+1}$ の関係を満たすことになる。

3.2 数値計算法

格子はコロケーション格子を採用し、NS 方程式の解法には Fractional Step 法を適用する。時間微分項の離散化には前進オイラー法、空間微分項の離散化に関しては移流項に対しては 2 次精度保存性差分法、圧力項・拡散項に対しては 2 次精度中心差分法を適用する。圧力方程式の解法には SOR 法を用いて収束解を得るものとする。

3.3 収束判定条件

各物理量 (u, v, p) で次式を満たすとき、定常流であるとする。

$$L2 - Residual = \left(\frac{\sum \sum (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)^2}{N_{max}} \right)^{1/2} < 1.0 \times 10^{-6} \quad (5)$$

ここで、 ϕ は物理量であり、 n は計算ステップ数、 N_{max} は総格子点数である。

4. 壁内部領域を有する 2 次元平行平板間流れの数値シミュレーション

本章では、上下壁面を仮想境界で表現し、壁内部領域を有する 2 次元平行平板間流れの定常解を求める。また、同様の計算領域において ALE 法を適用した場合の定常解を求める。数値解と解析解を比較し、シームレス仮想境界法及び ALE 法の有効性を検証する。

4.1 計算条件

4.1.1 計算領域と計算格子 流路の概略図を以下に示す。

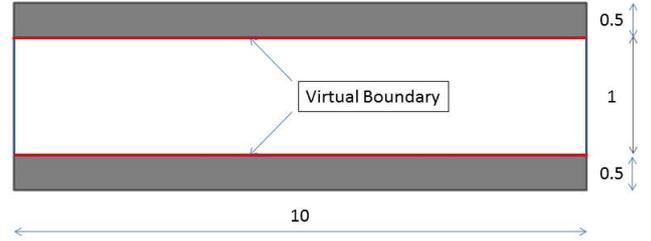


Fig. 2: Computational domain

計算領域は $x-y$ 平面で x 方向に 10、 y 方向に 2 とし、壁の幅はそれぞれ 0.5 であり、流路幅は 1 である。また、計算格子は、格子幅を x 方向、 y 方向ともに 0.05 とする等間隔格子についての計算を行う。格子点数は x 方向に 200 点、 y 方向に 40 点の格子点である。また、ALE 法を適用した場合、その計算格子の移動速度 c_i を $c_i = (c_x, c_y) = (-1.0, 0.0)$ とする。

4.1.2 初期条件 初期条件は一様流中 ($u = 1.0, v = 0.0, p = 1.0$) に突然上下壁が出現したとする衝撃出発とする。また、レイノルズ数 Re は $Re = 100, \Delta t = 1.0 \times 10^{-3}, \Omega = 1.85$ とする。

4.1.3 境界条件 速度、圧力の境界条件は流入境界、上下壁面境界、流出境界、仮想境界・仮想境界内部それぞれに以下のように設定する。

1. 流入境界条件
速度は一様流固定であり、圧力は 0 次外挿とする。ただし、ALE 法を適用した場合、速度は静止流固定であるとする。
2. 流出境界条件
速度は線形外挿であり、圧力はゾンマーフェルト放射条件とする。
3. 上下壁面境界条件
速度は滑りなし条件であり、圧力は運動方程式からのノイマン条件とする。
4. 仮想境界及び仮想境界内部条件
速度を $u = 0.0, v = 0.0$ とする。ただし、ALE 法を適用した場合、速度は $u = -1.0, v = 0.0$ とする。

4.1.4 収束判定条件 各物理量で式 (5) を満たすとき、定常流であるとする。

4.2 計算結果及び比較

4.2.1 計算結果 以上の計算条件に基づいて行った計算結果を以下に示す。

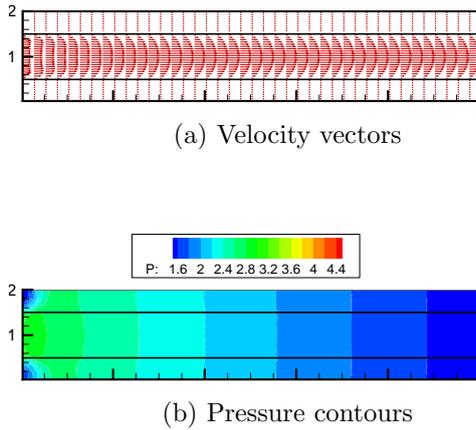


Fig. 3: SIBM-ALE solution

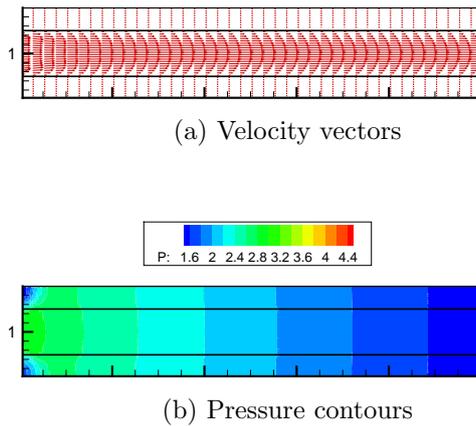


Fig. 4: SIBM solution

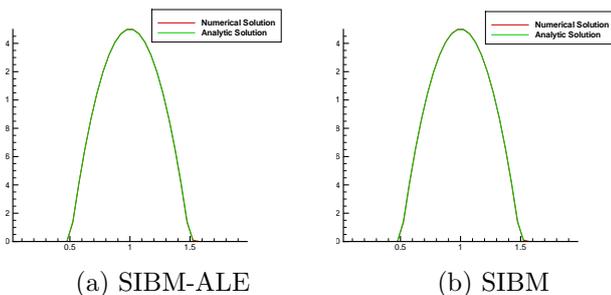


Fig. 5: Velocity profile of outflow section

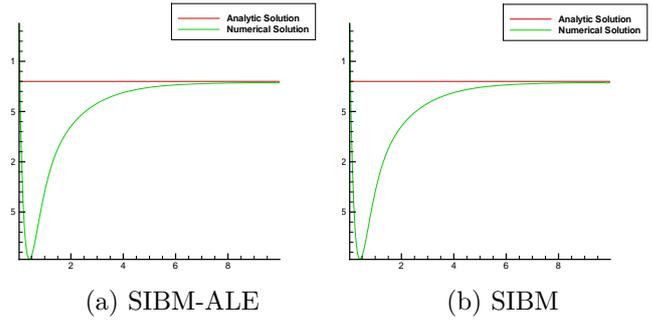


Fig. 6: Pressure gradient on $y = 0.5$

4.2.2 定性的評価 Fig.3(a) 及び Fig.4(a) より、流れはほぼ平行流であり、一様流で流入してきた流れが下流に進むにつれて、ポアズイユ流に変化していることがわかる。圧力勾配については、流入部で変化が大きく、流出部で収束していることが確認できる。また、Fig.3(b) 及び Fig.4(b) より、圧力は流入部で最も大きく、流出部に近づくにつれて一定の割合で圧力が減少し、流出部では最小となっている。

4.2.3 定量的評価 Table 1 に解析解と数値解をまとめる。Table 1 より、ALE 法を適用していないものと適用していないものそれぞれに関して、速度分布の最大流速に対する誤差はそれぞれ 0.133% であり、圧力勾配の収束値は理論値とそれぞれ 1.25% の誤差である。よって、誤差はそれぞれ微小で、良好な結果である。また、どちらの手法を用いても、壁内部の水平方向速度値、垂直方向速度値は 10^{-9} 、 10^{-8} のオーダーであり、壁内部の速度条件を満足している。

Tab. 1: Comparison of numerical and analytic solutions

	Maximum velocity	Pressure gradient
Analytic	1.5	-0.1200
SIBM-ALE	1.496	-0.1215
SIBM	1.498	-0.1215

5. 角柱を有する 2 次元平行平板間流れの数値シミュレーション

本章では、ALE シームレス仮想境界法の有効性を検証するために、2 次元平行平板間において、静止した角柱を配置した場合における解析する。角柱を仮想境界で表現し、数値シミュレーションを用いて定常解を計算する。

5.1 計算条件

5.1.1 計算領域と計算格子 流路の概略図を以下に示す。

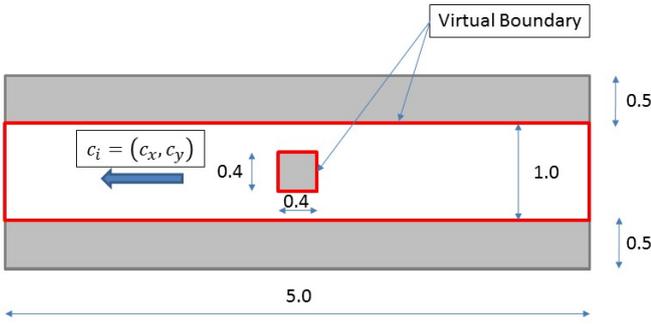


Fig. 7: Computational domain

計算領域は $x-y$ 平面で x 方向に 5, y 方向に 2 とし, 流路内に一辺の長さ 0.4 の角柱を Fig.7 のように配置する. また, 計算格子は, 格子幅を x 方向, y 方向ともに 0.0125 とする等間隔格子についての計算を行う. 格子点数は x 方向に 400 点, y 方向に 160 点の格子点であり, 計算格子は速度 $c_i = (c_x, c_y) = (-1.0, 0.0)$ で移動する.

5.1.2 初期条件 初期条件は静止流中 ($u = 0.0, v = 0.0, p = 1.0$) に突然上下壁が出現したとする衝撃出発とする. また, レイノルズ数 Re は $Re = 100, \Delta t = 1.0 \times 10^{-4}, \Omega = 1.85$ とする.

5.1.3 境界条件 速度, 圧力の境界条件は流入境界, 上下壁面境界, 流出境界, 仮想境界・仮想境界内部それぞれに以下のように設定する.

1. 流入境界条件
速度は静止流固定であり, 圧力は 0 次外挿とする.
2. 流出境界条件
速度は線形外挿であり, 圧力はゾンマーフェルト放射条件とする.
3. 上下壁面境界条件
速度は滑りなし条件であり, 圧力は運動方程式からのノイマン条件とする.
4. 仮想境界及び仮想境界内部条件
速度を $u = -1.0, v = 0.0$ とする.

5.1.4 収束判定条件 各物理量で式 (5) を満たすとき, 定常とする.

5.1.5 抗力係数と揚力係数 定量的比較のために次式を用いて抗力係数 C_D , 揚力係数 C_L を求める.

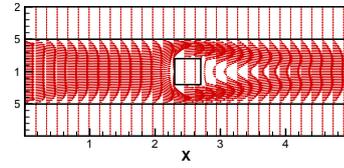
$$C_D = \frac{-2 \int_O (G_x - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial t}) ds}{\rho_0 U_0^2 D} \quad (6)$$

$$C_L = \frac{-2 \int_O (G_y - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial t}) ds}{\rho_0 U_0^2 D} \quad (7)$$

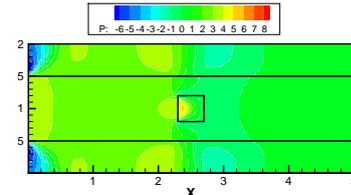
ここで, O はシームレス仮想境界法において外力を付加する領域を表す. また, G_x, G_y は x 方向, y 方向の外力項を表す.

5.2 計算結果及び比較

5.2.1 計算結果 以上の計算条件に基づいて行った計算の結果を以下に示す.



(a) Velocity vectors



(b) Pressure contours

Fig. 8: SIBM-ALE solution

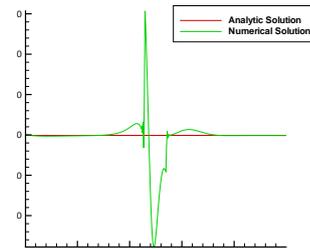


Fig. 9: Pressure gradient on $y = 1.0$

5.2.2 定性的評価 Fig.8(a) を見ると, 角柱後方では定常流に渦が発生していることが確認できる. 次に, Fig.8(b) を見ると, 角柱周りで上下対称となっており, 境界近傍において非物理的な圧力振動も見られない. また, Fig.9 を見ると, 角柱周り及び内部では大きな圧力変化がみられるが, 流出部では収束していることがわかる.

5.2.3 定量的評価 流出部における圧力勾配を示した Fig.9 の解析解及び数値解はそれぞれ $-0.12, -0.16$ であり, その誤差は 25% であった. これは計算を行った流路が短いことが要因になっていると考えられる. また, Table 2 より, 抗力係数の ALE 法を用いたものと従来の手法とを比べると, その誤差は 0.12% と微小であり, 揚力係数はどちらも $10^{-4}, 10^{-5}$ のオーダーであり, 計算条件を満足している.

6. 可変境界条件を有する角柱及び壁内部領域を含む 2

次元平行平板間流れの数値シミュレーション

本章では, 壁内部領域を固定したまま, 計算格子とともに角柱を移動したときの 2 次元平行平板間流れの数値シミュレーションを行い, シームレス仮想境界法による同条件における流れ場の解析結果と比較を行い, 可変境界条件を適用した流れ場における ALE シームレス仮想境界法の有効性を検証する.

Tab. 2: Comparison of C_D and C_L for flow around a square cylinder in a channel

	SIBM-ALE	SIBM
C_D	3.4401	3.4443
C_L	-2.82×10^{-4}	-5.77×10^{-5}

6.1 計算条件

6.1.1 計算領域と計算格子 流路の概略図を以下に示す.

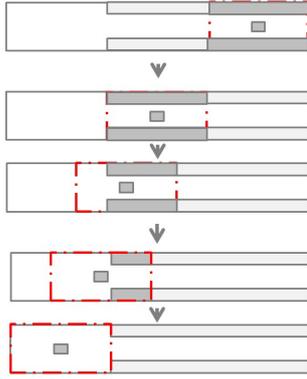


Fig. 10: Computational domain

計算領域は $x-y$ 平面で x 方向に 10, y 方向に 2 とし, 流路内に一辺の長さ 0.4 の角柱を Fig.10 のように配置する. また, 計算格子は, 格子幅を x 方向, y 方向ともに 0.025 とする等間隔格子についての計算を行う. 格子点数は x 方向に 400 点, y 方向に 80 点の格子点である. 計算格子は速度 $c_i = (c_x, c_y) = (-1.0, 0.0)$ で移動するものとして, 壁内部領域は固定したまま, 角柱を計算格子と同じ速度で移動させ, 図のように壁内部領域が計算格子に含まれない状態に達したときに計算を終了する.

6.1.2 初期条件 初期条件は静止流中 ($u = 0.0, v = 0.0, p = 1.0$) に突然上下壁が出現したとする衝撃出発とする. また, レイノルズ数 Re は $Re = 100, \Delta t = 1.0 \times 10^{-3}, \Omega = 1.85$ とする.

6.1.3 境界条件 速度, 圧力の境界条件は流入境界, 上下壁面境界, 流出境界, 仮想境界・仮想境界内部それぞれに以下のように設定する.

1. 流入境界条件
速度は静止流固定であり, 圧力は 0 次外挿とする.
2. 流出境界条件
速度は線形外挿であり, 圧力はゾンマーフェルト放射条件とする.
3. 上下境界条件
壁面の場合, 速度は滑りなし条件であり, 圧力は運動方程式からのノイマン条件とする. トラクションフリー開境界に対しては, 速度は線形外挿であり, 圧力はゾンマーフェルト放射条件とする.
4. 仮想境界及び仮想境界内部条件 (壁内部領域)
速度を $u = 0.0, v = 0.0$ とする.
5. 仮想境界及び仮想境界内部条件 (角柱内部領域)
速度を $u = -1.0, v = 0.0$ とする.

6.1.4 収束判定条件 各物理量で式 (5) を満たすとき, 定常とする.

6.2 計算結果及び比較

6.2.1 計算結果 以上の計算条件に基づいて行った計算の結果を以下に示す. ただし, t は計算格子を移動させてから経過した無次元時間である.

6.2.2 定性的評価 Fig.11 を見ると, 流れはほぼ平行流であることがわかる. また壁内部の速度ベクトルが 0 で, 角柱内部の速度ベクトルが負の値になっていることがわかる. これは計算格子から見た相対的移動を考えると結果は良好であるといえる. また, Fig.12 を見ると, 角柱近傍において, どの時間段階でも, 同じような分布になっており, 良好な結果が得られていることがわかる.

6.2.3 定量的評価 壁内部の水平方向速度値, 垂直方向速度値は $10^{-7}, 10^{-6}$ のオーダーであり, 速度条件が満足されている. また, 垂直方向速度値は 10^{-7} のオーダーであり, 角柱の水平方向速度値は -0.999 ほどであり, 角柱の移動が反映されている.

7. 結論

本研究では, 可変境界条件を有する ALE シームレス仮想境界法を提案し, その有効性を検証することを目的とし, 壁内部領域及び角柱を有する 2 次元平行平板間流れを対象として, 壁面境界からトラクションフリー境界へと変化する可変境界条件の下で検証を実施した. その結果, 以下の結論を得た.

- (1) 角柱及び壁内部領域共に仮想境界近傍の非物理的な圧力振動は見られず, 圧力分布はスムーズに接続されており, 物体表面上での物理量は容易に求めることができた.
- (2) デカルト座標系において, シームレス仮想境界法, ALE シームレス仮想境界法を適用して計算を行うことで, 効率的に結果を得ることができ, 定性的, 定量的に良好な結果が得られた.
- (3) 壁面境界からトラクションフリー境界へと変化する可変境界条件に対して, ALE シームレス仮想境界法は各々の境界条件に対応した数値解を与えることが確認された.

参考文献

- (1) Saiki, E.M. and Biringen, S., Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method, J.Comput. Phys., 123, (1996), 450-465.
- (2) Nishida, H. and Sasao, K., Incompressible Flow Simulations Using Virtual Boundary Method with New Direct Forcing Terms Estimation, Computational Fluid Dynamics 2006 (Springer), (2009), 371-376
- (3) 塩谷和也, シームレス仮想境界法を用いた移動・変形物体周りの流動シミュレーション, 京都工芸繊維大学修士論文, (2013)
- (4) Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Mohd-Yosof, J., Combined immersed boundary finite-difference methods for three-dimensional complex simulation, J.Comput. Phys., 161, (2000), 35-60.

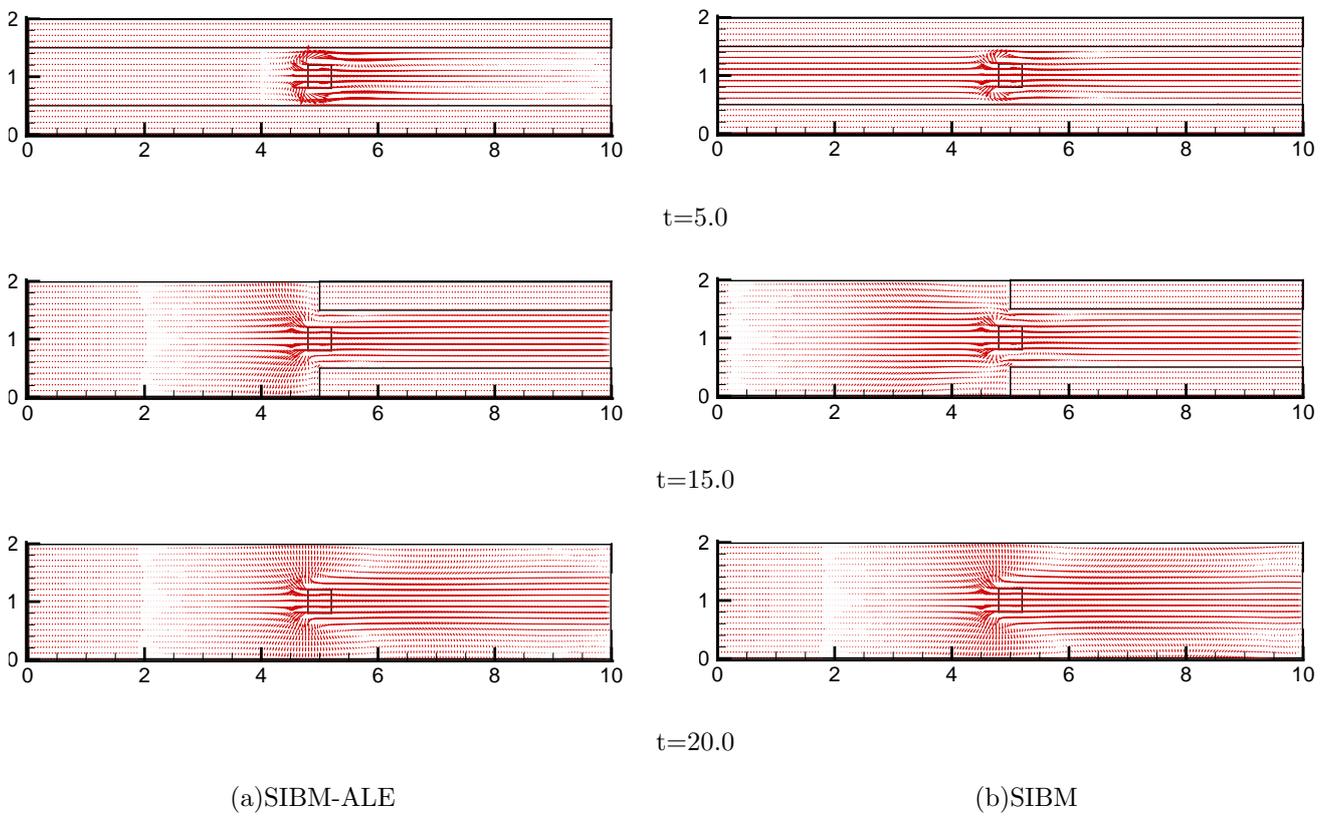
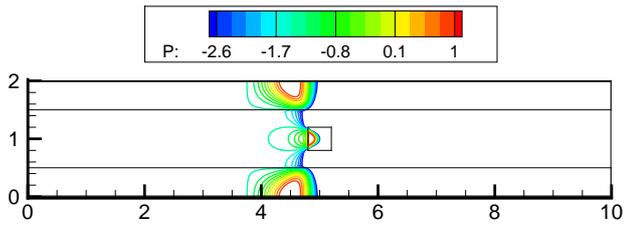
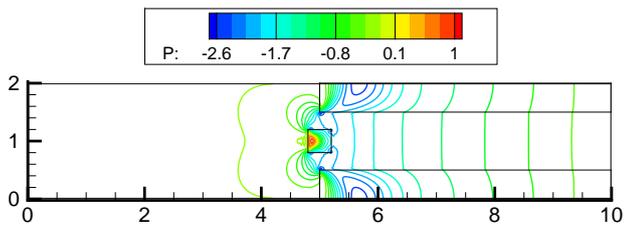
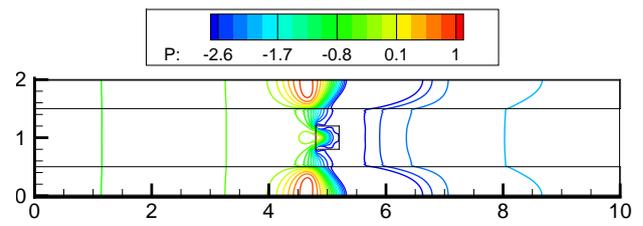


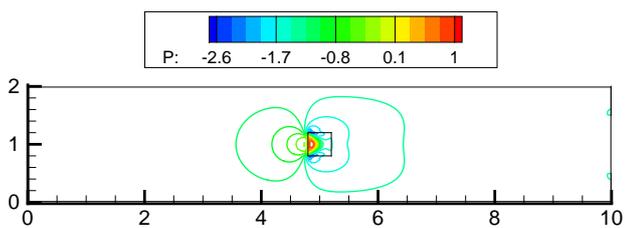
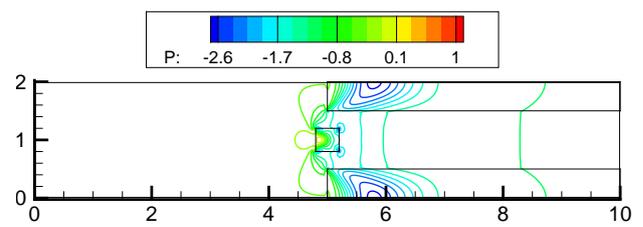
Fig. 11: Comparison of velocity vectors



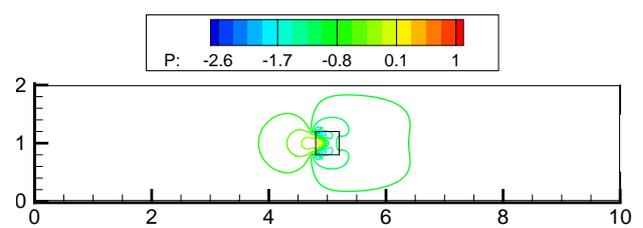
t=5.0



t=15.0



t=20.0



(a)SIBM-ALE

(b)SIBM

Fig. 12: Comparison of pressure field