

# 矩形管乱流における空間任意精度数値解法

English Spatially arbitrary order algorithm in turbulent rectangular pipe flow

- 本部力斗, 阪大基礎工, 大阪府豊中市待兼山町 1-3, E-mail : honbe@tes.me.es.osaka-u.ac.jp  
清水雅樹, 阪大基礎工, 大阪府豊中市待兼山町 1-3, E-mail : shimizu@tes.me.es.osaka-u.ac.jp  
Rikito Hombe, Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 560-8531, Japan  
Masaki Shimizu Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 560-8531, Japan

The turbulent secondary flow in a rectangular pipe is caused by the Reynolds stress which concentrates corners as Reynolds number increases. Although this concentration requires numerical accuracy, singularities at the corner points significantly result in a loss of accuracy. For a high precision modeling of the secondary flow, we describe the arbitrary order algorithm with the small computational cost  $O(N^2)$  ( $N^2$ : the number of quadrature points) to solve the modified Helmholtz equation in a rectangular region. In this algorithm corner singularities are removed by using singular corner functions which have the same discontinuities at the corner points. Then, we can obtain the remained regular solution as the series of the basis functions which shows exponential convergence.

## 1. 序論

矩形管乱流では、流れ方向に垂直な断面内にも 0 でない平均速度場（プラントルの第二種二次流れ）が生じる。これは円管乱流や平行平板間乱流では見られない現象である。矩形管流れでは角の存在のため、壁面に沿った方向の一様性が無いためである。図 (1) に矩形管乱流二次流れの速度場、渦度場を示している。高レイノルズ数になるほど二次流れの駆動源が角に寄っていく事がわかる。このため高レイノルズ数における二次流れのレイノルズ数規格化を知るには、角近傍で十分な精度の数値計算を行う必要があるが、角特異性のために通常の数値計算法では角で大きな誤差が残る。そこで、角特異性があっても高精度に解けるような数値計算手法の開発を試みる。また、矩形管は 2 方向に壁があるため、計算コストが少なくとも、一方向の解像度を  $N$  として、1 ステップあたり  $O(N^4)$  はかかる。我々の知る限り、スペクトル法による  $O(N^3)$  の非圧縮の解法はこれまでない。ここでは Braverman et al.(2004)(3) の手法を発展させて、角特異性があっても、 $r$  を任意パラメータとして誤差が  $O(N^{-2r})$  で収束する解法を述べる。

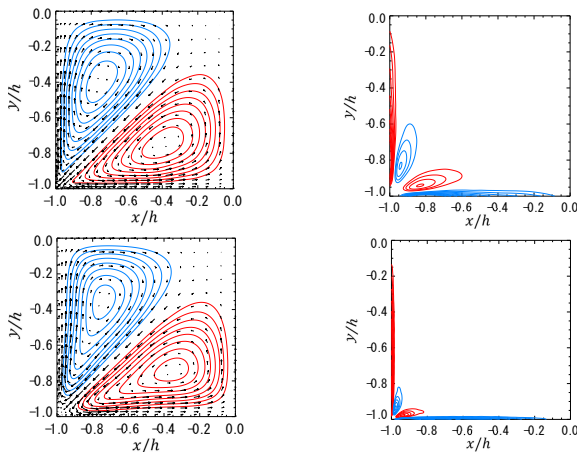


Fig. 1: Velocity fields (left) and vorticity fields (right) of turbulent Secondary flow in a square pipe at  $Re_\tau = 450$  (top) and  $Re_\tau = 1050$  (bottom).

## 2. 数値計算法

### 2.1 計算領域と境界関数

これから述べる数値計算手法において計算領域  $\Omega$  と境界関数  $\Phi(x, y)$  を各辺で次のようにおく。

$$\Omega = (-1, 1) \times (-a, a) \quad (1)$$

$$\phi_1(x) = \Phi(x, a), \quad \phi_2(x) = \Phi(-1, y) \quad (2)$$

$$\phi_3(y) = \Phi(x, -a), \quad \phi_4(y) = \Phi(1, y) \quad (3)$$

### 2.2 ラプラス方程式

ここではラプラス方程式

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

の数値的解法を考える。境界条件はディリクレ型境界条件、

$$u = \Phi(x, y) \quad \text{on } \partial\Omega \quad (5)$$

またはノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \Phi(x, y) \quad \text{on } \partial\Omega \quad (6)$$

とする。本研究における解法は 3 つの段階から構成される。(i) まず、境界条件が角でラプラス方程式に整合していない場合、整合していない次数に応じて角で特異な調和関数を解から差し引くことで、解が角でもラプラス方程式に整合する問題に変換する。(ii) 次に、修正された問題における、新たな境界条件の接線方向偶数階微分が角で 0 になるように、解析的な調和関数を解から差し引く。(iii) 境界条件を  $\cos, \sin$  級数展開し、各級数を境界条件とする調和関数を用いて解を構成する。この級数解は (i) と (ii) の変換のために、収束の速いものとなり、境界条件の接線微分を角で  $2r - 1$  階まで 0 にすることで、解は  $O(N^{-2r-2})$  の速さで収束する。

**2.2.1 境界条件がラプラス方程式に不整合な場合—特異除関数  $U_s^{(r)}$  の構築** ラプラス方程式の解が角で解析的であることは、境界関数  $\Phi(x, y)$  が角で連続かつラプラス方程式に整合していることに同等である。すなわち、

$$\frac{\partial^{2k} \Phi}{\partial x^{2k}} - (-1)^k \frac{\partial^{2k} \Phi}{\partial y^{2k}} = D^{(k)} \quad (7)$$

とすると、各角で  $D^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) が 0 のとき解は角でも解析的である。4 辺で滑らかな境界値をそれぞれ勝

手に設定すると、一般には  $\Phi$  は角で不連続またはラプラス方程式に不整合になる。これが角での特異性の原因である。(7)の右辺が0にならないことをラプラス方程式に不整合であるということにする。こうした不整合性を有する調和関数を解から差し引いた問題を考えると、解は角でも解析的となる。そこで、

$$u_{s,k}(x,y) = \frac{-2}{\pi(2k)!} \text{Im}(z^{2k} \ln z) \quad (8)$$

なる関数を用意する。 $k$  は0以上の整数であり、 $u_{s,k}$  は原点と無限遠を除いて調和関数である。また、原点において  $u_{s,k}$  は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2l} u_{s,k}}{\partial x^{2l}} &= \frac{\partial^{2l} u_{s,k}}{\partial y^{2l}} = 0 \quad (l \neq k) \\ \frac{\partial^{2k} u_{s,k}}{\partial x^{2k}} &= 0, \quad \frac{\partial^{2k} u_{s,k}}{\partial y^{2k}} = (-1)^{k+1} \end{aligned} \quad (9)$$

を満たす。ゆえに、この関数は角での  $2k$  階微分の不整合性を除去するのに用いることが出来る。 $2r$  階微分までの不整合性を全ての角で除去するには、

$$\begin{aligned} U_s^{(r)} &= \sum_{k=0}^r \{ D_1^{(k)} u_{s,k}(-x+1, -y+a) \\ &\quad + D_2^{(k)} u_{s,k}(x+1, -y+a) \\ &\quad + D_3^{(k)} u_{s,k}(x+1, y+a) \\ &\quad + D_4^{(k)} u_{s,k}(-x+1, y+a) \} \end{aligned} \quad (11)$$

を用いて  $u - U_s^{(r)}$  とすると、少なくとも  $2r$  階微分まで角で連続な関数となるため、より精度の次数が大きい解法が可能となる。ここで、 $D_*^{(k)}$  はそれぞれの角における、(7)の右辺の値である。

ノイマン境界条件の場合(7),(8)を

$$\frac{\partial^{2k-1} \Phi}{\partial x^{2k-1}} - (-1)^{(k-1)} \frac{\partial^{2k-1} \Phi}{\partial y^{2k-1}} = D^{(k)} \quad (12)$$

$$u_{s,k}(x,y) = \frac{2}{\pi(2k)!} \text{Re}(z^{2k} \ln z) \quad (13)$$

に変更するだけである。

**2.2.2 境界条件の接線方向偶数階微分が角で0でない場合—解析的な控除関数  $U_r^{(r)}$  の構築** Averbuch et al.(1998)は境界条件を sin 級数展開し、各級数の境界条件に合致した調和関数の級数を用いることで、 $O(N^2)$  の解法を考案した。境界条件の sin 級数展開の収束を高速にするため、更に角でも滑らかな調和関数を解から差し引き、境界条件の接線方向の偶数階微分が0になるような問題に帰着させる。 $u - U_s^{(r)}$  の境界条件の角における偶数階接線微分を  $2r$  階まで0にするため、

$$U_r^{(r)}(x,y) = \text{Re} \left( \sum_{k=0}^{2(r+1)} c_k^{(r)} z^k \right) \quad (14)$$

なる関数を用いる。下添え字の  $r$  は regular の  $r$  であり、上添え字と意味が異なる。 $U_r^{(r)}$  は調和関数かつ角でも解析的である。ここで  $z = x + iy$  は複素変数である。展開係数  $c_k^{(r)} = a_k^{(r)} + ib_k^{(r)}$  は、 $b_0^{(r)} = a_{2(r+1)}^{(r)} = 0$  で、その他

の  $4(r+1)$  個の係数は  $u - U_s^{(r)}$  の境界条件の偶数階微分の角での値から以下のように決められる。 $2r$  階までの偶数階微分値は各角で  $8(r+1)$  個あるが、今は(7)の右辺が0になる制約のため、4角で合計して  $4(r+1)$  個の独立な条件式が得られ、境界値関数の  $2k$  階  $x$  微分値を各角で  $\Phi_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とすると、 $k = 0, 1, 2, \dots, r$  で、

$$\left. \frac{\partial^{2k} U_r^{(r)}}{\partial x^{2k}} \right|_{x_i} = \Phi_i^{(k)} \quad (15)$$

により展開係数が決められる。ここで、 $\Phi_i$  は元の境界条件ではなく、 $u - U_s^{(r)}$  の境界条件を改めて同じ記号で表したものであることに注意する。

ノイマン境界条件の場合は境界を  $\cos$  展開した後、解を構築するため(14)を

$$U_r^{(r)}(x,y) = \text{Re} \left( \sum_{k=2}^{2(r+1)} c_k^{(r)} z^k \right) \quad (16)$$

に変更して境界条件の接線方向奇数階微分を0にすると良い。

**2.2.3 境界条件の sin 級数展開による解の構築** 前の2つの小々節で構築した控除関数を指し引いた解  $u - U_s^{(r)} - U_r^{(r)}$  の境界条件を各辺で改めて  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とする。このとき、 $\phi_i$  の sin 級数展開、

$$\phi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \sin(\pi n(x+1)/2) \quad (17)$$

は  $n \rightarrow \infty$  で  $c_{1n}$  は  $O(n^{-2r-3})$  の速さで収束する。このため、この級数和を  $N$  までの和で近似する場合、 $N \rightarrow \infty$  で最大値誤差は  $O(N^{-2r-2})$  で収束する。調和関数

$$h_n^x(x,y) = \sin\{\pi n(x+1)/2\} \frac{\sinh\{\pi n(y+a)/2\}}{\sinh\{\pi na\}} \quad (18)$$

は  $y = a$  の辺上で  $h_n(x,a) = \sin\{\pi n(x+1)/2\}$  であり、他の辺上で0である。 $x$  と  $y$  の役割を入れ替えた

$$h_n^y(y,x) = \sin\{\pi n(y+a)/2\} \frac{\sinh\{\pi n(x+1)/2\}}{\sinh\{\pi n\}} \quad (19)$$

も用いて、各辺上でこれらの調和関数を重ね合わせて、

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} h_n^x(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} h_n^y(y,-x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n3} h_n^x(x,-y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n4} h_n^y(y,x) \end{aligned} \quad (20)$$

とすると、 $u = U + U_s^{(r)} + U_r^{(r)}$  が(4)の解である。

ノイマン境界条件の場合は(18),(19)を

$$\phi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} \cos(\pi n(x+1)/2) \quad (21)$$

$$h_n^x(x,y) = \cos\{\pi n(x+1)/2\} \frac{\cosh\{\pi n(y+a)/2\}}{(\pi n/2) \sinh\{\pi na\}} \quad (n \neq 0) \quad (22)$$

に変更して同様に解を構築できる。

### 2.3 ポアソン方程式 ポアソン方程式

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

における数値解法を述べる. 境界条件はディリクレ境界条件, ノイマン境界条件とする. 以下では, この方程式の特解を求める方法を述べる. 特解が求まれば, その境界値を境界条件から差し引いたものを改めて境界条件とするラプラス方程式を解き, その解を特解に加えることで解を得ることができる. ラプラス方程式の解法は前の節の解法を用いると良い. ここの (23) の特解の解法は右辺の  $f$  から角関数  $f_{\text{corner}}$  と境界関数  $f_{\text{edge}}$  を上手く差し引くことで右辺の  $\sin, \cos$  展開の収束を効率的にする方法である.

**2.3.1  $f_{\text{corner}}$  の構築** ディリクレ境界条件の場合を考える. まず, 各辺での関数を  $\sin$  展開するために, 各角での偶数階微分値を 0 にしたい. 角 1 ( $\mathbf{x}_1 = (1, a)$ ) において,  $2r$  階微分まで 0 にするために,

$$f_{\text{corner},1} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} A_{1ij} \frac{\sinh(\nu_i(1+x))}{\sinh 2\nu_i} \frac{\sinh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_j} \quad (24)$$

なる関数を用いる. ここで,  $\nu_i (i=0, 1, \dots, r)$  は例えば,  $\nu_i = i+1$  とする.  $2r$  までの偶数階微分値は各角において  $(r+1)(r+2)/2$  個あり, 各角の係数の数も同じ個数だけあるため,  $f - f_{\text{corner},1}$  の  $2r$  までの偶数階微分値が角で 0 になるようにこれらの係数を決定することができる. なお, この関数は他の角において偶数階微分が 0 である. 故に, 他の角でも同様な関数を構築し, 4 つの和を取ったものを  $f_{\text{corner}}$  とする. また, (24) の級数和の各項はラプラス関数の固有関数であることから,  $\Delta u_{\text{corner},1} = f_{\text{corner},1}$  を満たす  $u_{\text{corner},1}$  は容易に求められ,

$$u_{\text{corner},1} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} \frac{A_{1ij}}{\nu_i^2 + \nu_j^2} \frac{\sinh(\nu_i(1+x))}{\sinh 2\nu_i} \frac{\sinh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_j} \quad (25)$$

となる. 他の角においても同様に求められる. ここでも, 各角に関するもの全ての和をとったものを  $u_{\text{corner}}$  とする. ノイマン境界条件の場合は各辺での関数を  $\cos$  展開するために, (24) を

$$f_{\text{corner},1} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r-(i-1)} A_{1ij} \frac{\cosh(\nu_i(1+x))}{\sinh 2\nu_i} \frac{\cosh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_j} \quad (26)$$

と修正して各角での奇数階微分値を 0 にすればよい.

**2.3.2  $f_{\text{edge}}$  の構築** 次に,  $g = f - f_{\text{corner}}$  の各辺での垂直方向微分を  $2r$  階まで 0 にしたい.

$$\left. \frac{\partial^{2q} g}{\partial y^{2q}} \right|_{y=a} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{1n}^{(q)} \sin(\lambda_n(x+1)) \quad (27)$$

のなる  $\sin$  級数を計算し,

$$f_{\text{edge},1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^r E_{1nj} \sin(\lambda_n(x+1)) \frac{\sinh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_j} \quad (28)$$

とにおいて,  $g - f_{\text{edge},1}$  の偶数階  $y$  微分が 0 より, 各  $n$  で,  $r+1$  変数に関する連立方程式

$$\sum_{j=0}^r E_{1nj} \nu_j^{2q} = e_{1n}^{(q)} \quad (q=0, 1, \dots, r) \quad (29)$$

から  $E_{1nj}$  を求めればよい. 他の辺上でも同様にして, 全ての和を取って  $f_{\text{edge}}$  とすればよい. また,

$$u_{\text{edge},1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^r E_{1nj} \sin(\lambda_n(x+1)) \frac{\sinh(\nu_j(a+y))}{(\nu_i^2 - \lambda_n^2) \sinh 2\nu_j} \quad (30)$$

ノイマン境界条件の場合は  $\cos$  展開を用いて特解を構築するため (27),(28) を

$$\left. \frac{\partial^{2q-1} g}{\partial y^{2q-1}} \right|_{y=a} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{1n}^{(q)} \cos(\lambda_n(x+1)) \quad (31)$$

$$f_{\text{edge},1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r E_{1nj} \cos(\lambda_n(x+1)) \frac{\cosh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_j} \quad (32)$$

と修正して境界の奇数階垂直方向微分を 0 にすればよい.

**2.3.3 特解の構築** 高階微分を除去するほど  $h$  の  $\sin$  展開の収束は速く,  $2k$  階微分まで引くことで最大値誤差は  $O(N^{-2k-2})$  となる. 最後に  $h$  を  $\sin$  展開して,

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} \sin(\lambda_{xk}(x+1)) \sin(\lambda_{yl}(y+a)) \quad (33)$$

$$u_0(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{kl}}{\lambda_{xk}^2 + \lambda_{yl}^2} \sin(\lambda_{xk}(x+1)) \sin(\lambda_{yl}(y+a)) \quad (34)$$

とすると, 特解は  $u_0 + u_{\text{corner}} + u_{\text{edge}}$  とできる.

ノイマン境界条件の場合は  $f_{\text{corner}}, f_{\text{edge}}$  を差し引くことにより  $\cos$  展開の収束が早くなっているため, (33) を

$$h(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \cos(\lambda_{xk}(x+1)) \cos(\lambda_{yl}(y+a)) \quad (35)$$

として解を構築する.

### 2.4 修正ヘルムホルツ方程式 修正ヘルムホルツ方程式

$$\Delta u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = f(x, y) \quad \text{in } \Omega \quad (36)$$

$$u = \Phi(x, y) \quad \text{on } \partial\Omega \quad (37)$$

の解法は上のポアソン方程式の解法とほとんど同じで, 少しの修正をするだけである. 特解を求める際には (34) は,

$$u_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{kl}}{\lambda_{xk}^2 + \lambda_{yl}^2 - \lambda^2} \sin(\lambda_{xk}(x+1)) \sin(\lambda_{yl}(y+a)) \quad (38)$$

に修正し, (25), (30) は

$$u_{\text{corner},1} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} \frac{A_{1ij}}{\nu_i^2 + \nu_j^2 - \lambda^2} \frac{\sinh(\nu_i(1+x)) \sinh(\nu_j(a+y))}{\sinh 2\nu_i \sinh 2\nu_j} \quad (39)$$

$$u_{\text{edge},1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^r E_{1nj} \sin(\lambda_n(x+1)) \frac{\sinh(\nu_j(a+y))}{(\nu_i^2 - \lambda_n^2) \sinh 2\nu_j - \lambda^2} \quad (40)$$

に修正される.

### 3. 数値計算結果

ここではいくつかの方程式において数値解の誤差評価を行う.

・例 1: ディリクレ境界条件におけるポアソン方程式の数値解誤差の解像度と  $r$  依存性.

$$\Delta u = -2 \quad \text{in } \Omega = (-1, 1) \times (-a, a) \quad (41)$$

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0 \quad (42)$$

$$\phi_3 = 0, \quad \phi_4 = 0 \quad (43)$$

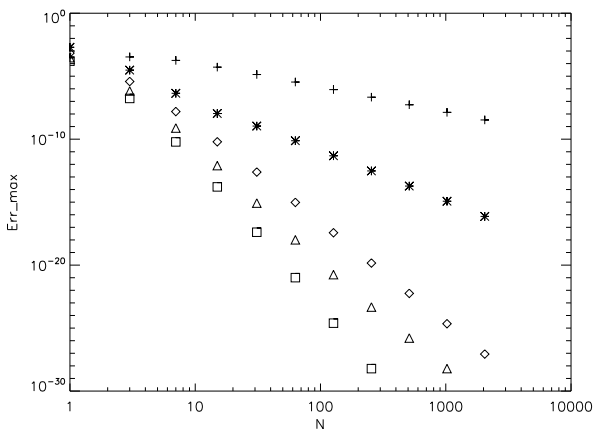


Fig. 2: Maximum error for the Poisson equation (41-43) as a function of resolution  $N$  for each order of accuracy  $2r + 2$ .  $r=0,1,2,3$ , and 4 from the top.

・例 2: ディリクレ境界条件におけるラプラス方程式の数値解誤差の解像度と  $r$  依存性.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (44)$$

$$\phi_1 = \cos(\pi(x+1)/4), \quad \phi_2 = 0 \quad (45)$$

$$\phi_3 = 0, \quad \phi_4 = 0 \quad (46)$$

### 4. 結言

Braverman et al.(2004) の手法を発展させて, ポアソン方程式と修正ヘルムホルツ方程式の解法を開発した. ラプラス方程式, ポアソン方程式にける Braverman らの  $U_r^{(r)}, U_s^{(r)}, f_{\text{corner}}, f_{\text{edge}}$  を構築する部分は高階微分の扱いが間違っていたが, 本研究では少ない計算コストで任意の高階微分まで求められる公式を導くことに成功した. これにより, 角で特異性がある場合も特異性控除関数を用いて空間任意精度の解法を開発した. 今後は, 角で高精度かつ計算コストが小さい本研究の手法を二次流れのモデル問題に応用していきたい.

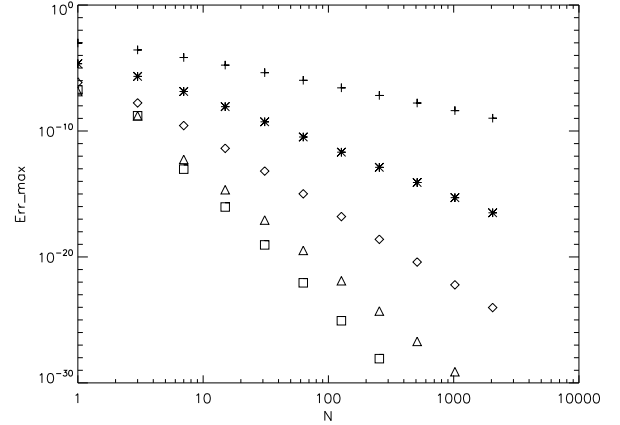


Fig. 3: Maximum error for the Laplace equation (44-46) as a function of resolution  $N$  for each order of accuracy  $2r + 2$ .  $r=0,1,2,3$ , and 4 from the top.

### 参考文献

- (1) 森下 誠, 正方形ダクトにおけるエッジ状態と乱流二次流れ, 修士論文 (2017)
- (2) Averbuch, Israeli and Vozovoi, A Fast Poisson Solver of Arbitrary Order Accuracy in Rectangular Regions, SIAM J. Sci. Comput., 19(3), 933–952 (1998)
- (3) Braverman et al., A Fast Spectral Subtractal Solver for Elliptic Equation, Journal of Scientific Computing, 21-1 (2004)
- (4) Schultz, Lee and Boyd, Chebyshev pseudospectral method of viscous flows with corner singularities, Journal of Scientific Computing, 4-1 (1989)
- (5) A.Averbuch, L.Vozovoi and M.Israeli, On a fast direct elliptic solver by a modified Fourier method. Numerical Algorithms 15 (1997)287-313