

物理法則に基づく磁性流体界面現象解析の検証

Validation of Interface Phenomena Analysis of Magnetic Fluid Based on Physical Laws

○ 水田 洋, 北大院工, 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail : yomizuta@eng.hokudai.ac.jp

Yo Mizuta, Division of Applied Physics, Hokkaido University, Kita-13, Nishi-8, Kita-ku, Sapporo 060-8628, Japan

Numerical analysis of magnetic fluid especially for fast dynamic phenomena such as the transition among interface profiles requires rigorous analysis as well as efficient for both fluid and magnetic field even under largely-deformed interface profiles. In addition to the Magnetic Analysis for General Use (MAGU) used to analyze some dynamic phenomena together with the Equation for Interface Motion (EIM) for fluid analysis, we have developed another magnetic analysis based on the Indirect Boundary Element Method (IBEM), where the unknown magnetic potential ϕ and the normal magnetic flux density b_Z on boundaries are obtained separately through the density of monopoles on the boundary σ . Interface stresses such as the surface tension and the magnetic stress difference, which are essential for the present analysis, should be validated physically. For this purpose, the relation between interface stress and interface energy density (RELA) is investigated. On a deformed interface in a two-layered system under homogeneous vertical magnetic field, we show calculated interface magnetic fields and interface stresses considering usage of the RELA.

1. はじめに

磁性流体の界面現象の数値解析を動的に行う場合、界面変動の各時間ステップごとに、流体・磁場両方の解析を行う必要がある。特に、臨界磁場近傍で界面形状が遷移するような速い過程⁽¹⁾において、これらの解析は、界面が大きく変形してもできるだけ厳密かつ効率的に行わなくてはならない。

大きく変形した界面に対応するためには、有限要素法 (FEM) の利用が考えられる。しかし、界面磁場だけが重要な場合でも、FEM による磁場解析は磁場を解析領域内部でも一緒に求めることになり、負担が大きい。

本研究では、流体・真空間の界面で両領域に共通な界面磁場を求めるため、汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) を開発し^(2, 3, 4)、流体解析のための界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) と組み合わせて用いてきた^(2, 3, 4, 5)。ここでは、界面形状と印加磁場分布が任意でも調和性と界面条件を満たす界面磁場を決めるため、Green の定理から 3 次元界面磁場方程式 (IMFE) を厳密に導いたが、実際には、緩やかな界面形状変化を仮定して波数空間で解かれている。

EIM と MAGU は、界面安定性の分岐^(3, 5) や界面物理量波数スペクトルの時間変化⁽⁴⁾ のような動的現象の解析に利用した。さらに、磁場法則、エネルギー保存則と共に「界面応力と界面エネルギー密度の関係」を用いて、数値解析結果を物理的に検証する方法を議論した^(4, 6, 7, 8)。

本論文では、2 節で EIM に触れた後、MAGU との間で計算結果の比較や解析方法の改良に役立てるため新たに用意した界面磁場解析を 3 節、4 節で紹介する。この方法は間接境界要素法 (Indirect Boundary Element Method, IBEM)^(9, 10) に基づいており、MAGU と同様に Green の定理から出発するが、単極子密度 σ の導入により、境界上で未知の磁気ポテンシャル ϕ と法線磁束密度 b_Z を互いに分離して求めることができる。また解析が、流体・真空の複合領域で行われることを考慮した。

5 節では、数値的に求めた界面応力の正しさを、界面エネルギー密度 (Flat Space における単位面積当たりのエネルギー) を利用して物理的に確かめる方法について述べる。特に、Ampère の法則および Gauss の法則のもとで、「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係」調べた。

6 節では、流体領域・真空領域から成る「一様鉛直磁場中の 2 層系」の変形した界面において、IBEM で求めた界面磁場と共に、界面応力 (磁気応力・表面張力) などの解析結果を示す。

2. 界面力学方程式 (EIM)

非圧縮性・非粘性・非回転の磁性流体界面の動的解析を界面形状の制限なく行うため、Bernoulli 方程式と界面上の力学的条件から導かれた、次の界面力学方程式 (EIM) を用いる^(2, 3, 4, 5)。

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S = 0, \quad S \equiv D + G + C + T + p_0, \quad \varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} dz v_z. \quad (1)$$

ここで、 ζ , S , D , G , C , ρ , p_0 , φ , v_z はそれぞれ、界面変位・界面応力和・動圧・重力ポテンシャル・表面張力・流体密度・大気圧・速度ポテンシャル・流速の鉛直成分である。なお、界面の動きが充分遅くまた大気圧が一様として、以後、 S 中の D と p_0 は無視する。

磁気応力差 T は磁場から流体への作用を表し、流体 ($J=1$)・真空 ($J=2$) それぞれの領域内で透磁率 μ_J が一定の場合、接線磁場 $h_{X,Y}$ と法線磁束密度 b_Z から次のように得られる。

$$T = [1/\mu_J] \{ \mu_1 \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2. \quad (2)$$

ここで、 $[\dots]$ は界面をはさむ値の跳び (流体-真空) を表す。

3. 間接境界要素法 (IBEM)

汎用磁場解析 (MAGU) は、Fig. 1(a) のような流体・真空間の界面 F において、両領域に共通な界面磁場 $h_{X,Y}$, b_Z を求めるために開発された^(2, 3, 4)。本節では、解析結果を比較したり解析方法の改良に役立てるため、間接境界要素法 (IBEM) に基づく界面磁場解析を紹介する。

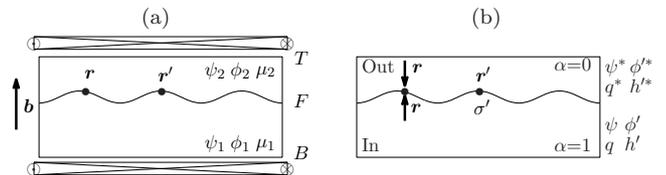


Fig. 1: (a) Two-layered system. (b) Inner and Outer Problem in Indirect Boundary Element Method.

3.1 単一領域の場合

MAGU と同様、IBEM でも基礎式は Green の定理

$$\iiint_V dV' (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') = \oint_S dS' \cdot \{ \phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi') \} \quad (3)$$

から導く。ここで、 V は流体領域または真空領域、 S は V を囲む境界、 \mathbf{r}, \mathbf{r}' は観測点・ソース点の座標、“ r ” は r' に関する関数・微分を表す。

ψ には、Poisson 方程式 $\Delta' \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の解 $\psi = -1/4\pi R (\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}, R \equiv |\mathbf{R}|)$ を選ぶ。これより、 $\partial\psi/\partial R = 1/4\pi R^2, \mathbf{t}_R \equiv \mathbf{R}/R$ として、 $\nabla' \psi = -\nabla \psi = (\partial\psi/\partial R) \mathbf{t}_R$ となる。

ϕ' には、3次元 Laplace 方程式 $\nabla' \cdot (\mu \nabla' \phi') = 0$ の解である磁気ポテンシャルを選ぶ。 ϕ' からは、Ampère の法則 $\nabla' \times \mathbf{h}' = \mathbf{0}$ を満たす磁場 $\mathbf{h}' = \nabla' \phi'$ および Gauss の法則 $\nabla' \cdot \mathbf{b}' = 0$ を満たす磁束密度 $\mathbf{b}' = \mu \mathbf{h}'$ が求められる。

境界に対する接線方向単位ベクトル ($I=X, Y$) または法線方向単位ベクトル ($I=Z$) を \mathbf{t}_I と表せば、(3) 右辺の面積素ベクトルは $dS' = dS' \mathbf{t}'_Z$ となる。これより (3) は、 ϕ' またはその I 方向微分 $\phi'_I \equiv \mathbf{t}'_I \cdot (\nabla \phi')$ に対する次の積分方程式になる。

$$\alpha \phi(\mathbf{r}) = \oint_S dS' (q \phi' - \psi h'), \quad (4)$$

$$\alpha \phi_I(\mathbf{r}) = \oint_S dS' (q_I \phi' - \psi_I h'). \quad (5)$$

$$(q \equiv (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla') \psi, h' \equiv (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla') \phi', q_I \equiv (\mathbf{t}'_I \cdot \nabla') q, \psi_I \equiv (\mathbf{t}'_I \cdot \nabla') \psi)$$

なお、 \mathbf{r} が領域内部・境界上・領域外部に応じて、 $\alpha=1, 1/2, 0$ である。

次に、内部問題 (\mathbf{r} が領域内部) と外部問題 (\mathbf{r} が領域外部) の式を用意した後、Fig. 1(b) のように、 \mathbf{r} を境界まで近づける^(9, 10)。

$$\begin{cases} \phi = \oint_S dS' (q \phi' - \psi h'), \\ 0 = \oint_S dS' (q^* \phi'^* - \psi^* h'^*), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \phi_I = \oint_S dS' (q_I \phi' - \psi_I h'), \\ 0 = \oint_S dS' (q_I^* \phi'^* - \psi_I^* h'^*). \end{cases} \quad (7)$$

$$(q^* \equiv \mathbf{t}'^*_Z \cdot \nabla' \psi^*, h'^* \equiv \mathbf{t}'^*_Z \cdot \nabla' \phi'^*, q_I^* \equiv \mathbf{t}'^*_I \cdot \nabla' q^*, \psi_I^* \equiv \mathbf{t}'^*_I \cdot \nabla' \psi^*)$$

ここで、上つき添え字 “*” は外部問題の量を表す。境界をはさんでポテンシャルは連続であり、また、各領域の法線単位ベクトルの向きは互いに反対なので ($\mathbf{t}'^*_Z = -\mathbf{t}'_Z$),

$$\psi^* = \psi, \quad \phi'^* = \phi', \quad q^* = -q, \quad q_I^* = -q_I, \quad \psi_I^* = \psi_I.$$

更に、単極子密度 $\hat{\sigma}' \equiv h' + h'^*$ を定義すれば、(6), (7) 括弧内両式の和から、間接境界要素法の基礎式が導かれる。

$$\phi(\mathbf{r}) = - \oint_S dS' \psi \hat{\sigma}', \quad (8)$$

$$\phi_Z(\mathbf{r}) = - \oint_S dS' \psi_Z \hat{\sigma}'. \quad (9)$$

(8), (9) で \mathbf{r} は境界上に限られるが、 $\hat{\sigma}'$ が得られていれば、 ϕ と ϕ_Z は互いに分離して求められる。また、境界上の ϕ, ϕ_Z があれば、領域内部の量は (4), (5) を用いて求めることができる (直接境界要素法)。

3.2 複合領域の場合

磁場を考えることは、流体領域 ($J=1$) ばかりでなく真空領域 ($J=2$) でも必要である。ここでは、領域ごとに定

義した次の量で、基礎式 (8), (9), (5) を拡張する。

$$S_J, \quad \mathbf{t}_{IJ} (\mathbf{t}_I = \mathbf{t}_{I1} = -\mathbf{t}_{I2}),$$

$$\psi_J, \quad \psi_{IJ} \equiv (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \psi_J, \quad \phi_J, \quad \phi_{IJ} \equiv (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) \phi_J, \quad \hat{\sigma}'_J,$$

$$q_{IJ} \equiv (\mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla) (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \psi_J, \quad h'_J \equiv (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \phi'_J = \phi'_{ZJ}.$$

次に、 $\nabla' (\mu_J \nabla' \psi_J) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ に基づいて、

$$\psi_J = \psi / \mu_J, \quad \psi_{IJ} = \psi_I / \mu_J, \quad \hat{\sigma}'_J \equiv \mu_J \sigma'_J, \quad q_{IJ} = q_I / \mu_J$$

と置き換える。ここで、次の量は両領域で共通に用いる。

$$\psi = -\frac{1}{4\pi R}, \quad \psi_I = (\mathbf{t}_I \cdot \nabla) \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial R} (\mathbf{t}_I \cdot \mathbf{t}_R),$$

$$q_I = (\mathbf{t}_I \cdot \nabla) (\mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla') \psi = -\frac{(\mathbf{t}_I \cdot \mathbf{t}'_{ZJ}) R^2 - 3\zeta \zeta'}{4\pi R^5} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \equiv \mathbf{t}_I \cdot \mathbf{R} \\ \zeta' \equiv \mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

以上により、(8), (9), (5) から、複合領域のための基礎式が以下のように導かれる。

$$\phi_J = - \oint_{S_J} dS' \psi \sigma'_J, \quad (10)$$

$$b_{ZJ} = -\mu_J \oint_{S_J} dS' \psi_Z \sigma'_J, \quad (11)$$

$$\alpha b_{IJ}(\mathbf{r}) = \oint_{S_J} dS' \left(q_I \phi'_J - \psi_I \frac{b'_{ZJ}}{\mu_J} \right). \quad (12)$$

ただし、磁場成分 ϕ_{IJ} は、磁束密度成分 $b_{IJ} \equiv \mu_J \phi_{IJ}$ で置き換えた。

各境界上で未知なポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 b_{ZJ} は境界条件・界面条件から決める。特に、 ϕ_J, b_{ZJ} は界面を横切って連続なので、界面条件は $0 = \phi_1 - \phi_2, 0 = b_{Z1} + b_{Z2}$ となる。界面条件により、磁気応力差に用いる次の界面磁場 $h_{X,Y}, b_Z$ は、両領域で共通になる。

$$\mathbf{h}_{tJ} = \nabla \phi_J \times \mathbf{t}_{ZJ} = h_{XJ} \mathbf{t}_{XJ} + h_{YJ} \mathbf{t}_{YJ},$$

$$h_{X,Y} = h_{X1,Y1} = -h_{X2,Y2}, \quad (13)$$

$$b_Z = b_{Z1} = -b_{Z2}. \quad (14)$$

4. 数値解析の方法

4.1 離散化

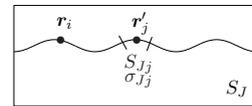


Fig. 2: Discretization of area integral in IBEM.

(8), (9), (5) の面積分 S_J を N_J 個の微小な面要素 (FE) の和で置き換える。 \mathbf{r}_i を観測点座標、 \mathbf{r}'_j を j 番目の面要素 S_{Jj} の中央座標とする。 S_{Jj} 内で $\sigma'_J, \phi'_J, b'_{ZJ}$ は一定とし、 $\sigma_{Jj} \equiv \sigma_J(\mathbf{r}'_j), \phi_{Jj} \equiv \phi'_J(\mathbf{r}'_j), b_{ZJj} \equiv b'_{ZJ}(\mathbf{r}'_j)$ と置けば、(8), (9), (5) に対する離散式が行列形式で次のように得られる。

$$\phi_J = (\phi_{Ji}) = \mathbf{G}_J \boldsymbol{\sigma}_J,$$

$$\mathbf{G}_J = (G_{Jij}), \quad \boldsymbol{\sigma}_J = (\sigma_{Jj}), \quad (15)$$

$$\mathbf{b}_J = (b_{ZJi}) = \mathbf{H}_J \boldsymbol{\sigma}_J, \quad \mathbf{H}_J = (\mu_J H_{Jij}), \quad \boldsymbol{\sigma}_J = (\sigma_{Jj}), \quad (16)$$

$$\alpha \mathbf{b}_{IJ} = (b_{IJi}) = \mathbf{K}_{IJ} \boldsymbol{\phi}_J + \mathbf{H}_{IJ} \mathbf{b}_J, \quad \mathbf{K}_{IJ} = (K_{IJij}), \quad \boldsymbol{\phi}_J = (\phi_{Jj}), \quad \mathbf{H}_{IJ} = (H_{IJij}/\mu_J), \quad \mathbf{b}_J = (b_{ZJj}). \quad (17)$$

ここで行列要素は次のように求める.

$$G_{Jij} = \left(- \oint_{S_{Jj}} dS' \psi \right)_i, \quad (18)$$

$$H_{Jij} = \left(- \oint_{S_{Jj}} dS' \psi_Z \right)_i, \quad (19)$$

$$K_{IJij} = \left(\oint_{S_{Jj}} dS' q_I \right)_i, \quad (20)$$

$$H_{IJij} = \left(- \oint_{S_{Jj}} dS' \psi_I \right)_i. \quad (21)$$

ただし, G_{Jij}, H_{Jij} の \mathbf{r}_i は境界上に限る.

\mathbf{G}_J と \mathbf{H}_J の対角要素では, 面要素内で被積分関数が特異になるため, 数値積分が奨められている^(9, 10), しかしここでは, 中心を \mathbf{r} , 無限小半径を ε とする境界外の球面 S_ε を用いて, 次のように計算する.

$$G_{Jii} = \iint_{S_\varepsilon} \frac{dS'}{4\pi R} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_0 \varepsilon^2}{4\pi \varepsilon} = 0, \quad (22)$$

$$H_{Jii} = \iint_{S_\varepsilon} dS' \frac{\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{t}_R}{4\pi R^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_0 \varepsilon^2 \frac{\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{t}_R}{4\pi \varepsilon^2} = \frac{\phi_0}{4\pi} \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{t}_R. \quad (23)$$

ただし, 面要素が面上・縁上・隅上に応じて, $\phi_0 = 2\pi, \pi, \pi/2$ とする. なお, K_{IJij}, H_{IJij} については, \mathbf{r}_i は境界から外して使うので, 被積分関数の特異性は生じない.

4.2 解析手順

流体領域 ($J=1$)・真空領域 ($J=2$) の各境界は, 適用される境界条件に応じて次のように分類される (“-” は既知量を表す).

(1) Dirichlet 条件:

$$\boldsymbol{\phi}_J^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\phi}}_J^{(1)} \text{ を既知として } \mathbf{b}_J^{(1)} \text{ を求める.}$$

(2) Neumann 条件:

$$\mathbf{b}_J^{(2)} = \bar{\mathbf{b}}_J^{(2)} \text{ を既知として } \boldsymbol{\phi}_J^{(2)} \text{ を求める.}$$

(3) 界面条件:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\phi}_1^{(3)} - \boldsymbol{\phi}_2^{(3)}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{b}_1^{(3)} + \mathbf{b}_2^{(3)} \text{ を満たすように } \boldsymbol{\phi}_J^{(3)} \text{ と } \mathbf{b}_J^{(3)} \text{ を求める.}$$

式(15),(16)は, $\boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)}, \mathbf{b}_J^{(1)(2)(3)}$ は直接的には同じ領域に属する境界上の量と $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を通して関係し, 別な領域に属する境界上の量とは界面条件を通してのみ関係することを示している. 上記の境界条件の分類を考慮すれば, このことは次の式で表される.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)} = \mathbf{G}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} \\ \quad + \mathbf{G}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} \\ \quad + \mathbf{G}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}, \\ \mathbf{b}_J^{(1)(2)(3)} = \mathbf{H}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} \\ \quad + \mathbf{H}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} \\ \quad + \mathbf{H}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}. \end{cases} \quad (24)$$

数値解析の手順は, 次のようにまとめられる.

(A) 界面以外の境界では, 接線条件 (Dirichlet 条件), 法線条件 (Neumann 条件) のいずれか, 界面では接線条件・法線条件の両方が与えられる. これらすべての条件を連立した一次方程式を解いて, すべての境界上で $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を求める.

(B) $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ が得られた後, Dirichlet 条件の境界では $\mathbf{b}_J^{(1)}$, Neumann 条件の境界では $\boldsymbol{\phi}_J^{(2)}$, 界面では $\boldsymbol{\phi}_J^{(3)}, \mathbf{b}_J^{(3)}$ を求める.

(C) 既知および求められた $\boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)}, \mathbf{b}_J^{(1)(2)(3)}$ を(17)に用いて, 領域内部を含む任意の観測点で磁束密度成分 \mathbf{b}_{IJ} を求める.

4.3 数値要素上の量の再配置

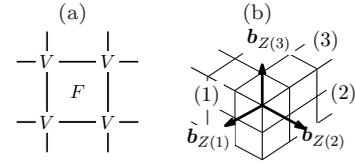


Fig. 3: (a) Infinitesimal face elements (FE's) and vertex elements (VE's). (b) Multiple b_Z 's on sharp edge.

面要素 (FE) 上の磁気応力差を精度よく計算するには, FE 上の界面磁場 $h_{X,Y}, b_Z$ が必要になる. もし ϕ_{Ji}, b_{ZJi} が FE 中心の代わりに FE 間の点要素 (VE) で求められれば, FE 上の $h_{X,Y}$ は差分で, FE 上の b_Z は内挿で, 精度を落とさず求められる. さらに, ϕ_{Ji}, b_{ZJi} と同じく, σ_{Jj} も VE 上に置く. これにより, $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を求めるとき, 条件の数と未知数の数が一致する. したがって, $\phi_{Ji}, b_{ZJi}, \sigma_{Jj}$ は VE 上に再配置する方がよい. ただし, 境界同士が交わる尖った縁または角上の VE では, 多価となる b_Z を注意深く扱うことが必要になる.

5. 界面応力と界面エネルギー密度の関係

界面力学方程式 (EIM)(1) において, 数値的に求めた界面応力 S が物理的に正しいことを確かめるとき, ある任意の界面変位 ζ で, $S(\zeta)$ とは別に界面エネルギー密度 $U(\zeta)$ (Flat Space における単位面積当たりのエネルギー) を求められるようにし, 微小距離 $\delta\zeta$ だけ界面移動したときのその変化が次の「界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)」を満たすことを用いる^(4, 6, 7, 8).

$$\begin{aligned} \delta U &\equiv U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) = S(\zeta)\delta\zeta, \\ U(\zeta) &= U_G(\zeta) + U_C(\zeta) + U_T(\zeta), \\ S(\zeta) &= G(\zeta) + C(\zeta) + T(\zeta). \end{aligned} \quad (25)$$

以後, $\delta\zeta$ による物理量の変化を δ で表す.

流体密度・重力加速度・表面張力係数・界面形状の主曲率を $\rho, g, \gamma, \kappa_{1,2}$ とすれば, $S(\zeta)$ 中の重力ポテンシャル $G(\zeta)$ ・表面張力 $C(\zeta)$ と, それらに対応する界面エネルギー密度 $U_G(\zeta), U_C(\zeta)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} U_G(\zeta) &= \rho g \zeta^2 / 2, & G(\zeta) &= \rho g \zeta, \\ U_C(\zeta) &= \gamma \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}, & C(\zeta) &= -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2). \end{aligned} \quad (26)$$

これらにより, $\delta U_G = G(\zeta)\delta\zeta, \delta U_C = C(\zeta)\delta\zeta$ を確かめる.

一方, 磁気応力差 $T(\zeta)$ (2) と対応する磁気界面エネルギー密度 $U_T(\zeta)$ は, 流体・真空各領域の磁気界面エネル

ギ一密度 U_{T1}, U_{T2} , 微小変位 $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ による U_{T1}, U_{T2} の変化の割合 (実は Maxwell 応力) T_1, T_2 で,

$$U_T(\zeta) = U_{T1}(\zeta) + U_{T2}(\zeta), \quad T(\zeta) = T_1(\zeta) - T_2(\zeta) \quad (27)$$

と表される. これは, $\delta U_T = T\delta\zeta = \delta U_{T1} + \delta U_{T2}$ において

$$\delta U_{T1} = T_1\delta\zeta_1, \quad \delta U_{T2} = T_2\delta\zeta_2, \quad (28)$$

および $\delta\zeta_1 = -\delta\zeta_2 = \delta\zeta$ ($\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ は大きさが同じで互いに逆向き) から導かれる.

5.1 表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係

界面形状を $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ z(X, Y) \end{pmatrix}$ のように媒介変数表示するとき, 界面の平均曲率

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{(1 + z_Y^2) z_{XX} + (1 + z_X^2) z_{YY} - 2z_X z_Y z_{XY}}{2(1 + z_X^2 + z_Y^2)^{3/2}} \quad (29)$$

により, 表面張力が $C(\zeta) = -2\gamma H$ と表されることはよく知られているが, 元をただせば, これは, 面積素 $dS = |\mathbf{r}_X \times \mathbf{r}_Y| dXdY$ ($\mathbf{r}_X = \partial\mathbf{r}/\partial X, \mathbf{r}_Y = \partial\mathbf{r}/\partial Y$) により表面張力エネルギーが $U_C dXdY = \gamma dS$ で与えられることによる. 界面を法線方向に $\delta\zeta$ だけ動かすと (Fig. 4(a)), 面積素は $\delta dS = -2H dS \delta\zeta$ だけ変化する⁽¹¹⁾. 数値的に求めた表面張力界面エネルギー密度 U_C の変化が, (30) を満たすことを確認した (Fig. 5). これが「表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係 (CRELA)」にあたる.

$$\delta U_C dXdY = \gamma \delta dS = C(\zeta) dS \delta\zeta. \quad (30)$$

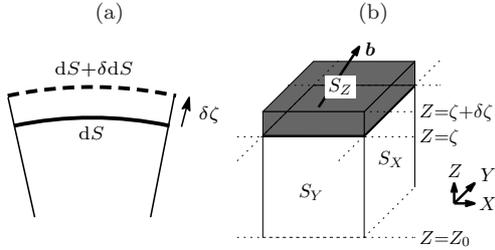


Fig. 4: (a) Cell for deriving “Relation between capillary stress and capillary interface energy density.” (b) Square column for deriving “Relation between Maxwell stress and magnetic interface energy density.”

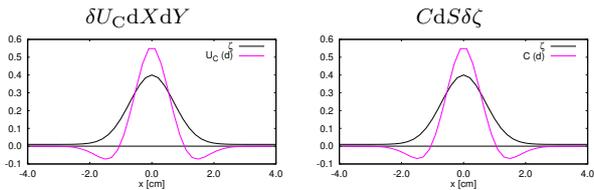


Fig. 5: Comparison of capillary stress obtained from capillary interface energy density (left) and that obtained analytically (right).

5.2 Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係

以下では, Fig. 4(b) のような, Flat Space の流体側に界面に対し垂直方向に伸びた高さ ζ , 深さ Z_0 , 断面積 S_Z の角柱領域で, (28) の「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係 (MRELA)」について調べる⁽⁸⁾. 接線成分を $h_{X,Y}, b_{X,Y}$, 法線成分を h_Z, b_Z とする磁場ベクトル \mathbf{h} ・磁束密度ベクトル \mathbf{b} を

$$\mathbf{h} = (h_X, h_Y, h_Z) = \mathbf{h}_2 + h_Z \mathbf{e}, \quad \mathbf{h}_2 = (h_X, h_Y, 0), \\ \mathbf{b} = (b_X, b_Y, b_Z) = \mathbf{b}_2 + b_Z \mathbf{e}, \quad \mathbf{b}_2 = (b_X, b_Y, 0).$$

と表せば, 磁気界面エネルギー密度は次のようになる.

$$U_{T1} = \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \frac{e(X, Y, Z)}{2}, \\ e \equiv \mathbf{h} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + h_Z b_Z. \quad (31)$$

ζ を $\delta\zeta$ だけ変えたとき, (34) に示すように, U_{T1} の変化は角柱の体積変化と e 自身の変化の和になる. e に対する連続方程式に Ampère の法則・Gauss の法則を適用すれば, e の変化は次のように求められる⁽⁸⁾. ($\nabla_2 = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0)$: 接線方向偏微分)

$$\delta e = -2\delta\zeta \left\{ \frac{\partial(\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2)}{\partial Z} - \nabla_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) + \frac{\Delta}{2} \right\}, \quad (32)$$

$$\Delta \equiv -\mathbf{h}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial Z} + \mathbf{b}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial Z} - h_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial h_Z}{\partial Z}. \quad (33)$$

(32) を用いれば, δU_{T1} は (35) の形にまとめられる.

$$\delta U_{T1} = \frac{1}{2} \left\{ e(X, Y, \zeta) \delta\zeta + \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \delta e(X, Y, Z) \right\} \quad (34)$$

$$= \delta\zeta (T_1 + T'_1). \quad (35)$$

ここで, T_1 は (27) に現れた Maxwell 応力で, 特に $\mathbf{b} = \mu_1 \mathbf{h}$ (μ_1 : 流体の透磁率) の場合は, $\Delta = 0$ より, 以下の (37) のようになる.

$$T_1 \equiv \frac{h_{Z0} b_{Z0} - \mathbf{h}_{20} \cdot \mathbf{b}_{20}}{2} - \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \frac{\Delta}{2} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b_{Z0}^2}{\mu_1} - \mu_1 |\mathbf{h}_{20}|^2 \right). \quad (37)$$

ここでは, $Z = \zeta$ における $\mathbf{h}_2, \mathbf{b}_2, h_Z, b_Z$ の値を $\mathbf{h}_{20}, \mathbf{b}_{20}, h_{Z0}, b_{Z0}$ と表した. (37) とこれと同様の T_2 を $T = T_1 - T_2$ に用いれば, 磁気応力差 (2) が得られる. 一方,

$$T'_1 \equiv \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) + (\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2)_{Z=Z_0} \quad (38)$$

については, これを角柱断面内で積分し, 第 1 項については, Gauss の定理の 2 次元版

$$\iint_{S_Z} dS_Z \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot \mathbf{A} = \iint_{S_2} dS_2 \cdot \mathbf{A}$$

を用いて, 角柱側面 (Fig. 4(b) の S_X, S_Y) にわたる積分に書き換える.

$$T'_1 S_Z \\ \equiv \iint_{S_Z} dS_Z \int_{Z_0}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) + (\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2)_{Z=Z_0} S_Z \\ = \iint_{S_2} dS_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) + (\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2)_{Z=Z_0} S_Z. \quad (39)$$

(28)とは異なり, (35)では δU_{T1} に T_1' からの寄与が含まれる。(39)より, T_1' は角柱側面および底面からの磁気エネルギーの漏洩,と解釈できる。なお, U_{T1} および T_1' を数値的に評価する際には,領域内部の磁場が必要になる。このためには,境界上の磁気ポテンシャルと法線磁束密度が求まった後,直接境界要素法の式(17)を使う。

6. 一様鉛直磁場中の2層系

同じ層厚の流体領域・真空領域からなる2層系(Fig. 1(a))で,界面 F 上の物理量を計算した。真空領域上方 T と流体領域下方 B に同じ鉛直一様磁場を印加した。用いた境界条件をFig. 6に示す。ここで, T, B では b_z に既知の値を与え,側面境界では $b_z=0$ とした。

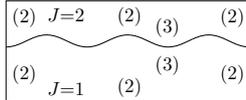


Fig. 6: Boundary conditions for numerical calculation of interface magnetic field. (·) denotes number specifying boundary condition in Sec.4.2.

F が平らであれば,印加磁場がそのまま F にも現れると考えられる。まず, ϕ と b_z が界面を横切って連続であること, $\pi/2$ だけ回転した分布が元の分布に重なることを確認した。界面磁場は F 上のできるだけ広い領域で一樣になることが望ましいが,これは実験前に広い一様磁場領域を持つHelmholtzコイルを用意することに対応する。 H_J の対角成分を調整することで, F の縁まで一様に近い磁場分布を達成した(Fig. 7(a)左右)。その後, F を変形した。

Fig. 7(a),(b)に,(13),(14)で求めた界面磁場 $h_{x,y}, b_z$ と,それらを用いた合成磁場 $\mathbf{h}=\mathbf{h}_n+\mathbf{h}_t$ ($\mathbf{h}_n=b_z\mathbf{t}_z/\mu_1$, $\mathbf{h}_t=\nabla\phi\times\mathbf{t}_z$)を示す。右列は $y=0$ 断面内の変化を示し,接線磁場強度 h_t (赤)・法線磁場成分 b_z (青)と共に,界面形状(黒)・印加磁場強度(青)も示した。

F が平らな(a)と比較して, F が変形した(b)では,界面形状の変化に伴って h_t, b_z も変化する。式(2)から求めた磁気応力差 T の値は負で,その変化は緩やかである(Fig. 7(c))。

Fig. 7(d)には,表面張力 $C=-2\gamma H$ を示す。平均曲率 H は,界面形状を2次曲面で内挿してから(29)より求めた。界面形状に従い, C は大部分の領域で正であるが,一部に負の領域がある。Fig. 7(e)には表面張力界面エネルギー密度 U_C を示す。求めた C と U_C の間に「表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係」が成り立っていることは, Fig. 5に示した。

7. まとめ

磁性流体の界面解析に必要な界面磁場を求めるため,動的解析などで汎用磁場解析(MAGU)を利用してきたが,結果の比較や方法の改良ため,間接境界要素法(IBEM)に基づく界面磁場解析を開発した。

境界上の磁気ポテンシャル ϕ と法線磁束密度 b_z は,単極子密度 σ を導入することにより,分離して求められる。界面磁場などの界面量は実空間で直接求められるが,これは,波数空間で求めていたMAGUとは対照的である。領域内部の磁束密度成分は,境界上の ϕ, b_z を求めた後,直接境界要素法で求める。

精度向上を図るためには, σ, ϕ, b_z などは,面要素中央(FE)より面要素の間の点要素(VE)上に配置する方が望ましい。しかしこれにより,境界同士が交わる縁上の複数の b_z を境界毎に区別して扱うことが必要になる。

界面現象の理解に本質的な役割を果たす表面張力や磁気応力差が正しく求められていることは,界面応力と独

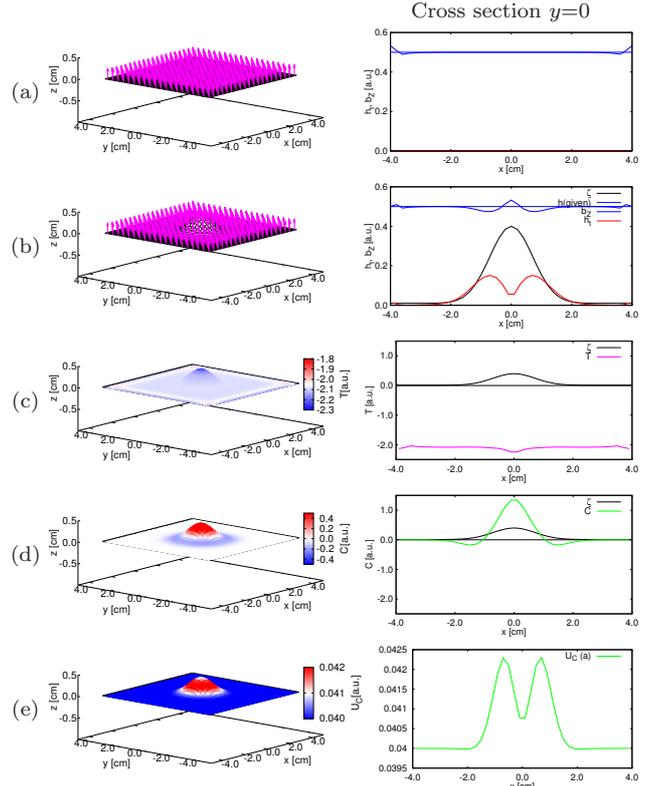


Fig. 7: Calculated interface quantities. (a): Case of flat interface. (b)–(e): Case of deformed interface. Right: Changes in the cross section $y=0$. (a),(b) left: Magnetic field composed from tangential component h_t (red in right) and normal component b_z (blue in right) of interface magnetic field. (c): Magnetic stress difference T . (d): Surface tension C . (e): Capillary interface energy density U_C .

立に界面エネルギー密度を求められるようにし,「界面応力と界面エネルギー密度の関係(RELA)」を用いることで検証できる。ただし,「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係(MRELA)」については,接線応力に基づく磁気エネルギーの漏洩の効果を考慮する必要がある。

「一様鉛直磁場中の2層系」において,変形界面上で界面磁場や界面応力(磁気応力・表面張力)と共に界面エネルギー密度の計算結果も示した。特に,表面張力と表面張力界面エネルギー密度の関係(CRELA)を確認することができた。今後, MRELA についても検証を行う。

参考文献

- (1) Rosensweig, R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, (1985), Chap.7.
- (2) Mizuta, Y., “Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid,” *Magneto-hydrodynamics* 44 (2), (2008), pp.155–165.
- (3) Mizuta, Y., “Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic fluid for general use,” *J. Magn. Mater.* 323 (10), (2011), pp.1354–1359.
- (4) Mizuta, Y., “Dynamic analysis on magnetic fluid interface validated by physical laws,” *J. Magn. Mater.* 431, (2017), pp.209–213.

- (5) Mizuta, Y., “Interface stability analysis of magnetic fluid by using a method for general use and nonlinear response,” *Magnetohydrodynamics* 49 (2-4), (2013), pp.191-195.
- (6) 水田 洋, “磁性流体界面解析における界面磁場解析再考,” 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」 1989, (2016), pp.150-160.
- (7) 水田 洋, “磁性流体界面解析の改良条件,” 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」 2034, (2017), pp.139-149.
- (8) 水田 洋, “実在磁性流体の界面解析,” 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」 in print, (2018).
- (9) Brebbia, C.A. and Butterfield, R., “Formal equivalence of direct and indirect boundary element methods,” *Appl. Math. Modelling* 2, (1978), pp.132-134.
- (10) ウォーカー, C.A. ブレビア, S., 境界要素法の基礎と応用 (神谷紀生他訳), 培風館, (1981), 第 2 章.
- (11) 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, (1995), 第 2 章.