

マッハ4.5の流れにおける平板境界層の全体安定性解析

Global stability analysis of a Mach 4.5 flow over a flat plate

- 石川大樹, 阪大工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail:ishikawa@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
岡林希依, 阪大工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail:okabayashi@mech.eng.osaka-u.ac.jp

Daiki Ishikawa, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, Japan

Kie Okabayashi, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, Japan

Global stability analysis (GSA) on the development of disturbance uniformly applied to the Mach 4.5 flat-plate boundary layer is conducted to investigate the turbulent transition and stability of high-speed flow considering the effect of oblique shock waves. Arnoldi method is used to solve eigenvalue problem of realistic size. Spectrum transform of eigenvalues is conducted to obtain unstable modes preferentially. Weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme is adopted for both calculation of base flow and algorithm of Arnoldi method to capture the shock wave. As a result, in the most unstable mode, the development of disturbance is observed, whereas the disturbance is suppressed in the stable mode, the eigenvalue of which is negative. The development of the disturbance did not change by passing the oblique shock wave.

1. 緒言

宇宙機の大気圏再突入では、高マッハ数で飛行することにより生じる空力加熱を精度よく予測することが熱防壁設計のために重要である。宇宙機表面上の境界層が乱流に遷移すると、壁面における熱流束は層流の場合に比べて非常に大きくなる。よって、層流から乱流における遷移点を把握することが非常に重要である。高エンタルピー流れでの境界層遷移をとらえ、壁面熱流束を正確に予測すると、宇宙機の信頼性の高い経済的な熱防壁が可能となる。

最も基本的な境界層である平板境界層に関しては、その形状の単純さ故、多くの理論的あるいは数値的研究が行われてきた。線形安定性解析はその一つであるが、高マッハ数に由来する斜め衝撃波が及ぼす影響は、壁面から衝撃波面までの距離が境界層厚さに比べ大きいことから、無視されてきた⁽¹⁾。そのため、平行流近似を用いた線形安定性解析を行うことができた。しかし、一様流に含まれる擾乱波と斜め衝撃波との相互作用によって、音響、エントロピー、渦の三種類の波が衝撃波背後で生じ、その下流にある境界層に影響を及ぼすことが分かっており⁽²⁾、本来は斜め衝撃波を無視して平行流近似を行うのは適切でないと考えられる。実際に、平行流近似を仮定した線形安定性解析の結果、Mack モードを含むすべてのモードで擾乱の成長率が過小評価された例がある⁽³⁾。

一方、平行流近似を用いて局所安定性を解析する従来の線形安定性解析に対して、全体安定性解析が近年の計算機性能の発達に伴い多数行われてきている。全体安定性解析は流れ場全体を基本流として扱うため、平行流を仮定する必要がない。また、局所流（境界層、せん断層、後流など）同士の相互作用を考慮でき、任意の流れ場にも適用できるという利点がある。

本研究では、直接数値シミュレーション (Direct numerical simulation; DNS) で得られた、超音速流れにおける二次元の平板境界層を基本流として全体安定性解析を行い、斜め衝撃波の影響を考慮した高速流れの乱流遷移および安定性について調査する。解析対象は理論的・数値的データが豊富な, Ma and Zhong⁽³⁾ による一様流マッハ数 4.5 の平板境界層を採用する。なお、本報告では既存の全体安定性解析手法⁽⁴⁾を用い、流れ場に一樣に与えた初期微小擾乱の時間的な成長について議論する。

2. 全体安定性解析

2.1 全体安定性解析の概要

全体安定性解析について千葉の提案した方法⁽⁴⁾を用いる。Navier-Stokes 方程式の空間微分項をまとめて \mathbf{f} とし、

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = (\rho_1, (\rho\mathbf{u})_1, e_1, \dots, \rho_N, (\rho\mathbf{u})_N, e_N)$$

$$\mathbf{u} = (u, v)$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$$

と記述する。ベクトル \mathbf{q} および \mathbf{f} の次元 N は \mathbf{q} の自由度であり、格子数と保存量変数の数の積で与えられる。保存量 \mathbf{q} は基本量を $\bar{\mathbf{q}}$ 、微小擾乱項を \mathbf{q}' とおくと、次のように分解できる。

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}' \quad (2)$$

これを式 (2) に代入し、微小擾乱の時間発展方程式

$$\frac{d\mathbf{q}'}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{q}' \quad (3)$$

を得る。ヤコビアン $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)$ の時間変化が \mathbf{q}' の時間変化に比べて非常に小さいと仮定する。解を $\mathbf{q}' = \bar{\mathbf{q}} \exp(\lambda t)$ と仮定し、 $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)$ とおくと

$$\mathbf{A}\mathbf{q}' = \lambda\mathbf{q}' \quad (4)$$

なる固有値問題に帰着する。ここで、 \mathbf{A} は $N \times N$ 次元の非対称実行列である。固有値 λ の実部はその正/負が微小擾乱の発達/減衰を、虚部が微小擾乱の振動数を表す。

式 (4) における係数行列 \mathbf{A} は非常に大規模であるので全固有値を求めることは事実上不可能である。よって、重要なモードだけを計算することで行列の次元数を低下させた固有値問題を解く Arnoldi 法⁽⁵⁾を導入する。Arnoldi 法の利点は、大規模係数行列 \mathbf{A} を直接計算する必要が無いこと、従来の流体の数値計算法を用いて解析可能なことである。Arnoldi 法で得られる近似固有値は、絶対値の大きなものほど精度が高いという特徴がある⁽⁴⁾。よっ

て安定性の低いモードの固有値を効率的に得るために固有値スペクトル変換を行う。スペクトル変換後に Arnoldi 法で固有値計算を行い、計算完了後に逆変換を行うことで求めたい固有値を得る。

2.2 固有値スペクトル変換

式 (4) を線形性を損なわない範囲で時刻 t から時刻 $t+T$ まで積分すると次式となる。

$$\mathbf{q}'(t+T) = \mathbf{B}\mathbf{q}'(t) \quad \text{where } \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A}T) \quad (5)$$

\mathbf{B} は擾乱を T だけ時間発展させる作用素である。これにより \mathbf{A} の固有値 λ_a と \mathbf{B} の固有値 λ_b の関係は次のようになる。

$$\lambda_b = \exp(\lambda_a T) \quad (6)$$

この固有値スペクトルの変換により、 λ_b での安定性の判定は次のようになる。

$$|\lambda_b| > 1 : \text{unstable}, \quad |\lambda_b| = 1 : \text{neutral}, \quad |\lambda_b| < 1 : \text{stable}$$

ゆえに、不安定なモードの固有値が安定なモードの固有値より絶対値が大きくなる。よって重要である不安定なモードが優先的に求められ、効率良く Arnoldi 法を適用できる。

2.3 Arnoldi 法

$N \times N$ の大規模非対称行列 \mathbf{B} の近似固有値 $\varphi^{(M)}$ は、以下のように M 個の正規直交基底の線形和で表される。

$$\begin{aligned} \varphi^{(M)} &= z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \cdots + z_{M-1} \zeta_{M-1} + z_M \zeta_M \quad (7) \\ &= \mathbf{V}_M z^{(M)} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_M = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_M)$$

$\varphi^{(M)}$ をスペクトル変換後の式 (4) に代入して得られる残差ベクトルが、擾乱ベクトル ζ_j と直交する条件を課す。

$$(\mathbf{B} - \lambda_b^{(M)} \mathbf{I}) \varphi^{(M)} \perp \zeta_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad (9)$$

$\lambda_b^{(M)}$ は \mathbf{B} の近似固有値であり、 \mathbf{I} は単位行列である。上式を変形して、 $N \times N$ から $M \times M$ ($M < N$) に次元数が低下した次の固有方程式が得られる。

$$\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M z^{(M)} = \lambda_b^{(M)} z^{(M)} \quad (10)$$

次に Arnoldi 法のアルゴリズムを示す。Arnoldi 法では次の反復的な方法で効率的に \mathbf{V}_M と $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$ を計算する。任意初期ベクトル \mathbf{q}'_1 に対し、 $\zeta_1 = \mathbf{q}'_1 / \sqrt{\mathbf{q}'_1 \cdot \mathbf{q}'_1}$ を計算し、 ζ_{k+1} を順次、以下の反復で求める。

$$\begin{aligned} \text{for } k = 1 \text{ to } M \\ \mathbf{q}'_{k+1} = \mathbf{B}\zeta_k - \sum_{j=1}^k h_{j,k} \zeta_j \quad (11) \end{aligned}$$

$$h_{j,k} = \zeta_j \cdot \mathbf{B}\zeta_k \quad (12)$$

$$h_{k+1,k} = \sqrt{\mathbf{q}'_{k+1} \cdot \mathbf{q}'_{k+1}} \quad (13)$$

$$\zeta_{k+1} = \mathbf{q}'_{k+1} / h_{k+1,k} \quad (14)$$

next k

$h_{j,k}$ は $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$ の要素である。このアルゴリズムでは $h_{j,k}$ は上 Hessenberg 行列として求められる。以降では、

上 Hessenberg 行列 $\mathbf{V}_M^T \mathbf{B} \mathbf{V}_M$ を \mathbf{H} とおく。 \mathbf{H} の固有値、固有ベクトルを求め、それを用いて \mathbf{B} の近似固有ベクトルを次のように計算する。

$$\mathbf{H}\psi_j = \lambda_j^{(H)} \psi_j \quad (j = 1, \dots, M) \quad (15)$$

$$\varphi_j^{(M)} = \sum_{k=1}^M (\psi_j)_k \zeta_k \quad (16)$$

ここで、 $\psi_j, \lambda_j^{(H)}, \varphi_j^{(M)}$ はそれぞれ \mathbf{H} の固有ベクトル、 \mathbf{H} の固有値、 \mathbf{B} の近似固有ベクトルである。

Arnoldi 法を用いる際、 \mathbf{B} が陽に与えられる必要はなく、 $\mathbf{B}\zeta$ が求めれば良い。そこで千葉の提案した次の手法で計算する⁽⁴⁾。

$$\mathbf{B}\zeta_k = \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{2\varepsilon} \quad (17)$$

このとき、 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ は、 $\mathbf{q}(t) + \varepsilon\zeta, \mathbf{q}(t) - \varepsilon\zeta$ を初期値とする時刻 T 後の積分値である。 ε は微小定数である。千葉の方法は、保存量変数のみを変化させるため、既存の CFD の時間積分計算を使うことが可能であり、容易に全体安定性解析を導入できるという利点がある。Arnoldi 法で \mathbf{H} の固有値と固有ベクトルを求めた後は、 \mathbf{B} の固有ベクトルを求め、固有値スペクトルの逆変換をして行列 \mathbf{A} の近似固有値を求める。Arnoldi 法で縮小化された行列の次元 M とスペクトル変換における時間積分区間 T には任意性があり、固有値の精度に大きく影響するため、その値の見極めが非常に重要となる。

3. 数値計算の概要

本節に示す数値計算の概要は、基本流の算出および固有値スペクトルの変換における時間積分の両方に共通して用いる。比較のため、基本流は Ma and Zhong⁽³⁾ のマッハ 4.5 の平板境界層と無次元パラメータを揃えている。

3.1 計算条件

壁に向かって細かくした直交格子を用いる。格子数は 80×160 で、最小格子幅は 5.4×10^{-4} である。流入条件は、 $\rho_\infty = 1, U_\infty = 1, V_\infty = 0, p_\infty = 1/(\gamma M_\infty^2)$ ($\gamma = 1.4$), $T_\infty = 65.15[\text{K}]$ 、上部境界条件は圧力は Neumann 条件、その他変数は流入と同じ一様流条件とする。壁面境界条件は断熱壁、圧力は Neumann 条件、速度は滑りなし条件とする。流出条件は Neumann 条件とする。

3.2 支配方程式

二次元の圧縮性流れの連続の式、Navier-Stokes の式、エネルギー保存式は、代表長さ L 、一様流の速度 U_∞ 、密度 ρ_∞ 、粘性係数 μ_∞ 、熱伝達率 κ_∞ 、温度 T_∞ を用いて無次元化し、さらに一般座標に変換すると、式 (18) のように記述される。ただし $\text{Re}_\infty = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ は一様流 Reynolds 数である。気体は理想気体とし、状態方程式を用いる。以下、特に断らない限り、すべての変数を無次元とする。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} \right) \quad (18)$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U \end{pmatrix} \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x R_4 + \xi_y S_4 \end{pmatrix} \quad \hat{S} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x R_4 + \eta_y S_4 \end{pmatrix}$$

$$R_4 = \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \frac{\kappa}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (19)$$

$$S_4 = \tau_{yx}v + \tau_{yy}v + \frac{\kappa}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (20)$$

ここで、 J は座標変換のヤコビアン、 γ は比熱比、 $Pr = C_p \mu_\infty / \kappa_\infty$ (C_p : 定圧比熱) は一様流の Prandtl 数である。 U, V はそれぞれ ξ, η 方向の反変速度であり、式 (21) の通り求められる。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (21)$$

また、粘性応力テンソルは式 (22)-(24) のように与えられる。

$$\tau_{xx} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y) \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(v_x + u_y) \quad (23)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{3}\mu(2v_y - u_x) \quad (24)$$

また、粘性係数 μ については式 (25) の Sutherland の式を用いる。

$$\mu = \frac{(T_\infty + C_1)}{(T_\infty T + C_1)} T^{\frac{3}{2}} \quad (C_1 = 117) \quad (25)$$

無次元パラメータの値は次のようにした⁽³⁾。 Re_{unit} は単位レイノルズ数であり、平板 1m を基準長さとした。

$$M_\infty = 4.5, Re_{\text{unit}} = 7.2 \times 10^{-6} [\text{m}], Pr = 0.72$$

3.3 数値計算法

数値計算は有限差分法を基礎とする。対流流束は衝撃波を安定かつ高精度に捕獲するため、五次精度の WENO スキームでセル境界に再構成する⁽⁶⁾。流束分離には Lax-Friedrichs 分離を用いる。流束ヤコビアン⁽⁷⁾の左右固有ベクトルと固有値を求める際に用いるセル境界の値は Roe 平均により求める。粘性流束の離散化は二次精度中心差分を用いる。時間積分は三次精度の TVD Runge-Kutta 法により行う。時間刻みは $cf=0.3$ を満たすようにする。Arnoldi 法に用いる微小係数は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ とする。

4. 基本流

Fig.1 は基本流の圧力分布である。マッハ角は上流で約 16 度、下流で約 14 度になっており、これらは先行研究の上流 15.8 度、下流 13.4 度という結果と比較して精度良く再現されている。Fig. 2 において境界層が捉えられており、境界層の解像という点では設定した格子が妥当であることがわかる。Fig. 3 は壁面に沿う圧力である。これも先行研究⁽³⁾と比較して形状、数値について概ね一致しており妥当であるといえる。

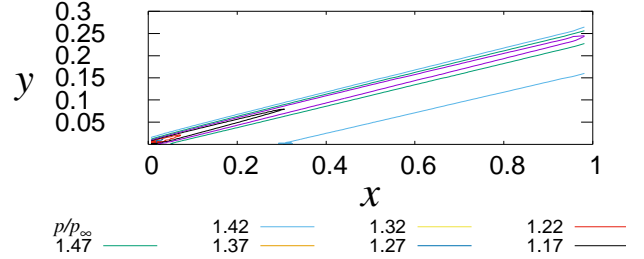


Fig. 1: Steady mean flow pressure contours.

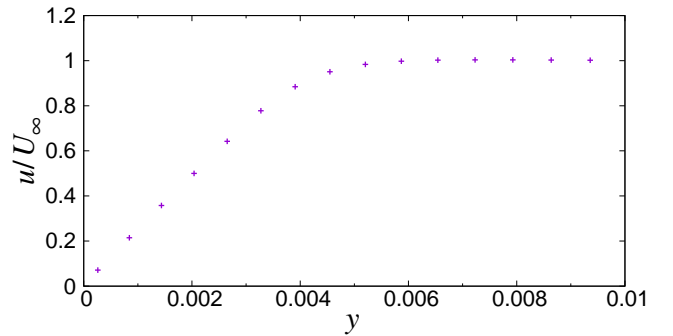


Fig. 2: Near-wall velocity profile of steady mean flow at $x=0.5$.

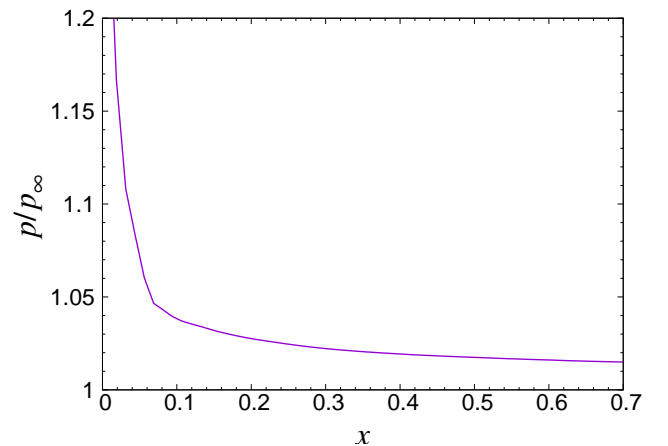


Fig. 3: Pressure distribution of steady mean flow along the wall.

5. 全体安定性解析の結果

5.1 固有値の収束性

固有値の精度を左右する重要なパラメータとして、縮小次元数 M と積分時間 T がある。 M が小さすぎると、最も精度が高いはずの最大の λ_a (最不安定モード) すら適切な値にならない。したがって、信頼性の高い固有値を得るためには、十分大きい M を設定する必要がある。また、積分時間 T については、小さすぎると初期値からの立ち上がりの影響が残り、大きすぎると線形成長とみなせなくなるため、その間に適切な T の範囲が存在すると考えられる。適切な T では固有値が一致する (T に対して収束する) はずである。本研究では縮小化次元数 $M=100, 200, 300$ と積分時間 $T=0.1, 0.2, 0.3$ の組み合わせの合計 9 通りにパラメータを設定し、全体安定性解析を行い、パラメータ M と T に対する固有値の収束性を調べた。 Fig. 4 は $T = 0.1$ に固定した固有値実部のスペクトルである。横軸の Mode ID は、固有値実部が大きい (不安定性が高い) 順に固有モードにつけた番号であり、そのため固有値も Mode ID が大きくなるにつれ減少する。 Fig. 4 では、 M に対しては最不安定モードから固有値が収束していない。これは $T = 0.2$ および 0.3 でも同じ結果であった。当研究グループの先行研究において、固有値の精度には格子解像度も関係しており、特に壁面付近で十分な解像度が必要であることがわかっている。本研究で用いた格子は境界層は解像できているものの、やや粗いため、今後解像度を上げてみる必要がある。 Fig. 5 は $M = 300$ に固定した固有値実部のスペクトルである。 $T = 0.1$ と $T = 0.2$ では、固有値スペクトルがほぼ一致しており、 T に対して固有値が収束していると言える。 $T = 0.3$ では固有値スペクトルが他の T のケースより小さいため、 $T = 0.3$ は線形成長の時間より大きくなり始めていると考えられる。これは固定する M を変えても同じであった。したがって、適当な T は $0.1 \sim 0.2$ 付近に存在すると考える。

5.2 固有ベクトル

固有値の収束性の考察より、 $M = 300, T = 0.1, 0.2, 0.3$ を採用し考察する。 Fig.6 は $T = 0.1$ の最不安定 (Mode 1) の場合である。いずれの物理量の場合も、分布形状に大きな差異が見られず、また衝撃波による影響も明確にはみられなかった。 Fig.7, 8 はそれぞれ $T = 0.2, 0.3$ の圧力分布である。これらも $T = 0.1$ と同様に各物理量に対する分布形状の差異は見られなかった。 T による違いについて分布形状は概ね同じであるが、 T が大きくなるにつれ壁面近傍の擾乱が小さくなっている。これについては原因不明である。 Fig. 9 は、 $T = 0.1$ における各 y 座標における圧力の変動と衝撃波の位置関係であるが、ここから衝撃波と変動による関連は明確には見られない。 Fig. 10 は $T = 0.1$ の安定なモード (Mode 298) 圧力の結果である。 Mode 1 の場合に比べて、物理量の変化量は小さくなっており、擾乱の発達が抑えられていることがわかる。他の物理量分布は省略したが、 Mode 1 と同様に物理量による分布形状の差が見られなかった。

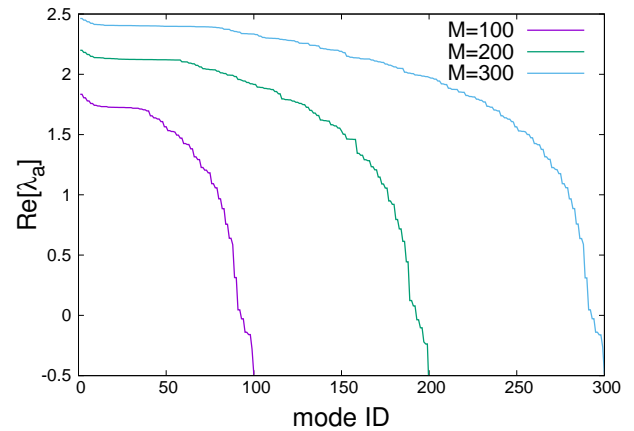


Fig. 4: Convergence of the real part of λ_a for reduced dimension M ($T = 0.1$).

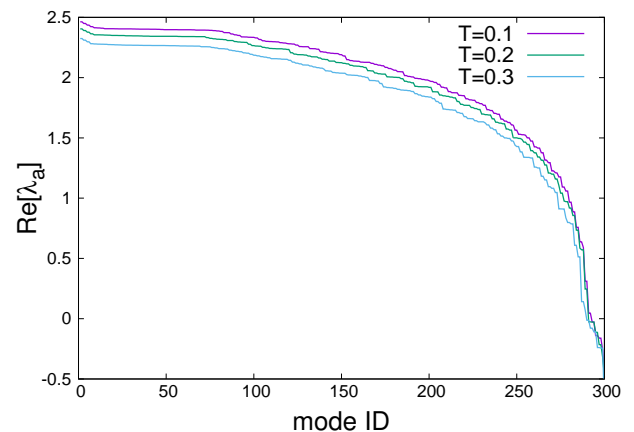


Fig. 5: Convergence of the real part of λ_a for the integration time T ($M = 300$).

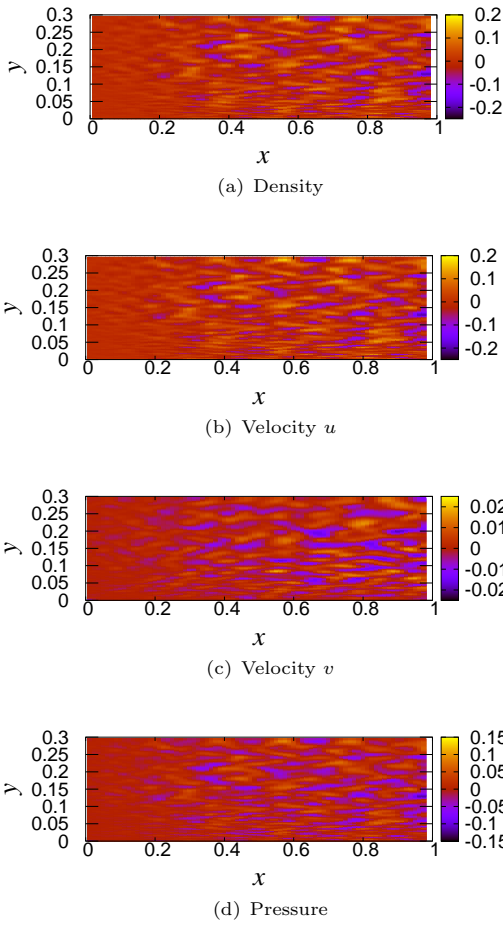


Fig. 6: Contours of real part of Mode 1 ($M = 300, T = 0.1$).

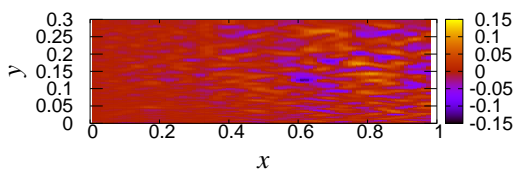


Fig. 7: Pressure contour of real part of Mode 1 ($M = 300, T = 0.2$).

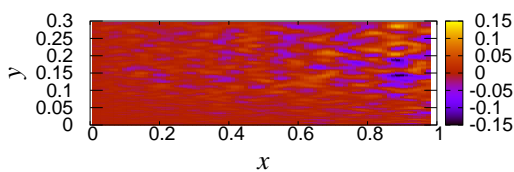


Fig. 8: Pressure contour of real part of Mode 1 ($M = 300, T = 0.3$).

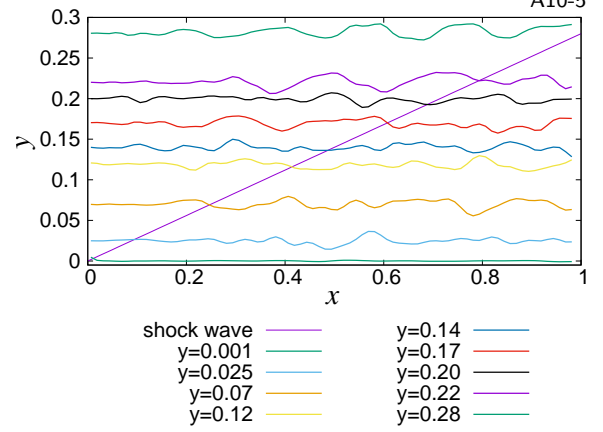


Fig. 9: Relation between pressure fluctuation and the oblique shock wave ($M = 300, T = 0.1$).

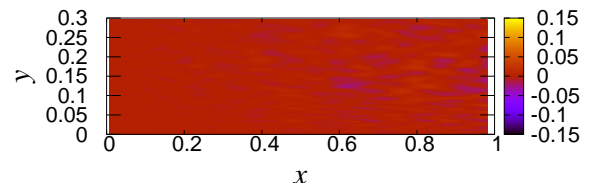


Fig. 10: Pressure contour of real part of Mode 298 ($M=300, T=0.1$).

6. 結言

一様流マッハ数 4.5 の平板境界層を基本流として全体安定性解析を行い、斜め衝撃波の影響を考慮した高速流れの乱流遷移および安定性について調査した。DNS によって得られた基本流は先行研究と比較して妥当であることを確認した。全体安定性解析では、積分時間 T については、収束が確認されたが、 M については収束しなかった。最大固有値 (最も不安定) の固有モードでは、擾乱が発達する様子が見られ、固有値が負となる安定なモードでは擾乱の発達が抑えられていることがわかった。斜め衝撃波を通過したことによって擾乱の発達が変化することはなかった。

参考文献

- (1) Mack, L. M., "Boundary layer linear stability theory", *AGARD*, Rep. 709 (1984).
- (2) McKenzie, J. F. and Westpal, K. O., "Interaction of linear waves with oblique shock waves.", *Phyd.Fluids* 11, 2350-2362 (1968)
- (3) Ma, Y. and Zhong, X., "Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate", *J.FluidMech.*, vol 488, pp. 31-121 (2003)
- (4) 千葉, "非圧縮粘性流体の全体安定性解析," 数値流体力学, 7 (1998), pp.20-48.
- (5) Arnoldi, W.E., "The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem", *Quarterly of Applied Mathematics*, 9 (1951), pp. 17-29.
- (6) Su, C.W., "Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme for Hyperbolic Conservation Laws", *NASA/CR - 97 - 206253 ICASE Report*, 97-65 (1997).