

# 格子ボルツマン法を用いた移動物体周りの乱流解析に関する検討

Lattice Boltzmann turbulent flow simulation around moving obstacles

- 北原建, 理科大, 千葉県野田市山崎 2 6 4 1, E-mail : 7517616@ed.tus.ac.jp  
 桑田祐丞, 阪府大, 大阪府堺市北区学園町 1 - 1, E-mail : kuwata@me.osakafu-u.ac.jp  
 川口靖夫, 理科大, 千葉県野田市山崎 2 6 4 1, E-mail : yasuo@rs.noda.tus.ac.jp  
 Takeru Kitahara, Tokyo University of Science, Noda, Chiba 278-0022  
 Yusuke Kuwata, Osaka Prefecture University, Sakai, Osaka 599-8531  
 Yasuo Kawaguchi, Tokyo University of Science, Noda, Chiba 278-0022

The new moving boundary treatment for the lattice Boltzmann method is developed to reduce the numerical oscillation around moving obstacles. The proposed method is based on the interpolated bounce-back scheme, and the method specifies the distribution functions for nodes that move from non-fluid to fluid region by imposing the non-slip boundary condition to a obstacle surface. The proposed method is tested in the turbulent flows around a moving sphere, and we confirm that the developed method can satisfactory reduces the drag force oscillation due to the numerical pressure oscillation around a moving obstacle.

## 1. 緒論

移動物体周りの流動現象は多くの工学製品で見られる。例えば、粉体の空気輸送機などの固気混相流をはじめ、プロペラなどの回転物体の流れ、エンジンなどの内燃機関内部の熱流動などがあげられる。これらの産業機器の最適設計を行う上で、物体の形状表現精度が高い格子ボルツマン法が非常に有効な手段である。

格子ボルツマン法を用いて移動境界周りの解析を行う際に、埋め込み境界法や跳ね返り境界が使用される<sup>(1)</sup>。しかし、いずれの手法でも移動物体近傍で圧力振動を引き起こすことが知られており、特に埋め込み境界法のほうがその影響が顕著に表れるとも言われている<sup>(2)</sup>。本研究では、跳ね返り境界法を基に、非物理的な圧力振動を低減する手法の開発を行った。開発手法を用いて円管内の移動球体の乱流解析を行い、手法の評価を行った。

## 2. 多緩和時間格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は流体を仮想粒子の集合体とみなし、密度分布関数の時間発展を解くことで流体運動を解析する手法である。本研究では高レイノルズ数の複雑乱流場においても精度よく安定に計算を行うことができる三次元 27 方向 (D3Q27) 多緩和時間格子ボルツマン法<sup>(3)</sup>を用いる。その密度分布関数  $f$  の時間発展方程式は以下のように表される。

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f(\mathbf{r}, t) = -M^{-1} \hat{S} [m(\mathbf{r}, t) - m^{eq}(\mathbf{r}, t)] \quad (1)$$

ここで、 $m$  は密度分布関数のモーメントであり、 $m^{eq}$  はその平衡量を表す。モーメントは  $27 \times 27$  の変換マトリクス  $M$  により変換される。緩和マトリクス  $\hat{S} = \text{diag}(s_1 \cdots s_{27})$  は安定性を考慮し Suga ら<sup>(3)</sup> により定められたものを用いる。

## 3. 流体ノードの補間計算

本研究では固体との境界条件に Interpolated-Bounce-Back (IPBB) 法を用いる。IPBB 法は壁面の形状表現に優れており、移動物体の計算を行った際にも物体周りの非物理的な圧力振動が小さいことが報告されている<sup>(2)</sup>。移動物体の計算を二次元 9 方向速度モデル (D2Q9) の図を用いて説明する。図 (1) に示すように固体ノードから流体ノードに切り替わる格子点を白抜き丸で示す。新たに流体ノードに切り替わったノード点に関して、隣接ノードから並進する分布関数を黒矢印、それ以外の分布関数

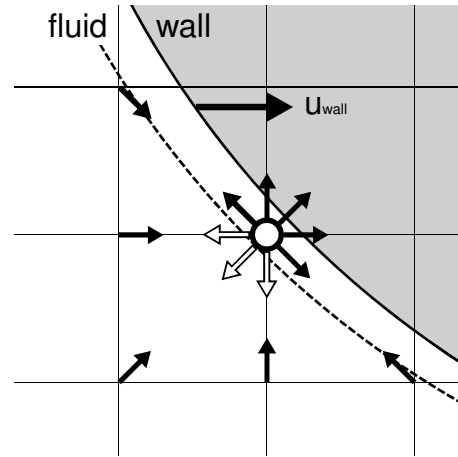


Fig. 1: Illustration of a moving boundary. Black arrows are known  $f_\alpha$ . White arrows are unknown  $f_\alpha$ .

を白矢印で示す。白矢印の分布関数は、何らかの方法で補間する必要がある。

この  $f_\alpha$  の補間の取り扱い、物体周りの非物理的な圧力振動に大きな影響を与えると報告されており、これまでに様々な方法が提案されてきた<sup>(2)</sup>。その中でも、一般的に使用される Luo et al(2003) が提案した手法<sup>(1)</sup> と、振動を抑えるため本研究で開発した手法について説明する。

### 3.1 Luo et al(2003) の補間法

まず、図 (2) に示すように移動物体の境界面の法線ベクトルに最も角度が近い速度ベクトル  $\mathbf{e}_\alpha$  を計算し、その速度ベクトル  $\mathbf{e}_\alpha$  方向にある三点の格子点の  $f_\alpha, f_\alpha(\mathbf{r}', t), f_\alpha(\mathbf{r}'', t), f_\alpha(\mathbf{r}''', t)$  を用いて

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 3f_\alpha(\mathbf{r}', t) - 3f_\alpha(\mathbf{r}'', t) + f_\alpha(\mathbf{r}''', t) \quad (2)$$

として二次精度の外挿補間を行う。この手法は非常にシンプルでありながら、高精度で安定に移動物体周りの解析が可能である。いっぽうで、移動物体周りで非物理的な数値振動が生じてしまうことが報告されている<sup>(1)</sup>。

### 3.2 開発した補間法

本開発手法では、固体ノードから新たに流体ノードに切り替わった点は固体壁に十分近いと仮定する。そこで本研究では、そのノード点に滑りなし条件を課すことで、分布関数を与える。物体の移動速度を  $U_{wall}$  とすると、

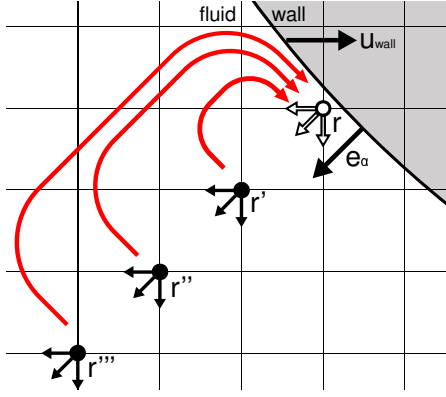


Fig. 2: Illustration of a moving boundary. Black arrows are known  $f_\alpha$ . White arrows are unknown  $f_{\bar{\alpha}}$ .

並進する分布関数と逆向き方向の分布関数  $f_{\bar{\alpha}}$  は、

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}_r, t+1) = f_\alpha(\mathbf{x}_r, t) + 3w_\alpha(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{U}_{wall}) \quad (3)$$

と表される。ここで、 $w_\alpha$  は速度方向の重み係数である。しかし、この手法では格子点に留まる方向成分の密度分布関数を決定することができない。そこで、格子点に滞留する方向成分の密度分布関数を与えるための方法を考える。流体の密度  $\rho$  は、密度分布関数の総和で表される。

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^9 f_\alpha \quad (4)$$

さらに、以下のように変形することも可能である。

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha + f_9 \quad (5)$$

ここで、分布関数の非平衡成分は速度勾配テンソルと関連付けることができ、Chapman-Enskog 展開<sup>(4)</sup>することにより以下の式で表すことができる。

$$f_\alpha^{neq} \simeq -\frac{\tau \delta t}{C_s^2} w_\alpha Q_{\alpha ij} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_i} \quad (6)$$

ここで、 $\delta t$  は時間刻み、 $\tau$  は緩和時間、 $C_s$  は音速を表す。また、テンソル  $Q_{\alpha ij}$  は

$$Q_{\alpha ij} = e_{\alpha i} e_{\alpha j} - C_s^2 \delta_{ij} \quad (7)$$

と定義されており、この  $Q_{\alpha ij}$  の式と連続の式から式(6)を以下のように書き換えることができる。

$$f_\alpha^{neq} \simeq -\frac{\tau \delta t}{C_s^2} w_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha j} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_i} \quad (8)$$

滞留成分の分布関数は粒子の速度成分が零なので、 $e_{9x}, e_{9y}$  はそれぞれ、 $e_{9x} = 0, e_{9y} = 0$  であることから  $f_9^{neq} \simeq 0$  とすることができる。よって、式(5)は

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha + f_9^{eq} \quad (9)$$

と書き換えられる。続いて、平衡成分は、密度  $\rho$  と、速度ベクトル  $\mathbf{U}_{wall}$  で表すことができ、

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha + w_9 \rho \left[ 1 - \frac{(\mathbf{U}_{wall} \cdot \mathbf{U}_{wall})}{2c_s^2} \right] \quad (10)$$

と変形することができる。式(10)を密度  $\rho$  について変形すると、

$$\rho = \frac{\sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha}{w_9 \left[ 1 - \frac{(\mathbf{U}_{wall} \cdot \mathbf{U}_{wall})}{2c_s^2} \right]} \quad (11)$$

と書き表され、密度  $\rho$  を与えることができる。ここで、ノード点の滞留成分の分布関数  $f_9$  は  $\rho$  を用いることで、以下のように与えることができる。

$$f_9 \simeq f_9^{eq} = w_9 \rho \left[ 1 - \frac{(\mathbf{U}_{wall} \cdot \mathbf{U}_{wall})}{2c_s^2} \right] \quad (12)$$

ここでは簡単のために二次元 9 方向速度モデルで説明を行ったが、これらの手法はどの速度モデルでも用いることができる。

#### 4. 計算条件

開発手法と既存手法の比較を行うため、図(3)に示すように球を静止させて、周囲の円管壁を  $U_0$  で動かした解析と、図(4)に示すように静止した円管内で球体を  $U_0$  で移動させた解析を行い、これらの比較を行う。二つの流れ場はガリレイ不変であるため、円管の相対速度で評価を行うことで、相似の流れ場となる。計算領域は円管の直径  $D$  を規準に  $2.5D(x) \times D(y) \times D(z)$  に対して、格子数は  $312(x) \times 125(y) \times 125(z)$  となっており、 $x$  方向には周期境界条件を課した。球の直径  $d$  と格子幅  $\Delta$  の比は  $d/\Delta = 25$  とし計算を行った。代表長さ  $d$ 、代表速度  $U_0$  を基にしたレイノルズ数で  $1000 \sim 4000$  の間でラージ・エディ・シミュレーション (LES) を行い、サブグリッドスケールモデルには、WALE モデルを用いた。

レイノルズ数ごとの、格子幅  $\Delta$  と物体の代表速度  $U_0$  と  $\delta t$  の比  $\Delta/U_0 \delta t$ 、 $U_0$  と粒子速度  $c$  の比  $U_0/c$  を表(1)に示す。 $\Delta/U_0 \delta t$  は移動物体が  $\Delta$  進むために必要なタイムステップ数、 $U_0/c$  は粒子速度に対する代表速度の比を表す。

Tab. 1: Comparison of calculation condition.

| $Re(= dU_0/\nu)$ | $\Delta/U_0 \delta t$ | $U_0/c$ |
|------------------|-----------------------|---------|
| 1000             | 100.0                 | 0.01    |
| 2000             | 50.0                  | 0.02    |
| 3000             | 33.3                  | 0.03    |
| 4000             | 25.0                  | 0.04    |

各ノード点における応力  $\delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha)$  は<sup>(5)</sup>、

$$\delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha) = -[f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_\alpha - \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_\alpha]. \quad (13)$$

と与えられる。ここで、 $\tilde{f}_\alpha$  は次のステップで格子に衝突する密度分布関数である。

$$f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{x}, t + \delta t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (14)$$

固体境界面周りの格子点で応力を積分することで、物体に働く力  $\mathbf{F}$  を以下のように得ることができる。

$$\mathbf{F} = \sum \delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha) \quad (15)$$

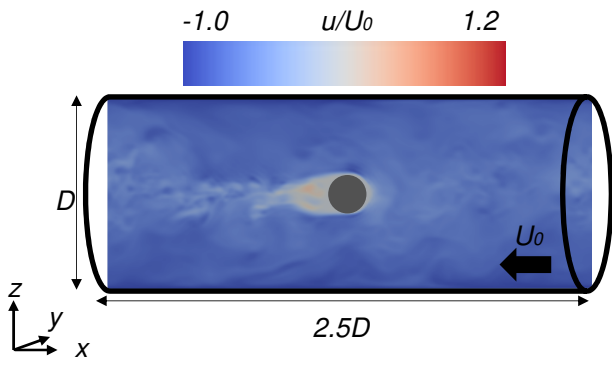


Fig. 3: Computational geometry of the turbulent channel flow.(resting sphere)

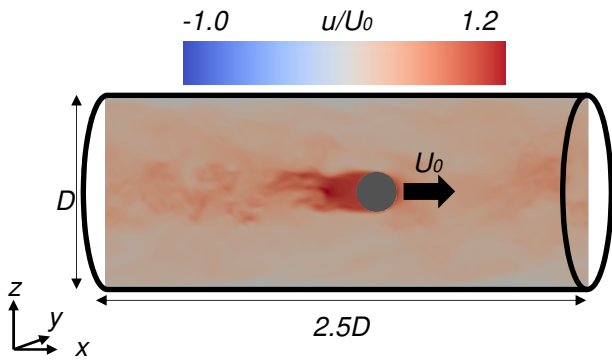
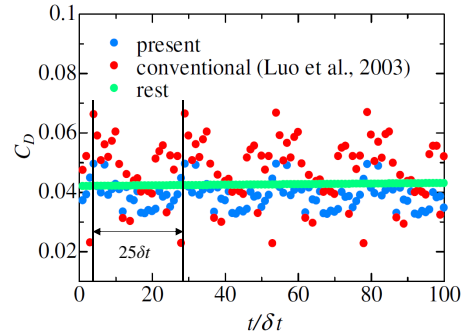


Fig. 4: Computational geometry of the turbulent channel flow.(moving sphere)

## 5. 結果・考察

図 (5)(a) に  $Re = 4000$  での瞬時の抗力係数  $C_D$  の時間履歴 (1~100 timesteps) の比較を示す。移動物体に開発手法を用いたものを present, 既存手法を conventional (Luo et al., 2003), 固体から流体に切り替わる格子点の発生がなく, 本報で問題とする誤差の発生しない静止物体を rest とする。平均的な抗力係数  $C_D$  は同程度であるが, 移動境界を用いた開発・既存手法はどちらにおいても  $C_D$  が時間と共に大きく振動している。振動は数タイムステップごとに生じていることから, 乱流によって生じる変動ではなく, 格子点の補間による非物理的な数値振動だと考えられる。いっぽう, 静止物体ではこのような数値振動は見られないことから, 数値振動は移動境界特有の問題であると言える。実際に,  $Re = 4000$  の条件では, 移動物体は格子幅  $\Delta$  を  $25\delta t$  で通過しているため,  $25\delta t$  の周期で振動が繰り返されていることが確認できる。

(a)



(b)

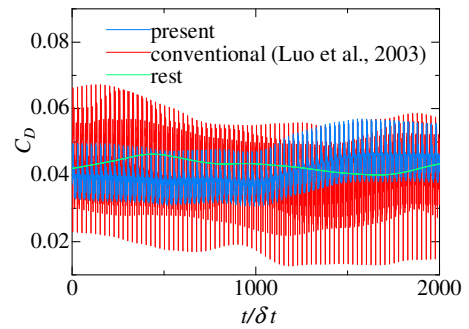


Fig. 5: Comparison of  $C_D$  at  $Re=4000$ .(a)1~100 timesteps (b)1~2000 timesteps

横軸のタイムステップをさらに広くとったグラフを図 (5)(b) に示すと, 静止物体にも変動が確認できる。この振動は開発手法, 既存手法にも見られ, 乱流の乱れによる変動であると考えられる。つまり, 開発手法, 既存手法には高周波の非物理的な数値振動と乱流の乱れの2つの変動が共存しているが, 静止物体には低周波の乱流の乱れの変動のみが生じている。

レイノルズ数  $Re = 1000, 2000, 3000, 4000$  の  $C_D$  の平均抗力係数  $\overline{C_D}$  と  $C_D$  の根二乗平均 (RMS)  $C_{D_{rms}}$  を図 (6) と図 (7) に示す。  $C_{D_{rms}}$  は,

$$C_{D_{rms}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (C_D(t))^2} \quad (16)$$

と定義され,  $N$  は計算回数であり, 本研究では乱流が定常になってから,  $N = 2^{20}$  回の計算を行い  $\overline{C_D}$  と  $C_{D_{rms}}$  を求めた。平均抗力係数  $\overline{C_D}$  は, 改良手法, 既存手法, 静止物体とに大きな違いは見られず, 移動境界を用いた方法でも乱流域の抗力係数を正しく評価できていることが分かる。しかしいっぽうで,  $C_{D_{rms}}$  は開発手法は静止物体の2倍程度の大きさとなっており, 既存手法ではさらに大きな値を示すことが確認できる。これらは, 図5にみられるような数値振動による振動の影響が含まれていると考えられる。そこで乱流変動寄与と数値振動寄与とを分けて議論するため, スペクトル解析を行った。

図 (8) に  $Re = 4000$  での  $C_D$  の時間変動をスペクトル解析した結果を示す。パワースペクトル  $P(f)$  を縦軸に取り, 周波数  $f$  に時間ステップ  $\delta t$  をかけることにより無次元化した無次元周波数を横軸に取る。スペクトル解析をした結果, 無次元周波数  $10^{-3}$  以下の領域では, 三つの手

法とも良く似た値のパワースペクトルを示しており、無次元周波数  $0.8 \times 10^{-4}$ ,  $1.6 \times 10^{-4}$ ,  $2.4 \times 10^{-4}$  付近でピークを持つことも確認できる。これらのピークは物体後方の渦放出に起因するものであると考えられる。いっぽう、無次元周波数  $10^{-2}$  以上の範囲では、開発手法、既存手法に、無次元周波数 0.04 の整数倍でピークを持っていることがわかる。この周期は、物体が 1 格子を移動する周期に対応しているために、このピークは非物理的な数値振動によるものが原因であると考えられる。

非物理的な振動が  $C_{D_{rms}}$  に与える影響を理解するために、周波数領域でのパワースペクトルの積分値を求めた。ここで、無次元周波数 0.02 からナイキスト周波数 0.5 まで積分区間を取りパワースペクトル  $P(f)$  を積分することで  $C_{D_{rms}}$  を求めた。ここで、乱流変動と非物理的振動の境界である無次元周波数の基準には様々な選び方が考えられるが、その選び方によって結果が大きく変わることがないことは確認している。 $C_{D_{rms}}$  を求める式を以下のように表す。

$$\overline{x^2} = \int_{0.02}^{0.5} P(f) df \quad (17)$$

$$C_{D_{rms2}} = \sqrt{\overline{x^2}} \quad (18)$$

求めた  $C_{D_{rms2}}$  を図 (9) に示す。静止物体の場合は数値振動がみられないために、 $C_{D_{rms2}}$  は非常に小さい。また、開発手法でも数値振動の影響を完全に除くことはできないものの、 $C_{D_{rms2}}$  は既存手法の半分程度になっており、開発手法を用いることにより、非物理的振動をある程度抑制できることがわかった。

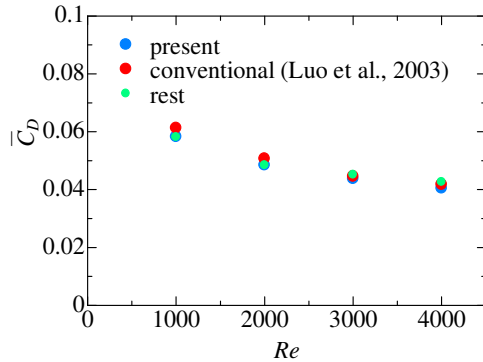


Fig. 6: Comparison of  $\overline{C_D}$ .

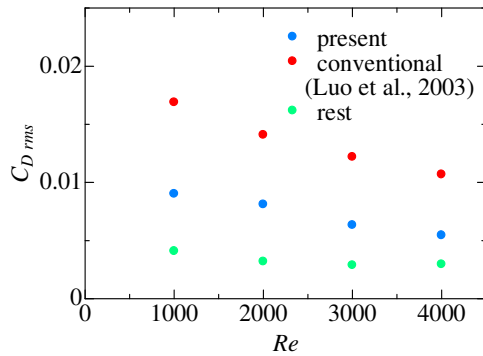


Fig. 7: Comparison of  $C_{D_{rms}}$ .

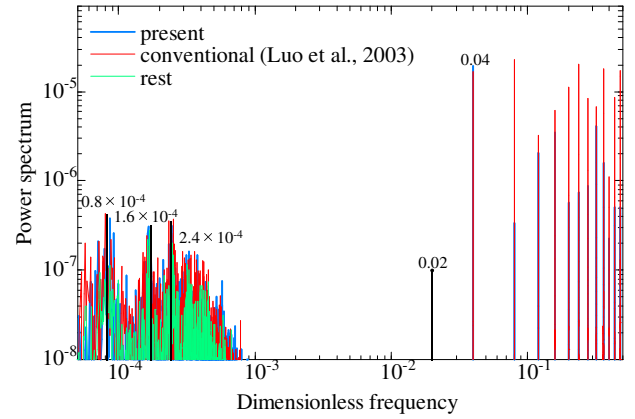


Fig. 8: Comparison of the power spectrum at  $Re=4000$ .

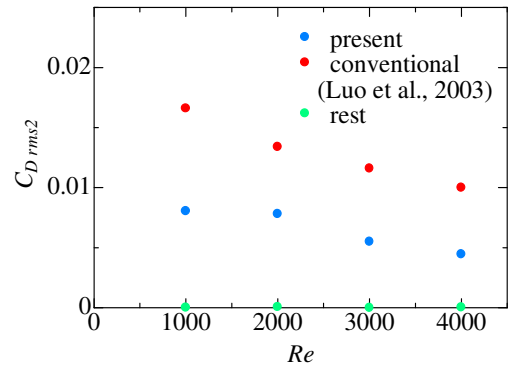


Fig. 9: Comparison of  $C_{D_{rms2}}$ .

## 6. 結言

本研究では非物理的な振動を抑制するための手法の開発を行い、円管内の移動球体の LES を行い、その評価を行った。移動物体の解析において、物体周りで非物理的な圧力振動が生じる問題に対し、開発手法を用いることにより物体の数値振動が抗力に与える影響を既存手法に比べて低減すること成功した。しかし、数値振動を完全に除去するには至らず、今後の課題となった。

## 参考文献

- (1) L. Luo et al., "Lattice Boltzmann method for moving boundaries", *Journal of Computational Physics*, 184 (2003), pp.406-421.
- (2) L. Chen et al., "A comparative study of lattice Boltzmann methods using bounce-back schemes and immersed boundary ones for flow acoustic problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74 (2014), pp.439-467.
- (3) K. Suga et al., "A D3Q27 Multiple-Relaxation Time Lattice Boltzmann Method for Turbulent flows", *Computers & Mathematics with Applications*, 69 (2015), pp.518-529.
- (4) S. Chen et al., "Lattice Boltzmann method for fluid flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30 (1998), pp.329-364.
- (5) Y. Chen et al., "Momentum-exchange method in lattice Boltzmann simulations of particle-fluid interactions.", *Physical Review*, E88,013303 (2013).