

## 遷音速タービン翼列流れに対するアンサンブルカルマンフィルタの適用

### Applying ensemble kalman filter to transonic flow through two-dimensional turbine cascade

- 伊藤流石, 九大院, 福岡県福岡市西区元岡 744 番地, E-mail: [itou@haira.mech.kyushu-u.ac.jp](mailto:itou@haira.mech.kyushu-u.ac.jp)
- 古川雅人, 九大, 福岡県福岡市西区元岡 744 番地, E-mail: [furu@mech.kyushu-u.ac.jp](mailto:furu@mech.kyushu-u.ac.jp)
- 山田和豊, 岩手大, 岩手県盛岡市上田 4 丁目 3 番地 5 号, E-mail: [kyamada@iwate-u.ac.jp](mailto:kyamada@iwate-u.ac.jp)
- 真部魁人, 九大院, 福岡県福岡市西区元岡 744 番地, E-mail: [manabe@haira.mech.kyushu-u.ac.jp](mailto:manabe@haira.mech.kyushu-u.ac.jp)
- Sasuga Ito, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka city, Fukuoka
- Masato Furukawa, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka city, Fukuoka
- Kazutoyo Yamada, Iwate University, 4-3-5 Ueda, Morioka city, Iwate
- Kaito Manabe, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka city, Fukuoka

Data assimilation techniques have been well developed in earth science field like oceanography and meteorology. In recent years, many researchers have been trying to apply the assimilation techniques to the numerical simulation methods in the other science field. This study focuses on the effects of the flow conditions such as Mach number in applying the data assimilation techniques to the calculations of two-dimensional turbine cascade flows. In this study, Ensemble Kalman Filter (Enkf) has been combined with a finite volume CFD method based on an Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes equation (URANS). We have estimated the parameters of the turbulence model with the Enkf combined with URANS, and evaluated the accuracy of the assimilation results and the convergence time of the assimilation.

#### 1. 緒言

これまでに、数値解析技術 CFD (Computational Fluid Dynamics) は急速に発展するとともに、様々な流れ場の解析に適用されてきた。近年では、コンピュータの開発も進み、スーパーコンピュータ等を用いた大規模な CFD を実施することで複雑な流動現象の高精度な解析が望める。一方で、実験解析技術 EFD (Experimental Fluid Dynamics) においても、高応答センサの開発、PIV (Particle Image Velocimetry) や PSP (Pressure Sensitive Paint) などの空間的な流れ場の同時計測技術の発展により、時空間的に多くの情報を得ることが可能となっている。このように、CFD および EFD により流れ場に関する多くの情報が得られる上で、両者をいかに活用するかが重要となる。それは、単に両手法から得られた物理量の分布を比較するだけでなく、実験結果を数値計算の過程に取り込むことも意味する。気象学分野では、観測データと数値シミュレーション結果を融合する「データ同化」という手法が確立され、他分野の数値シミュレーション技術への導入が進んでいる。

本研究では、逐次型データ同化手法であるアンサンブルカルマンフィルタ (Enkf: Ensemble Kalman Filter) と非定常 RANS 解析 (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation) を組み合わせた手法を 2 次元のタービン翼列流れに適用し、乱流モデルのパラメータ推定を行うとともに、推定精度の検証および解析条件の影響を調査した。

#### 2. 解析対象・解析手法

本研究では、乱流モデルのパラメータ推定に際し、典型的低圧タービン翼である T106 (図 1) を用いたタービン翼列の流れ場に対して 2 次元非定常 RANS 解析 (以下、URANS) を実施した。

本研究では非定常解析手法として、内製コードを使用した。同手法では、 $k-\omega 2$  方程式<sup>1)</sup>に基づく 2 次元圧縮性ナビエーストックス方程式を、有限体積法に基づく緩和型陰の高解像度風上スキームを用いて解いている。非粘性・粘性流束および体積力は全て時間方向に陰的に離散化し、空間的には Cell-Centered 法を用いて離散化した。非粘性流束の評価には、Simple High-resolution Upwind Scheme (SHUS)<sup>2)</sup>を用い、Van Albada 型の流束制限関数<sup>3)</sup>を用いた

三次精度の MUSCL 法を組み合わせる高い空間解像度を確保している。粘性流束は Gauss の発散定理を用いて中心差分的に評価し、時間方向は Euler 陰解法により離散化、時間積分には Matrix Free Gauss-Seidel (MFGS) 陰解法<sup>4)</sup>を用いた。高精度な非定常解析を行うために、時間微分項を二次精度の後退差分法により評価し、各時間ステップにおいて内部反復計算を 5 回行った。非定常解析における無次元時間刻み幅は  $\Delta t = 0.002$  とした。

計算格子は翼周りを O 型、それ以外を H 型で作成した。翼面上の格子点数は 400 点、計算領域全体で約 62,000 点であり、壁面に対する最小格子幅は  $y^+ < 1$  となるよう十分小さい値を設定している。入口境界条件は全温全圧固定、流入角 37.7 度 (T106 のメタル角に相当) に設定し、出口境界条件を静圧固定とした。なお本研究では、比較対象も含め以下のような出口境界条件で解析を実施した。

- ・ 静圧比 1.1 : 亜音速流れ
- ・ 静圧比 1.5 : 遷音速流れ
- ・ 静圧比 2.0 : 遷音速流れかつ流出マッハ数 1 以上

#### 3. アンサンブルカルマンフィルタ

カルマンフィルタは、1960 年に線形システムに対して提案されたフィルタ理論である<sup>5)</sup>。これは線形最小誤差分散推定理論により、数値シミュレーションモデルの予測値 (計算値) と観測値 (実験値) を用いて最適値を算出するものである。カルマンフィルタ

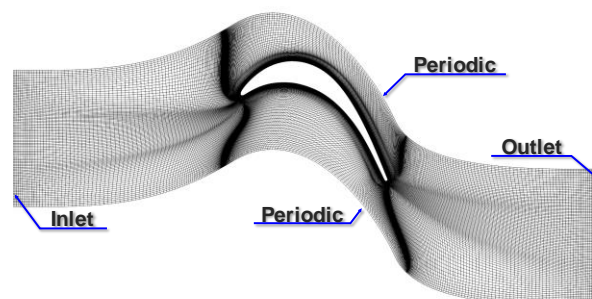


Fig. 1 T106 turbine blade

の詳細は文献<sup>5)</sup>を参照していただきたいが、要約すれば、予測値と観測値のそれぞれの誤差分散からカルマンゲインと呼ばれる重み行列を導出し、予測値と観測値の差に乗じて、予測値を修正する手法である。

カルマンフィルタの有効性は、制御工学分野で広く利用されてきた中で十分示されているが、その理論を確立する上で線形システムモデルを仮定していることから、システムの非線形性が強い場合には状態推定が不安定になることが指摘されている。そのため、拡張カルマンフィルタなどの非線形性が比較的小さいシステムに対するフィルタリング理論が提案されているが、同手法は数値モデルの自由度が  $n$  とすると時間積分を  $2n$  回行う必要があり、また前述のように非線形性が強いシステムは不得手である。本研究では計算量を減らし、かつ、非線形性の影響をより適切に取り入れることができるアンサンブルカルマンフィルタ (以下, Enkf) を使用した。これは、アンサンブル予測を用いてシステムの分布 (分散) を表現する方法で、最大の利点は、シミュレーションモデルをそのまま用いて、カルマンフィルタによる最適値の推定が実行できることである。

#### 4. 乱流モデルのパラメータ推定

本研究で用いた  $k-\omega_2$  方程式は乱流運動エネルギー  $k$  と比散逸率  $\omega$  を解くことで渦粘性を計算する手法で、方程式には 7 つのパラメータが内在する。このパラメータは以下のような推奨値<sup>1)</sup>が定められている。

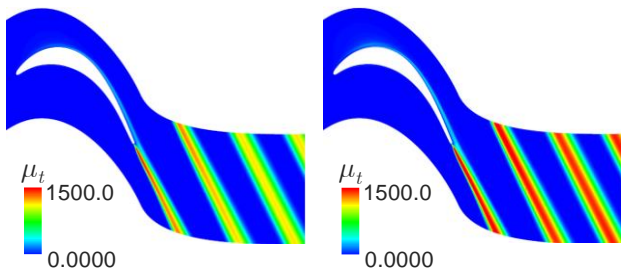
$$\begin{aligned} R_\beta &= 8, & R_k &= 6, & R_\omega &= 2.7, & \beta &= 3/40, \\ \sigma &= \sigma^* = 0.5, & \alpha_0^* &= \beta/3, & \alpha_0 &= 0.1 \end{aligned} \quad (1)$$

このような定数は一部修正される場合もあるが、多くの解析でそのまま使用される。しかし、上記モデルを含む多くの乱流モデルの定数部分が、現在、多くの解析対象となっているような非定常の複雑な流れ場を考慮していない。もし、実験結果から得られる流れの情報から乱流モデルのパラメータ推定が行えるのならば、乱流モデルの違いによって生じる数値解析結果の相違に関する議論から一歩進んだ議論が行える可能性がある。

図 2 に、Wilcox の示す  $k-\omega_2$  方程式のパラメータの推奨値を用いて数値解析を実施した流れ場における渦粘性係数の分布と、任意に設定したパラメータを用いて数値解析を実施した流れ場における渦粘性係数の分布を示す。なお、任意に設定したパラメータは以下の通りで、出口静圧比は 1.1 を設定している。

$$\begin{aligned} R_\beta &= 8.8, & R_k &= 6.6, & R_\omega &= 2.97, \\ \beta &= 33/400, & \sigma &= \sigma^* = 0.55, \\ \alpha_0^* &= \beta/3, & \alpha_0 &= 0.11 \end{aligned} \quad (2)$$

図に示す通り、任意に設定したパラメータから算出された流れ場では Wilcox の推奨値により算出された流れ場に対し渦粘性が過大評価されていることがわかる。本研究では、式(2)に示すパラメータにより算出された流れ場を初期値とし、Wilcox のパラメータ



(a) Wilcox definition (b) Other definition  
Fig. 2 Turbulent viscosity distribution

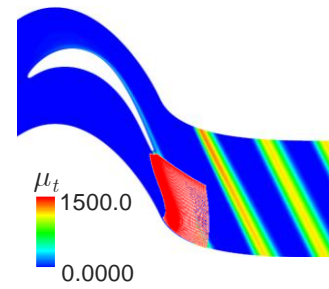


Fig. 3 Measurement area of pseudo experimental result

により算出された流れ場を実験値として Enkf によりパラメータ推定を行う。

#### 4.1 模擬実験値の作成

本研究では、図 3 に示す赤色の格子領域から計 2400 点の速度ベクトルを取り出して模擬実験値を作成した。通常、実験値には人的誤差、測定誤差など何らかの要因で生じる誤差が含まれる。本研究においても、このような誤差を模擬した値を模擬実験値に加えた。

$$\mathbf{y}_t = (u, v)^T + \mathbf{w}_t \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{y}_t$  は模擬実験値、 $u, v$  はそれぞれ  $x$  方向速度、 $y$  方向速度、 $\mathbf{w}_t$  は Box-Muller 法<sup>6)</sup>により生成される平均値 0、分散値 1 の正規分布に基づく乱数である。誤差の大きさは、計算履歴の残差と同じオーダー (およそ  $10^5 \sim 10^6$ ) となるように設定した。なお、模擬実験値は解析結果の計算ステップ  $n = 20100 \sim 30000$  [step] から 100 [step] 毎に抽出した。

#### 4.2 アンサンブルメンバーの表現

カルマンフィルタの原理では、計算値について「バラつき」が必要となる。Enkf では、計算値の分散をアンサンブルメンバー (同じ解析ソルバを用いて、同じ流れ場に対し複数の計算を実行した場合のバラつき) により近似する。アンサンブルメンバーの表現としては、初期値に微小なバラつきを与えるほか、境界条件を各アンサンブルメンバーで変更するなどの方法がある。今回は、アンサンブルメンバーの表現方法として乱流モデルのパラメータを各メンバーで変更した。つまり、上付きの添え字  $l$  をアンサンブルメンバーの番号とすれば、各アンサンブルメンバーのパラメータは以下の範囲から抽出される。

$$\begin{aligned} 8.0 &\leq R_\beta^l \leq 9.6 \\ 6.0 &\leq R_k^l \leq 7.2 \\ 2.70 &\leq R_\omega^l \leq 3.24 \\ 0.075 &\leq \beta^l \leq 0.090 \\ 0.5 &\leq \sigma^l \leq 0.6 \\ 0.025 &\leq \alpha_0^{*l} \leq 0.030 \\ 0.10 &\leq \alpha_0^l \leq 0.12 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、パラメータのバラつきについても平均値 0、分散値 1 の正規分布に基づく乱数を Box-Muller 法により生成した。なお、本研究におけるアンサンブルメンバーの数は 100 とした。

#### 4.3 乱流モデルパラメータの状態ベクトルへの組み込み

乱流モデルのパラメータは言うまでもなくそれだけで時間発展するものではない。本研究では、Enkf により乱流モデルのパラメータを推定するが、その場合、以下のように推定する変数を状態ベクトルに組み込む必要がある。

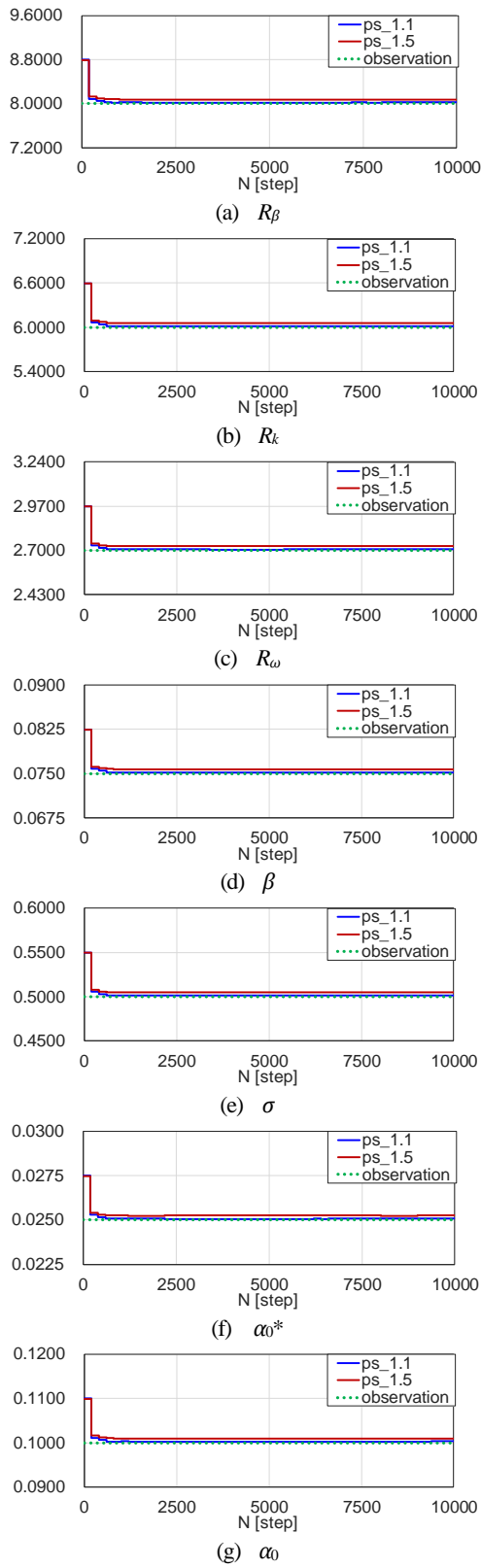


Fig. 4 Time variation of assimilation results

(Ensemble mean of  $k-\omega$  2 turbulence model parameters)

$$\mathbf{q}_t = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T$$

$$\mathbf{q}_t^{*(l)} = (\mathbf{q}_t^{(l)}, R_\beta^{(l)}, R_k^{(l)}, R_\omega^{(l)}, \beta^{(l)}, \sigma^{(l)}, \alpha_0^{*(l)}, \alpha_0^{(l)})^T \quad (3)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $e$  は内部エネルギーである。このように、形式的に状態ベクトルに加えられたモデルは「自己組織化モデル」と呼ばれる。上記方法により、各パラメータの最適値をそれぞれの計算格子あるいは計算セル中心において求めることができる。

ただし、4.1 節で模擬実験値を作成していない流れ場では、同化過程を実施しないため乱流モデルのパラメータは変動しない。そのため本研究では、同化を行う領域内（図 3 の赤色格子部）の各計算セル中心で推定される乱流モデルのパラメータのアンサンブル平均を領域内で計算し、全計算領域に与えた。

### 5. パラメータ推定の結果

図 4 に静圧比 1.1 および 1.5 の流れ場に対して行ったパラメータ推定について、7 つのパラメータのアンサンブル平均の時間推移を示す。静圧比 2.0 の流れ場に対するパラメータ推定結果は後述する。なお、図中において縦軸は各パラメータの値、横軸は同化開始時刻から数えた計算ステップ数である。また、比較としてパラメータの模擬実験値（観測値：observation）も示している。図に示すように、上記 2 条件のいずれにおいても同化過程の早期に全パラメータが推奨値に漸近していることが確認された。

各条件の同化過程終期におけるパラメータを表 1 に示す。なお、比較のため各パラメータの推奨値を記載し、かつ図中 Ps\* は静圧比である。表に示すように、推定されたパラメータは完全には推奨値と一致しなかったが、推奨値との差は静圧比 1.1 の条件では最大で約 0.3%、静圧比 1.5 の条件では最大で約 1% であった。ただし、静圧比 2.0 の条件では同化初期の段階で計算が不安定になり、解が発散した。そのため、模擬実験値に与える誤差を大きく

（初期値とした流れの計算における残差が  $10^{-5}$  であるのに対し観測誤差を  $10^{-3}$  程度に設定）して、再度推定を試みた。カルマンフィルタの計算において観測誤差が大きくなることはカルマンゲインの値が小さくなること、すなわち解の修正が緩和されることを意味する。観測誤差を大きくすることにより同化過程における計算の不安定さが多少改善されたが、同化過程が進むにつれて計算が不安定になり、解が発散した。さらに観測誤差を大きくすることで安定化を図ることも考えられるが、観測誤差が大きくなることは実条件において物理センサの精度の悪化を意味するため、以降の過大な観測誤差を付与した場合の静圧比 2.0 の出口境界条件におけるパラメータ推定は再施しなかった。また、静圧比 1.1 および 1.5 の推定結果について、推奨値に収束しない原因の一つとして模擬実験値の作成の際に用いた Box-Muller 法による乱数生成機構では、平均値が厳密に 0 ではなく模擬実験値の平均値に対して 1% 程度の誤差が発生することが考えられる。ただし、前述の乱数生成法はアンサンブルメンバーの数を多くとれば平均値が 0 に近づくことも確認しており（表 2）、同時に推定精度も向上することが考えられる。

上述の結果から、流れのマッハ数が大きくなるにつれ推定精度が悪化していることが確認でき、流出マッハ数が 1 以上の流れ場

Table 1 Assimilation results of  $k-\omega$  2 turbulence model parameters

Wilcox definition	$R_\beta$	$R_k$	$R_\omega$	$\beta$	$\sigma$	$\alpha_0^*$	$\alpha_0$
1.1	8.00	6.00	2.70	0.0750	0.500	0.0250	0.100
1.5	8.02	6.02	2.71	0.0752	0.501	0.0251	0.100
1.5	8.08	6.06	2.73	0.0757	0.505	0.0252	0.101
2.0	Simulation diverged.						

Table 2 Number of Ensemble member vs. mean of random number by Box-Muller method

Number of Ensemble member	Mean of random number normalized by maximum value
100	0.01
500	0.005
1000	0.0006
5000	0.0004

ではパラメータ推定時の流れの計算そのものが不安定になることが確認された。カルマンフィルタの理論では TVD スキームのように衝撃波などによる計算の不安定性を考慮した解の修正を行っていないため、高マッハ数条件ではフィルタリングを実施した直後の流れの計算が不安定になると考えられる。同時に、データ同化を行う流れの条件や計算領域には制約があると考えられる。

## 6. 結言

本研究では、逐次型データ同化手法であるアンサンブルカルマンフィルタと非定常 RANS 解析を組み合わせた手法を 2 次元のタービン翼列流れに適用し、乱流モデルのパラメータ推定を行うとともに、推定精度の検証および解析条件の影響を調査した。

亜音速流れとなる静圧比 1.1 の出口境界条件でのパラメータ推定では、推定の終期状態において推奨値との差が最大で約 0.3% であった。遷音速流れとなる静圧比 1.5 の出口境界条件でのパラメータ推定では、推定の終期状態において推奨値との差が最大で約 1% であった。遷音速流れかつ流出マッハ数が 1 以上となる静圧比 2.0 の出口境界条件では、パラメータ推定時の流れの計算が不安定となり、解が発散した。観測誤差を大きくすることで多少計算が安定化するが、同化過程が進むにつれ徐々に計算が不安定となった。

静圧比 1.1 および 1.5 の条件において、推定値が推奨値に一致しなかった原因として、模擬実験値の誤差の平均値が厳密に 0 とならなかったことが考えられるが、これはアンサンブル平均をおこなうサンプル数を増やすことで改善される可能性がある。

高マッハ数の流れの条件の際に計算が不安定となる原因としては、カルマンフィルタの理論では TVD スキームのように衝撃波等による計算の不安定性を考慮した解の修正を行っていないことが考えられる。

## 参考文献

- (1) Wicox, D. C., 1994, "Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model," AIAA Journal, 32 (2), pp. 247-255.
- (2) Shima, E. and Jounouchi, T., 1997, "Role of CFD in Aeronautical Engineering (No. 14) - AUSM Type Upwind Schemes," In the 14<sup>th</sup> NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, National Aerospace Lab., pp. 7-12 NAL SP-34.
- (3) Anderson, W. K., Thomas, J. L. and Van Leer, B., 1986, "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations," AIAA Journal, 24(9), pp. 1453-1460.
- (4) Shima, E., 1997, "A Simple Implicit Scheme for Structured/Unstructured CFD," In Proceedings of 29<sup>th</sup> Fluid Dynamic Conference, pp. 325-328.
- (5) 住正明, 露木正, 河宮未知生, 木本昌秀著 (2012) : 『岩波講座 計算科学 5 計算と地球科学』 岩波書店
- (6) Box, G E. P. and Muller, Mervin E., 1958, "A Note on the Generation of Random Normal Deviates," The Annals of Mathematical Statics, 29 (2), pp. 610-611.