

非定常非圧縮性流れに対する 移流項線形化時間2次精度半陰的ルンゲクッタ法

Second-order time-accurate semi-implicit Runge-Kutta method
with linearized convection term for unsteady incompressible flow

- 宮西哲平, 名工大院, 〒 466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail: 30413191@stn.nitech.ac.jp
山田格, 名工大院, 〒 466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail: yamada.toru@nitech.ac.jp
玉野真司, 名工大院, 〒 466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail: tamano.shinji@nitech.ac.jp
森西洋平, 名工大院, 〒 466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail: morinishi.yohei@nitech.ac.jp

Teppey Miyanishi, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku Nagoya, Aichi, 466-8555, JAPAN

Toru Yamada, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku Nagoya, Aichi, 466-8555, JAPAN

Shinji Tamano, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku Nagoya, Aichi, 466-8555, JAPAN

Yohei Morinishi, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku Nagoya, Aichi, 466-8555, JAPAN

A time-accurate semi-implicit time marching method with linearized convection term is proposed for unsteady incompressible flow simulations. To satisfy a second-order time accuracy and energy conservation property, a two-stage semi-implicit Runge-Kutta method with convection linearization is proposed, in which explicit treatment is applied only on the convection velocity. Despite the linearization of the momentum equation, we here use direct approach instead of segregated method to assess the present method without an influence of splitting error for the coupling of the Navier-Stokes and continuity equations. The time accuracy and the conservative properties of different methods including the present method are explored on the two-dimensional periodic Taylor-Green vortex flow. The superiority of the present method is also confirmed in the DNS of the turbulence channel flow.

1. 緒言

陰的計算アルゴリズムの代表である SIMPLE 法⁽¹⁾を流れの非定常計算へ適用する場合, 分離誤差による NS 式の満足度低下と NS 式の移流項線形化による時間精度低下の2つの問題があった. これらに対しまず SIMPLEC 法⁽²⁾や PISO 法⁽³⁾等の分離誤差を低減する手法が考案された. これらの手法が提案された時点では, 単純に1つ前の時間ステップの値を用いて移流項が線形化されており, 線形化後に2次精度の時間進行法を用いてもその時間精度が達成されないという問題点があった⁽³⁾. それに対して, 現在までに時間精度を維持する手法として2つの方法が提案されている. まず1つ目の方法は, SIMPLE 法系統を内包するように NS 式が満足されるまで非線形反復を実施する方法である. これにより時間精度は向上するが, 繰り返し手順が1次収束のヤコビ反復に対応するため, 他の非線形反復手法と比べて計算効率に対する優位点がほとんど見られない. 2つ目の方法は, 2次精度後退差分による時間離散化に, 非線形である移流項の移流速度のみを時間2次精度の陽的な外挿で時間離散化する方法である⁽⁴⁾. この方法は非線形反復を必要としないため, 非線形反復を要する非分離型解法と比べて計算負荷に対する優位性が期待できる. しかし, 時間2次精度の陽的な外挿を用いているので, スターティングスキームや時間刻み幅変更時に特別な操作が必要となる.

一方, DNS や LES のような乱流の非定常数値計算においては完全保存形差分スキーム⁽⁵⁾がしばしば用いられる. 完全保存形差分スキームとは, 連続の式の成立により移流項が速度自乗量の保存形にもなることを離散的に実現し, 圧力項も運動エネルギー式中で離散的に保存形となる差分スキームのことである. この差分スキーム

を用いる場合, 空間に対して周期的な場や境界での流束が0となる場において運動エネルギーの総和が時間離散化の誤差を除いて保存されるので, 時間積分を長時間安定的に実施することができる. さらに Ham et al.⁽⁶⁾は完全保存形差分スキームを時間方向にも拡張した. この場合の時間進行法は陰的中点則に対応し, 理論上は絶対安定な計算アルゴリズムとなる.

本研究では線形多段解法ではなくルンゲクッタ法を用いて, 移流項を線形化しても時間2次精度が維持される陰的時間進行法を提案する. 提案する手法に対して, テイラーグリーン渦と平行平板間チャネル乱流の数値計算を実施し, その特性を調査した. ここでは時間進行法について調査を実施するために, 分離誤差の影響が憂慮される SIMPLE 法系統の計算アルゴリズムではなく, 森西・福井⁽⁷⁾と同じように非分離型解法を用いて離散連立方程式を解く.

2. 計算手法

2.1 支配方程式

本研究では流れ場の支配方程式として, 以下に示される非圧縮性流体の連続の式および NS 式を用いる.

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i. \quad (2)$$

ここで, t は時間, x_j ($j = 1, 2, 3$) は空間座標, u_i は x_i 方向の速度成分, p は圧力, ρ は密度, ν は動粘度, および f_i は外力を表す.

本研究では森西・福井⁽⁷⁾と同様に, 直角直線座標の不等間隔格子への適用を考え, 空間座標の各方向に対する1

次元写像を導入している。時間離散化された式に対して、2次精度中心差分による空間の離散化を行う。空間格子にはスタガード格子を適用する。また、離散化によって生じる連立方程式は JFNK 法 (Jacobian-Free Newton-Krylov method)⁽⁸⁾⁽⁹⁾ による Newton 反復で解き、その際のクリロフ部分空間反復法には GMRES(m) 法 ($m = 30$)⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ を用いる。

2.2 時間進行法

時間進行法として陰的中点則を式 (2) に適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_j^{n+1} u_i^{n+1} + u_j^n u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (3) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left\{ \frac{\partial(u_i^{n+1} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^{n+1} + u_j^n)}{\partial x_i} \right\} \right] + f_i, \end{aligned}$$

となる。ここで上付き添え字の n は時間ステップを表す。また上式に対し、SIMPLE 法系統の計算アルゴリズムでしばしば用いられる前時間ステップの値を用いた移流項の線形化を行うと、

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_j^n u_i^{n+1} + u_j^n u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (4) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left\{ \frac{\partial(u_i^{n+1} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^{n+1} + u_j^n)}{\partial x_i} \right\} \right] + f_i, \end{aligned}$$

となる。 \hat{Z} elico et al.⁽⁴⁾ はこの前時間ステップの値を単純に与える線形化操作では時間精度が低下することを示している。次に今回提案する時間進行式を示す。

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{(1)} - u_i^n}{a_1 \Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j^n (u_i^{(1)} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} \quad (5) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left\{ \frac{\partial(u_i^{(1)} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^{(1)} + u_j^n)}{\partial x_i} \right\} \right] + f_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(b_{21} u_j^{(1)} + b_{20} u_j^n)(u_i^{n+1} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left\{ \frac{\partial(u_i^{n+1} + u_i^n)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^{n+1} + u_j^n)}{\partial x_i} \right\} \right] + f_i. \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、上付き添え字 (1) はルンゲクッタ法の 1 段目を表す。上記の時間進行法では、移流項の線形化の後も時間 2 次精度を維持するようにルンゲクッタ法の段数が 2 段となる。また、時空間に対する保存特性を満足させるため、ルンゲクッタ法の各段において移流項以外を陰的中点則で時間進行する形である。自由パラメータを a_1 とした場合、この時間進行法が時間 2 次精度になる条件は以下で与えられる。

$$b_{21} = \frac{1}{2a_1}, \quad b_{20} = \frac{2a_1 - 1}{2a_1} \quad (7)$$

3. 検証計算

提案する時間進行法 SIRKL2(Semi-Implicit-Runge-Kutta-Linearized, 2nd order) の検証のため、テイラー

グリーン渦と平行平板間チャンネル乱流の 2 つの流れ場を用いた。初めにテイラーグリーン渦の流れ場において、時間精度とエネルギー保存特性をそれぞれ粘性計算と非粘性計算で確認した。また平行平板間チャンネル乱流において、時間解像度の統計量への影響を調査した。また同様の流れ場において、式 (3)、式 (4)、および陰的オイラー法による時間進行法(ここではそれぞれ、SIRK2, SIRKL1, および IE と呼称する)についても数値計算を実施した。

3.1 テイラーグリーン渦の数値計算

3.1.1 粘性計算 テイラーグリーン渦⁽¹²⁾ は 2 次元非圧縮粘性流体での空間的に周期的な減衰渦であり、次の理論解を有する。

$$u_1 = -(\cos x_1)(\sin x_2) \exp(-2\nu t), \quad (8)$$

$$u_2 = (\sin x_1)(\cos x_2) \exp(-2\nu t), \quad (9)$$

$$p = -\frac{1}{4} \rho \{(\cos 2x_1) + (\cos 2x_2)\} \exp(-4\nu t). \quad (10)$$

ここでは、数値計算の初期場として上式に時刻 $t = 0$ を代入したものを用いた。また、初期速度 u_0 、動粘度 ν 、正方形領域の 1 辺の長さ L により流れ場を正規化し、 $Re = u_0 L / \nu$ で定義されるレイノルズ数を 100 として数値計算を行った。また、計算領域は $L \times L = 2\pi l_0 \times 2\pi l_0$ ($l_0 = 1$) であり、格子数は $N_1 \times N_2 = 128 \times 128$ である。本検証では、無次元時間刻み幅 $\Delta t u_0 / l_0 = 10^{-6}$ から 10^{-1} までのいくつかの時間刻み幅を用いて初期時刻 $t u_0 / l_0 = 0$ から最終時刻 $t u_0 / l_0 = 0.1$ まで流れ場の計算を実施した。ここでは、次式に示す RMS 誤差を用いて時間精度を確かめた。

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{1}{N} \sum |\mathbf{u}_{t=0.1} - \mathbf{u}_{\text{ref}}|^2} \quad (11)$$

ここで $N = N_1 \times N_2$ は総格子点数であり、参照値 (\mathbf{u}_{ref}) は実施した時間刻み幅の中で最も小さいもの ($\Delta t u_0 / l_0 = 10^{-6}$) の最終時刻における流れ場の値である。

Fig. 1 に時間刻み幅に対する RMS 誤差の両対数グラフを表す。この図から、IE, SIRKL1, SIRKL2, および SIRK2 の時間精度がそれぞれ時間 1 次精度、1~2 次精度、2 次精度、および 2 次精度であることがわかる。これにより、 \hat{Z} elico et al.⁽⁴⁾ と同様に移流項線形化の仕方によって時間精度が低下することに加えて、提案する時間進行法が時間 2 次精度を達成することも確認できた。なお、計算により得られた速度を用いて圧力のポアソン方程式を解くことにより、圧力の時間精度に関して Fig. 1 と同様の挙動を確認した。

3.1.2 非粘性計算 SIRKL2 がエネルギー保存特性を満足することを実証するため、前節 3.3.1 の非粘性計算を実施した。これは離散化手法のエネルギー保存特性を評価するための、単純で効果的なテストである。解析的な保存特性は時間対して質量、運動量、そしてエネルギーの保存を要求する。ここでは計算時間を考慮して、粘性計算とは異なる格子数 $N_1 \times N_2 = 64 \times 64$ を用いた。また、ニュートン反復の許容残差 $TOL_u = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}$ および時間刻み幅 $\Delta t u_0 / l_0 = 0.1, 0.01$ の場合に対

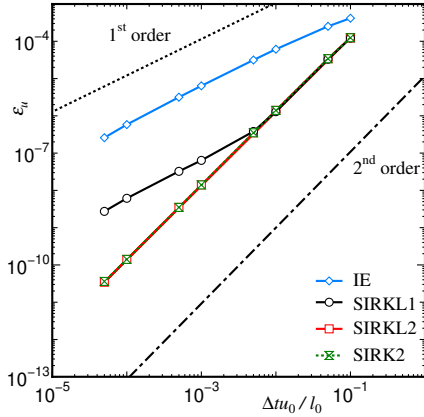


Fig. 1: RMS errors of velocity as a function of time increment for different time marching methods

するエネルギー保存特性も確認した。時間刻み幅が 0.1, 0.01 の場合、クーラン数はそれぞれ 1, 0.1 程度であった。

Fig. 2 に理論的にエネルギー保存特性を満足する SIRKL2 と満足しない IE の積分時間 $tu_0/l_0 = 500$ までの全運動エネルギーの相対誤差を示す (ここでは時間刻み幅は $\Delta tu_0/l_0 = 0.1$)。ここでは、全運動エネルギーの相対誤差を次式により与えた。

$$\varepsilon_k = \frac{k - k_{t=0}}{k_{t=0}}, \quad k = \sum \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \quad (12)$$

この図から、SIRKL2 が IE と比べて運動エネルギーが十分に保存されていることがわかる。次にエネルギー保存特性を定量的に評価するため、Tab. 1 に IE, SIRKL1, SIRKL2, および SIRK2 の計算終了時の全運動エネルギーの相対誤差の値を示す。エネルギー保存特性を有しない IE はニュートン反復の許容誤差によらずほぼ一定の誤差 (約 0.2) を示した。また、時間刻み幅を 1/10 倍にすると誤差が約 3 倍程度大きくなった。これは、時間刻み幅減少の分、同じ積分時間にかかる反復回数が増加したことによると考えられる。一方でエネルギー保存特性を有する SIRKL1, SIRKL2, および SIRK2 では相対誤差が許容誤差に依存している。これより、エネルギー保存特性が NS 式の満足度に依存して変化することがわかる。また手法によるエネルギー保存性の差は最大で 10 倍程度であった。

3.2 平行平板間チャンネル乱流の数値計算

時間解像度が乱流統計平均量に与える影響を調査するため、平行平板間チャンネル乱流の DNS を実施した。森西・福井⁽⁷⁾では、時空間に対する完全保存形差分スキームを用いることで、コルモゴロフ時間スケールよりも大きな時間刻み幅を用いても計算可能で乱れを維持できることが示されている。また、コルモゴロフ時間スケール以下でないと統計平均量は正確に再現されないことも示されている。そこで、移流項の線形化が施されている時間進行法 SIRKL1 や SIRKL2 に対しても同様の検討を行った。ここでは森西・福井⁽⁷⁾と同じ以下の条件で計算が実施される。チャンネル半幅 h ($h = 1.0$) と壁面摩擦速度 $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$

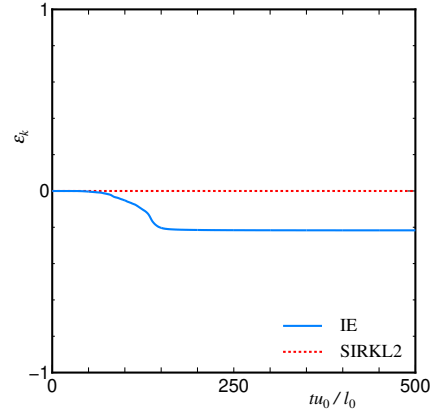


Fig. 2: Time evolution of ε_k for SIRKL2 and IE

(ここでは τ_w は壁面せん断応力である) により定義されるレイノルズ数を $Re = u_\tau h/\nu = 100$ として数値計算を実施した。計算領域を $L_1 \times L_2 \times L_3 = 4\pi h \times 2h \times 2\pi h$ とし、境界条件として x_2 方向に滑りなし条件を、 x_1 と x_3 方向に周期境界条件を適用した。

時間解像度が乱流統計平均量に与える影響の調査を行うために、格子数を $N_1 \times N_2 \times N_3 = 64 \times 64 \times 64$ で固定し、無次元時間刻み幅 $\Delta tu_\tau/h = 0.005, 0.01, 0.025, 0.05$ の 4 種類で数値計算を実施した。これら時間刻み幅を壁座標で表現すると、それぞれ $\Delta t^+ = 0.5, 1.0, 2.5, 5.0$ となる。また、DNS データ ($\varepsilon_{\text{peak}}^+ = 0.134$) を用いてこの流れ場のコルモゴロフ時間スケールを算出した所、壁付近で最小値 $\Delta t_K^+ = 2.7$ を取る。これより、本研究における無次元時間刻み幅 $\Delta tu_\tau/h = 0.025$ がコルモゴロフ時間スケールに近い値をとることがわかる。Fig. 3 に主流方向平均速度分布 u_{1m}^+ を示し、Fig. 4 に各方向の乱流強度分布 $u_{1\text{rms}}^+, u_{2\text{rms}}^+, u_{3\text{rms}}^+$ とレイノルズ応力 $\overline{u_1' u_2'}$ の分布を示す。統計平均は流れ場が十分に発達した後に無次元時間区間 $tu_\tau h = 50$ と周期面内のデータを用いたアンサンブル平均によって算出される。これらの図より、いずれの手法についても時間刻み幅が $\Delta tu_\tau/h = 0.005, 0.01$ の計算結果はスペクトル法による参照データ⁽¹³⁾と概ね一致することがわかる。時間刻み幅 $\Delta tu_\tau/h = 0.025$ については、バッファー層から流路中央にかけて参照値との差を確認できる。特に、時間 2 次精度を有しない SIRKL1 は他の手法と比べて差が大きい。時間刻み幅 $\Delta tu_\tau/h = 0.05$ の SIRK2 の計算結果は平均速度分布に関して、 $\Delta tu_\tau/h = 0.025$ のものと傾向は同じであるが、参照データからのずれが大きくなる。乱流強度分布に関してはほぼ全領域でずれを確認できる。SIRKL2 と SIRKL1 については主流方向平均速度分布においても全領域にかけてずれを確認できる。特に SIRKL1 については、流路中央部が高くなるという他の手法と異なる傾向が見られる。以上より、時空間に対する完全保存形差分スキームを用いたいずれの手法についても、コルモゴロフ時間スケールより時間刻み幅が大きくても計算可能であることが示された。しかし、SIRKL1 については時間刻み幅が大きいと層流化の傾向が見られることが確認された。また、SIRKL2 と SIRK2

Tab. 1: The relative error of total kinetic energy for different time marching methods at $tu_0/l_0 = 500$

Time marching method	Time increment $\Delta tu_0/l_0$	Tolerance TOL_u	ε_k at $tu_0/l_0 = 500$
IE	0.1	1.0×10^{-6}	-2.2×10^{-1}
IE		1.0×10^{-7}	-2.7×10^{-1}
IE		1.0×10^{-8}	-2.8×10^{-1}
IE		1.0×10^{-9}	-2.6×10^{-1}
IE		0.01	1.0×10^{-6}
SIRKL1	0.1	1.0×10^{-6}	-1.3×10^{-8}
SIRKL1		1.0×10^{-7}	$+6.6 \times 10^{-8}$
SIRKL1		1.0×10^{-8}	$+1.6 \times 10^{-9}$
SIRKL1		1.0×10^{-9}	$+2.2 \times 10^{-10}$
SIRKL2	0.1	1.0×10^{-6}	$+5.0 \times 10^{-7}$
SIRKL2		1.0×10^{-7}	-2.7×10^{-8}
SIRKL2		1.0×10^{-8}	$+5.3 \times 10^{-9}$
SIRKL2		1.0×10^{-9}	-1.0×10^{-10}
SIRK2	0.1	1.0×10^{-6}	$+1.5 \times 10^{-8}$
SIRK2		1.0×10^{-7}	-1.6×10^{-8}
SIRK2		1.0×10^{-8}	-7.9×10^{-10}
SIRK2		1.0×10^{-9}	-1.4×10^{-10}

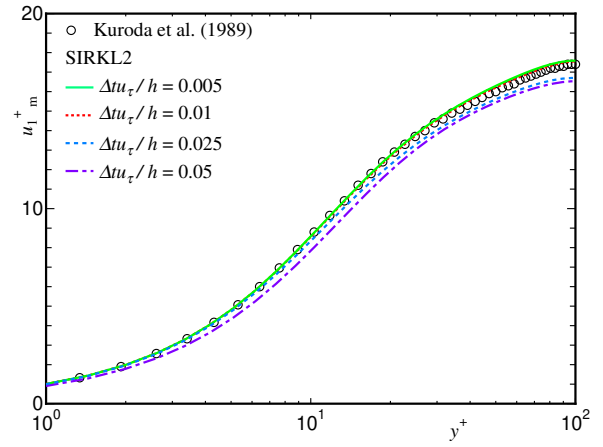
に関しては乱流統計平均量がコルモゴロフ時間スケール近くまで再現されるが、SIRKL1についてはコルモゴロフ時間スケールのおよそ2/5倍より小さくないと再現されないことが確認できた。

4. 結言

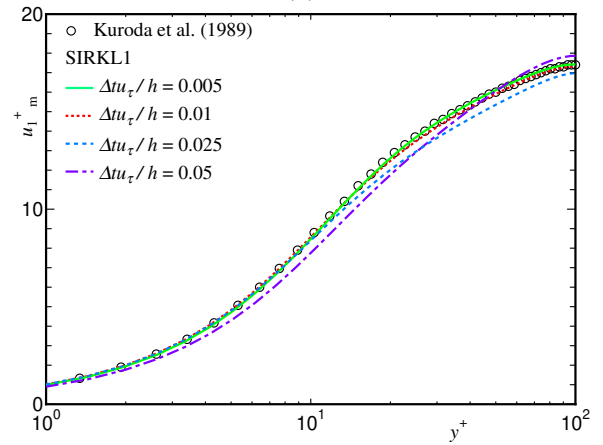
エネルギー保存特性を有し、移流項を線形化しても時間2次精度となる半陰的ルンゲクッタ法をNS式に対して構築した。解法としては、分離誤差を避けるために分離型解法ではなく非分離型解法を用い、テイラーグリーン渦と平行平板間チャンネル乱流の流れ場において構築した手法の特性を調査した。テイラーグリーン渦の流れ場において、提案する手法が時間2次精度を満足し、離散化NS式の満足度程度までエネルギーを保存することが確認できた。また、平行平板間チャンネル乱流の流れ場において、提案する手法が森西・福井⁽⁷⁾と同様にコルモゴロフ時間スケール近くまで乱流統計量を再現できることを示した。

5. 今後の展望

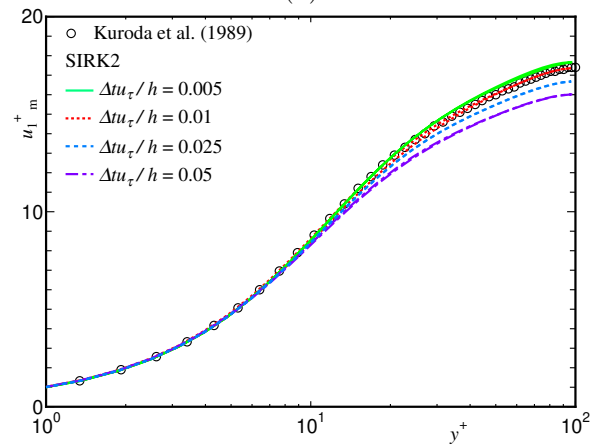
時間2次精度を達成しない手法と比べて、より大きな時間刻み幅でも乱流平均統計量を再現できることから、線形化が必要な分離型解法においても、従来の線形化手法と比べて本手法の有効性が期待できる。そのため今後は、提案する時間離散化手法を分離型解法に適用し、比較検討を行う予定である。



(a)

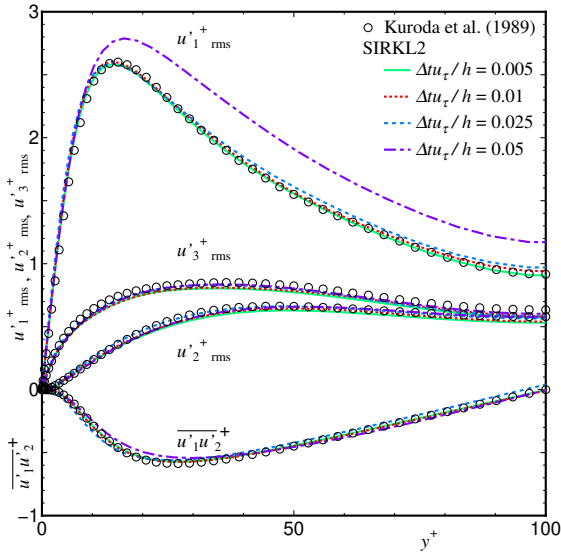


(b)

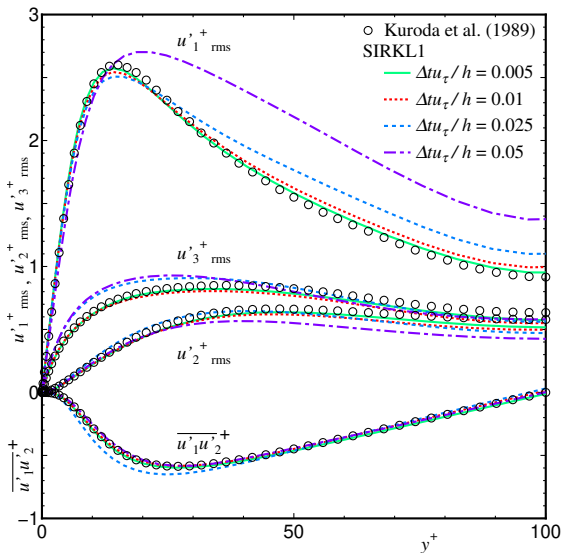


(c)

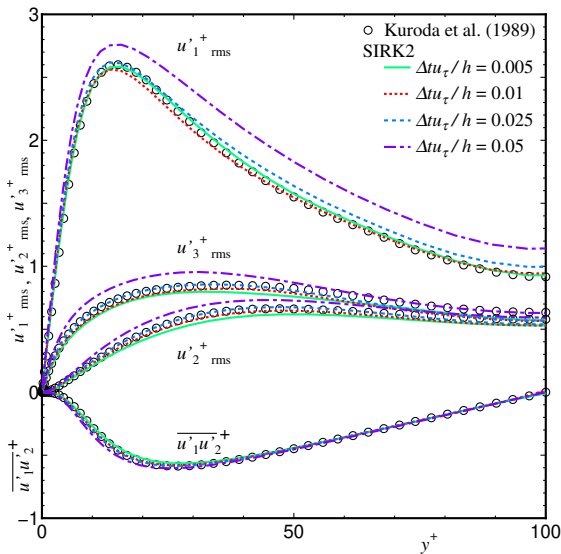
Fig. 3: Effect of time increment on mean streamwise velocity profiles for SIRKL2(a), SIRKL1(b) and SIRK2(c)



(a)2



(b)



(c)

Fig. 4: Effect of time increment on Reynolds stress profiles for SIRKL2(a), SIRKL1(b) and SIRK2(c)

参考文献

- (1) Patankar, S. V., and Spalding, D. B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.15 (10) (1972), pp.1787-1806.
- (2) Van Doormaal, J. P., and Raithby, G. D., Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows, *Numer. Heat Transfer*, Vol.7 (2) (1984), pp.147-163.
- (3) Issa, R. I., Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting, *J. Comput. Phys.*, Vol.62 (1) (1986), pp.40-65.
- (4) Tukobić, Ž., Perić, M., and Jasak, H., Consistent second-order time-accurate non-iterative PISO-algorithm, *Comput. Fluids.*, Vol.166 (2018), pp.78-85.
- (5) Morinishi, Y., Lund, T. S., Vasilyev, O. V., and Moin, P., Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow, *J. Comput. Phys.*, Vol.143 (1998), pp.90-124.
- (6) Ham, F. E., Lien, F. S., and Strong, A. B., A fully conservative second-order finite difference schemes for incompressible flow on nonuniform grids, *J. Comput. Phys.*, Vol.177 (2002), pp.117-133.
- (7) 森西洋平, 福井岳人, 完全保存形差分スキームとJFNK法による非圧縮性流れの非分離解法, 機論(B編), 第75巻, 759号(2009), pp.2163-2171.
- (8) Knoll, D. A., and Keys, D. E., Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications, *J. Comput. Phys.*, Vol.193 (2004), pp.357-397.
- (9) Brown, P. N., and Saad, Y., Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.11 (1990), pp.450-481.
- (10) Saad, Y., and Schultz, M. H., GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.7 (1986), pp.856-869.
- (11) Saad, Y., A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.14 (1993), pp.461-469.
- (12) Taylor, G. I., On the decay of vortices in a viscous fluid, *Philos. Mag. XLVI*, Vol.671 (1923), pp.671-674.
- (13) Kuroda, A., Kasagi, N., and Hirata, M., A direct numerical simulation of the fully developed turbulent channel flow, *Int. Symp. Comput. Fluid Dynam.* (1989), pp.1174-1179.