

AUSM 族スキームと自乗量保存形差分を用いた 混合手法の構築および検証

Construction and verification of combined secondary conservative finite difference methods
and AUSM family schemes

- 野路 潤哉, 名工大院, 〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町, E-mail: j.noji.864@stn.nitech.ac.jp
- 山田 格, 名工大院, 〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町, E-mail: yamada.toru@nitech.ac.jp
- 玉野 真司, 名工大院, 〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町, E-mail: tamano.shinji@nitech.ac.jp
- 森西 洋平, 名工大院, 〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町, E-mail: morinishi.yohei@nitech.ac.jp

Junya NOJI, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 488-8555, Japan

Toru YAMADA, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 488-8555, Japan

Shinji TAMANO, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 488-8555, Japan

Yohei MORINISHI, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 488-8555, Japan

In this study, we investigated the shock capturing characteristics of combined secondary conservative finite difference and shock capturing methods. We carried out the shock tube problem and the shock-vortex interaction problem, and found that combined schemes, that is, numerical dissipation added scheme based on AUSM family schemes give higher accurate solution than the numerical flux combined scheme. Among these schemes, the scheme based on HR-AUSM⁺up can give higher accurate solution than that based on AUSM⁺up. In addition, we found that the combined schemes give high accurate solution, since the attenuation of vortex is suppressed in the shock-vortex interaction problem. In particular, numerical dissipation added schemes have the smallest dissipation among the schemes considered here. Therefore, numerical dissipation added schemes are suitable for turbulence analysis.

1. 緒言

圧縮性流れの数値解析では、衝撃波等の物理的不連続面を鋭く捉え数値振動を抑制する衝撃波捕獲法がしばしば使用される。衝撃波捕獲法としてはFDS法⁽¹⁾、FVS法⁽²⁾、およびAUSM⁽³⁾などの手法が提案されている。特に、AUSM⁽³⁾に様々な改良を施した手法は総称してAUSM族スキーム⁽⁴⁾と呼ばれており、従来の手法に比べ特性算出の行列計算が不要なため、計算負荷が低いという特徴がある。これらの手法は、近年の圧縮性CFDの分野でしばしば用いられている。しかし、これらを単体で用いると数値拡散が大きいため、乱流の数値解析には不向きである。森西ら⁽⁵⁾はこの問題を解決するために、乱流解析に有効な圧縮性流れに対する自乗量保存形差分⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾と衝撃波捕獲法を混合することにより、低散逸性に優れ、不連続面でも安定した計算を可能とする数値計算手法を構築した。さらに、北川ら⁽⁹⁾によって3種類の混合手法(数値拡散項付加タイプ、数値流束混合タイプ、移流項付加タイプ)を用いてSHUS⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、SLAU⁽¹²⁾、SLAU2⁽¹³⁾と自乗量保存形差分を組み合わせた数値計算手法が検討された。その結果、数値拡散項付加タイプを用いたものがより有効であることが示された。本研究では、AUSM⁺up⁽¹⁴⁾と自乗量保存形差分を用いた混合スキームを各混合手法に対し構築し検証計算を実施する。また、ごく最近の高精度スキーム⁽¹⁵⁾を用いた混合スキームも検討する。

2. 圧縮性流れの数値計算手法

2.1 圧縮性流れの支配方程式

圧縮性流れの支配方程式として、質量保存則、運動量保存則、全エネルギー保存則、および状態方程式を用いる。なお、 t と $x_j(j=1,2,3)$ は時間と空間座標、 u_i は x_i

方向の速度成分、 ρ は密度、 p は圧力、 $E(=e+u_i u_i/2)$ は全エネルギー、 e は内部エネルギー、 τ_{ij} は粘性応力テンソル、 T は温度、 R は気体定数、 q_j は熱流束、 f_i は体積力、 S_e は単位体積あたりの熱源である。ただし、下付き添え字(i, j, k など)はテンソル指標で総和規約に従うものとする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j E}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i p}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho S_e, \quad (3)$$

$$p(\rho, e) = (\gamma - 1) \rho e \quad (4)$$

なお、全エネルギー保存則は内部エネルギーの式(5)と運動量保存則(2)に u_i を乗じることで得られる運動エネルギーの式(6)との和より得られる。

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j e}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho S_e, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho u_i u_i / 2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i u_i / 2}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (6)$$

これらを用いて圧縮性流れを表現するためには、粘性応力テンソル τ_{ij} および熱流束 q_j の構成方程式を与えて方程

式系を閉じさせる必要があり、次の構成方程式を用いる。

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\beta - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (7)$$

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\gamma}{Pr} \mu \frac{\partial e}{\partial x_j} \quad (8)$$

ここで、 μ は粘性係数、 β は体積粘性係数、 κ は熱伝導係数、 $T(= e/C_v)$ は温度、 $Pr(= C_p\mu/\kappa)$ はプラントル数、 $\gamma(= C_p/C_v)$ は比熱比、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。また C_p と C_v はそれぞれ定圧比熱と定積比熱である。流体物性値としての体積粘性係数 β については Stokes の仮説に従い無視する。また、粘性係数 μ は次の Maxwell-Rayleigh の式で与える。

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \quad n = 0.76 \quad (9)$$

ただし、 μ_0 は温度 T_0 での粘性係数であり、有次元数値計算の場合には対応する気体の物性値表から適切なものを選べば良く、無次元数値計算の場合にはこれら μ_0 および T_0 を代表値とする。また、熱伝導率 κ は次式により与えられる。

$$\kappa = \frac{C_p}{Pr} \mu \quad (10)$$

ここで、 Pr はプラントル数である。さらに、音速 c および局所マッハ数 M は以下のように定義される。

$$c \equiv \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (11)$$

$$M \equiv \frac{\sqrt{u_i u_i}}{c} \quad (12)$$

2.2 移流項の型と保存特性

式 (1) から (3) で示されるような圧縮性流れの数値計算で用いられる輸送量 ϕ の輸送方程式は、一般に次のように保存形で表記される。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{\phi j}}{\partial x_j} + \rho S_{\phi} \quad (13)$$

ここで $F_{\phi j}$ は輸送量 ϕ の拡散流束、 ρS_{ϕ} は残りの項をまとめたものである。また、式 (13) の左辺については、圧縮性流れにおける質量保存則を用いて変形した次式が用いられる場合もある。

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{\phi j}}{\partial x_j} + \rho S_{\phi} \quad (14)$$

式 (1) と連立して解く場合、式 (13) と (14) は解析的には等価であるが、これらを離散化したものは一般的に等価にはならない。

高レイノルズ数流れの数値計算では、式 (13) と式 (14) の輸送方程式の左辺に現れている移流項の扱い⁽⁶⁾ が非常に重要となる。上述した移流項の型はそれぞれ式 (13) が発散型 (Divergence form)、式 (14) が勾配型 (Advective form) と呼ばれる。質量保存則の左辺 ($Cont.$) と略記)、輸送量 ϕ の輸送方程式中の移流項の発散型 ($Div.$) _{ϕ} と略

記)、勾配型 ($Adv.$) _{ϕ} と略記) を時間微分項を含めてそれぞれ以下のように定義する。

$$(Cont.) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \quad (15)$$

$$(Div.)_{\phi} \equiv \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j}, \quad (16)$$

$$(Adv.)_{\phi} \equiv \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (17)$$

ここで、発散型と勾配型の平均である混合型を構成すると、以下の式 (18) が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Div.)_{\phi} + \frac{1}{2}(Adv.)_{\phi} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

しかし、式 (18) で表される混合型には 2 つの時間微分項が含まれており、標準的な時間進行法の適用は困難である。ここで、式 (18) の時間微分を変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \frac{\phi}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \\ &= \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \\ &= \sqrt{\rho} \frac{\partial \sqrt{\rho} \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

上記の式を用いることで時間微分項が 1 つにまとめられ、標準的な時間進行法の適用が可能となる。この考えを基に、森西⁽⁶⁾ は圧縮性流れの輸送方程式中の移流項の混合型 ($Skew.$) _{ϕ} として次式を提案した。

$$(Skew.)_{\phi} \equiv \sqrt{\rho} \frac{\partial \sqrt{\rho} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (20)$$

また、移流項の発散型 ($Div.$) _{ϕ} 、勾配型 ($Adv.$) _{ϕ} 、および混合型 ($Skew.$) _{ϕ} の間には解析的に以下の関係が成立する。

$$(Div.)_{\phi} = (Adv.)_{\phi} + \phi (Cont.), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (Skew.)_{\phi} &= (Div.)_{\phi} - \frac{1}{2} (Cont.) \\ &= (Adv.)_{\phi} + \frac{1}{2} (Cont.) \end{aligned} \quad (22)$$

これら移流項の型は、質量保存則 ($Cont.$) = 0 が成立すれば解析的に互換となる。さらに、これらのうち発散型 ($Div.$) _{ϕ} は先天的に保存形であり、さらに混合型 ($Skew.$) _{ϕ} が先天的に (質量保存則の成立なしに) 自乗量保存形を与えることが、以下のように ϕ を乗じることにより示される。

$$\begin{aligned} \phi \times (Skew.)_{\phi} &= \phi \times \left\{ \sqrt{\rho} \frac{\partial \sqrt{\rho} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial \rho \phi^2 / 2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \phi^2 / 2}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (23)$$

以上より、時間微分項を含めて移流項の型を定義すれば、圧縮性流れに対する移流項の型の解析的な互換性と

保存特性が非圧縮性流れ⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾の場合と同様に整理できることが示される。つまり、発散型、勾配型、および混合型は質量保存則の成立の元で互換となり、発散型は先天的に保存形、混合型は先天的に自乗量保存形を与える。また、式(20)の混合型は時間微分項が1つにまとめられており、標準的な時間進行法が適用可能なため、実用上有用である。

2.3 支配方程式の離散化

本研究では、コンパクト差分・補間⁽¹⁸⁾を用いて支配方程式の離散化を行う。コンパクト差分は陰的な差分法であり、各ノードの導関数の差分近似値は一方の線形システムを解くことにより一括して求められ、ノード*i*とその周辺のノードにおける物理量 ϕ とその差分近似値に重み係数を乗じた値の線形結合により定義される。

通常差分においては、前節で示した移流項の型の互換性と保存特性が離散的にも満足される自乗量保存形差分スキーム⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾が知られているが、コンパクト差分を適用する場合、一般にこれらの互換性や保存特性は離散的には成立しない。しかし、コンパクト差分においても解析的に自乗量保存形となる混合型を用いることにより、数値拡散無しでも比較的長時間安定な時間積分が可能である⁽¹⁹⁾。

ここでは、セル中心格子を用いたコンパクト差分および補間によって、質量保存則、運動量保存則、全エネルギー保存則を以上のように離散化する。なお、本研究では粘性項、熱流束項を無視した方程式系を用いて検証を実施するため、ここではそれらの項は無視しており、さらに全エネルギーの式の圧力項には分離形を用いている。

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^j} (\rho J U^j) = 0, \quad (24)$$

$$(Conv.-CCn)_{u_i} = -\frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \overline{\left(\frac{J}{h_i} p\right)^{c\xi^i}}, \quad (25)$$

$$(Conv.-CCn)_E = -\frac{1}{J} \bar{p}^{c\xi^i} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \overline{\left(\frac{J}{h_i} u_i\right)^{c\xi^i}} - \frac{1}{J} \bar{u}_i^{c\xi^i} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \overline{\phi^{c\xi^i}} \quad (26)$$

ここで、 $\frac{\delta_c}{\delta_c \xi^j}$ はコンパクト差分、 $\overline{\phi^{c\xi^i}}$ はコンパクト補間を表す。また、内部エネルギーの式と運動エネルギーの式に関しては、次のように離散化する。

$$(Conv.-CCn)_e = -\frac{1}{J} \bar{p}^{c\xi^i} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \overline{\left(\frac{J}{h_i} u_i\right)^{c\xi^i}}, \quad (27)$$

$$(Conv.-CCn)_k = -\frac{1}{J} \bar{u}_i^{c\xi^i} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \overline{\left(\frac{J}{h_i} p\right)^{c\xi^i}} \quad (28)$$

ここで、 $(\rho J U^j)$ は質量流束であり、次のような離散式である。

$$(\rho J U^j) \equiv \overline{\left(\rho \frac{J}{h_j} u_j\right)^{c\xi^j}} \quad (29)$$

さらに、式(25)～式(28)の左辺の $(Conv.-CCn)_\phi$ は*n*次精度コンパクト差分を用いた場合の移流項の離散

式の総称を表しており、発散型 $(Div.-CCn)_\phi$ 、勾配型 $(Adv.-CCn)_\phi$ 、および混合型 $(Skew.-CCn)_\phi$ 移流項の離散式のいずれかが使用される。

$$(Div.-CCn)_\phi \equiv \frac{d\rho u_i}{dt} + \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^j} \left[(\rho J U^j) \overline{\phi^{c\xi^j}} \right], \quad (30)$$

$$(Adv.-CCn)_\phi \equiv \rho \frac{du_i}{dt} + \frac{1}{J} \overline{\left[(\rho J U^j) \frac{\delta_c \phi}{\delta_c \xi^j} \right]^{c\xi^j}}, \quad (31)$$

$$(Skew.-CCn)_\phi \equiv \sqrt{\rho} \frac{d\sqrt{\rho} \phi}{dt} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^j} \left[(\rho J U^j) \overline{\phi^{c\xi^j}} \right] + \frac{1}{J} \overline{\left[(\rho J U^j) \frac{\delta_c \phi}{\delta_c \xi^j} \right]^{c\xi^j}} \right\} \quad (32)$$

3. 衝撃波捕獲法

圧縮性流れにおいては、物体が急激な移動、変形を伴う場合や超音速流れの場合に物理量の不連続を伴う衝撃波等の不連続面が生じる。このような衝撃波等の不連続面を数値振動なく鋭く捉える手法としてFDS法⁽¹⁾、FVS法⁽²⁾、AUSM⁽³⁾等の衝撃波捕獲法がある。

式(1)から(3)において、外力および熱源を考慮しないものとしてそれらを見捨てる、さらに粘性項と熱流束項を無視し、流れを1次元($u_i = u_j = u$, $x_i = x_j = x$)とすると次のシステム方程式(1次元圧縮性オイラー方程式)が得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

ここで、 $Q = [\rho, \rho u, \rho E]^T$ は保存物理量ベクトル、 $F = [\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u]^T$ は流束ベクトルを表す。

衝撃波捕獲法を考える際には、コントロールボリューム界面の数値流束 $F_{i+1/2}$ の取り扱いが重要となる。衝撃波捕獲法には多くの種類があるが、その多くはこの界面の数値流束 $F_{i+1/2}$ の評価方法が異なるのみである。本節では、本研究で用いた衝撃波捕獲法とその数値流束について説明する。

3.1 AUSM 族スキーム

衝撃波捕獲法として、従来はFDS法⁽¹⁾とFVS法⁽²⁾の2つの手法が主に用いられてきたが、一般にFDS法は強い非線形波に対する不安定性、FVS法は線形波に対する過度の数値粘性が問題点として挙げられてきた。そこで両者の欠点を補う形で、FVS法にFDS法の考え方を導入することにより、安定性と解像度を改良する試みがLiouによって行われ、新たな手法としてAUSM(Advection Upstream Splitting Method)⁽³⁾が開発された。AUSMはその後多くの改良がなされ、現在までに様々な発展形の手法が提案されており、それらは総称してAUSM族スキームと呼ばれている。

AUSM族スキームは数値流束を圧力項と移流項に分離し、圧力項はFVS法のまま残して、移流項はすべて風上差分するというものである。AUSM族スキームにおける数値流束 $F_{i+1/2}^{AUSM}$ は共通に次式で定義される。

$$F_{i+1/2}^{AUSM} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Phi^L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Phi^R + \bar{p}N \quad (34)$$

2次元問題に対しては、 $\Phi = [1, u, v, H]^T$, $N = [0, n_x, n_y, 0]^T$ であり、 u および v はそれぞれ x および y 方向の速度、 H は全エンタルピー、 n_x および n_y は各方向の界面における法線ベクトルを表す。 \dot{m} は質量流束、 \tilde{p} は圧力流束であり、これらの定義が各 AUSM 族スキームにおいて異なる。次節以降では、本研究で用いた AUSM 族スキームである AUSM⁺-up⁽¹⁴⁾ と HR-AUSM⁺-up⁽¹⁵⁾ の定義を示す。

3.1.1 AUSM⁺-up

AUSM⁺-up は全速度数値流束スキームの概念より開発された手法である。AUSM⁺ の界面マッハ数 $M_{1/2}$ や圧力流束 \tilde{p} を改良し、低速流れ時に散逸量を与えることで、低速流れでも AUSM 族スキームが使用可能になった。AUSM⁺-up における質量流束 \dot{m} は以下の式で表される。

$$\dot{m} = M_{1/2} c_{1/2} \begin{cases} \rho_L & \text{if } |M| \geq 1 \\ \rho_R & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

式 (35) 中に使用されるパラメータは次式で表される。

$$M_{1/2} = M^+ + M^- + M_p, \quad (36)$$

$$M^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (37)$$

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\bar{\rho} c_{1/2}^2}, \quad (38)$$

$$c_{1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R), \quad (39)$$

$$\tilde{c}_L = c^{*2} / \max(c^*, V_n^+), \quad (40)$$

$$\tilde{c}_R = c^{*2} / \max(c^*, -V_n^-), \quad (41)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} H, \quad (42)$$

$$f_a = M_0(2 - M_0), \quad (43)$$

$$M_0^2 = \min\{1, \max(\bar{M}^2, M_{co}^2)\}, \quad (44)$$

$$\bar{M} = \frac{V_n^{+2} + V_n^{-2}}{2c_{1/2}^2} \quad (45)$$

ここで、 $K_p = 0.25$, $\sigma = 1.0$ を使用した。またカットオフマッハ数 M_{co} はユーザー指定のパラメータであり、本研究では、 $M_{co} = 0.01$ とした。

次に、圧力流束 \tilde{p} は、

$$\tilde{p} = \beta^+ p_L + \beta^- p_R + p_u, \quad (46)$$

$$\beta^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)) & \text{if } |M| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (47)$$

$$\alpha = \frac{3}{16} (-4 + 5f_a^2), \quad (48)$$

$$p_u = -K_u \beta^+ \beta^- (\rho_L + \rho_R) f_a c_{1/2} (V_n^- - V_n^+), \quad (49)$$

であり、 $K_u = 0.75$ とする。

3.1.2 HR-AUSM⁺-up

HR-AUSM⁺-up は、前節の AUSM⁺-up の圧力流束を改良したものである。低速流れに対して式 (46) は次式のように近似される。

$$\tilde{p} \rightarrow \frac{p_L + p_R}{2} + O(M^2) \frac{15}{16} (M_L p_L - M_R p_R) - O(M) K_u \frac{1}{4} 2\bar{\beta} c_{1/2}^2 (M_R - M_L) \quad (50)$$

式 (50) の右辺第 1 項は中心差分項、右辺第 2 項および第 3 項は散逸項である。ここで、低速流れとなる場合に式 (50) の右辺第 2 項は第 3 項よりも微小となるため、低速流れの場合に主要項となる第 3 項に制御パラメータ γ_{HR} を付与する。これによる圧力流束式は以下の式で表される。

$$\tilde{p} = \beta^+ p_L + \beta^- p_R + \gamma_{HR} p_u \quad (51)$$

式 (51) で用いられるパラメータはそれぞれ以下の式で表される。

$$\gamma_{HR} = \max(\gamma_{\min}, \gamma_2, \gamma_w) \quad (52)$$

ここで $\gamma_{\min} = 0.2$, $\gamma_2 = 0.2$ とし、 γ_w は以下の式で表される。

$$\gamma_w = \frac{1 - \text{sign}\{\min(\rho_L, \rho_R)\}}{2} \quad (53)$$

4. 自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法の混合手法

2 節で示した自乗量保存形差分は移流項を中心差分で評価するため、衝撃波等の不連続面では数値振動を引き起こし、超音速圧縮性流れの数値計算に対してはそのままでは適用できない。また、3 節で示した衝撃波捕獲法は不連続面に対しては有効であるものの、数値拡散が大きいと、一般に乱流場の計算には不向きであるという問題がある。そこで森西ら⁽⁵⁾ はこれらの問題を解決するために、圧縮性流れに対する自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法を衝撃波捕獲センサーである Ducros センサー⁽²⁰⁾ を介して混合することにより、低散逸性に優れ、不連続面でも安定した計算を可能とする数値計算手法を構築した。

本節では、森西らによって構築された混合スキームの構築方法および AUSM 族スキームにおける新たな混合手法の構築方法について示す。

4.1 混合スキームの種類

森西ら⁽⁵⁾ によって構築された自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法との混合手法としては、これまでに 3 つのタイプが提案されている。本節では、各混合手法の構築方法について、FVS 法を例として示す。その際、 ϕ_{DS} は、Ducros センサーによる判定値である。FVS 法の数値流束 $F_{i+1/2}^{FVS}$ は次式で与えられる。

$$F_{i+1/2}^{FVS} = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^R + F_{i+1/2}^L) - \frac{1}{2} \left[(R|\Lambda|R^{-1})_{i+1/2}^R Q_{i+1/2}^R - (R|\Lambda|R^{-1})_{i+1/2}^L Q_{i+1/2}^L \right] \quad (54)$$

なお、他の衝撃波捕獲法を用いた場合でも同様に混合スキームの構築が可能である。

4.1.1 数値拡散項付加タイプ

数値拡散項付加タイプは、自乗量保存形差分に衝撃波捕獲法の数値拡散項を付加するタイプの混合スキームである。式 (54) で示されるように、FVS 法による数値流束 $F_{i+1/2}^{FVS}$ は中心差分項と数値拡散項の和で表現される。混合スキームにおいては、センサーによって不連続面を検知し、右辺第 2 項の数値拡散項が通常の離散式に付加される形で混合スキームが構築される。運動量保存則 (粘性項、熱流束項無視、移流項の型は発散型) を例にとると、離散式は次式で表される。

$$\frac{d\rho u_i}{dt} + \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi_j} \left[(\rho J U^j) \overline{u_i^{c\xi^j}} \right] + \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} \left(\frac{J}{h_i} p \right)^{c\xi^i} + \phi_{DS,i} \frac{1}{J} \frac{\delta_c}{\delta_c \xi^i} (J F_i^{ND}) = 0 \quad (55)$$

数値拡散項付加タイプとして使用できるのは、中心差分項と数値拡散項の和で表現される FDS 法や FVS 法であり、そのままでは AUSM 族スキームに対して数値拡散項付加タイプを適用できない。そのため AUSM 族スキームとの混合手法を構築する際には、4.2 節で説明する混合スキームが用いられる。

4.1.2 数値流束混合タイプ

数値流束混合タイプは、自乗量保存形差分および衝撃波捕獲法のそれぞれで求められる数値流束を混合するタイプであり、次式で定義される。

$$F_{i+1/2} = [\phi_{DS} F^{FVS} + (1 - \phi_{DS}) F^{SCFD}]_{i+1/2} \quad (56)$$

ここで、 F^{FVS} は式 (54) で示される FVS 法を用いた場合の数値流束であり、 F^{SCFD} は自乗量保存形差分中の対流項と圧力項から評価される数値流束である。しかし数値流束混合タイプの場合は、中心差分に対応する数値流束を保存形で評価する必要があるため、移流項の型としては発散型のみが適用可能となる。

4.1.3 移流項混合タイプ

移流項混合タイプは移流項自身を混合するタイプであり、次式で定義される。

$$\left[\frac{\delta_c F}{\delta_c \xi} \right]_i = \left[\phi_{DS} \frac{\delta_c F^{FVS}}{\delta_c \xi} + (1 - \phi_{DS}) \frac{\delta_c F^{SCFD}}{\delta_c \xi} \right]_i \quad (57)$$

しかし移流項混合タイプの場合は、移流項自身を混合するため、センサーの値が変化する箇所では保存性が崩されることが確認されている⁽⁵⁾。

4.2 AUSM 族スキームの数値拡散項付加タイプの構築

前節で示したように、AUSM 族スキームの数値流束は中心差分項と数値拡散項の和で表現されていないため、そのままの形では自乗量保存形差分との混合スキームに対して数値流束混合タイプおよび移流項混合タイプのみが適用可能であった。しかし、数値流束混合タイプでは中心差分に対応する数値流束に発散型を用いる必要があるため、コンパクト差分の場合は不連続面以外における数値安定性が確保できず、また移流項混合タイプはセンサー

の値が変化する箇所では保存性が崩されるという問題がある。そこで、AUSM 族スキームに対しても数値拡散項付加タイプを適用することを考える。そのためには、質量流束項および圧力流束項それぞれを中心差分項と数値拡散項 (付加項) に分離する必要がある。

まず質量流束項について説明する。式 (34) 中の右辺第 1 項と第 2 項が質量流束項であり、これらを変形すると次式を得る。

$$F_{i+1/2}^{mass} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Phi^L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Phi^R = \frac{1}{2} \dot{m} (\Phi^L + \Phi^R) - \frac{1}{2} |\dot{m}| (\Phi^R - \Phi^L) \quad (58)$$

上式の右辺第 1 項が中心差分項、第 2 項が数値拡散項であり、第 2 項を自乗量保存形差分に付加することで AUSM 族スキームにおいても数値拡散項付加タイプが適用可能となる。また、式 (34) で数値流束が評価される衝撃波捕獲法ならば、質量流束項に関しては共通して、上式の数値拡散項を付加することにより数値拡散項付加タイプを構築することができる。

次に圧力流束項について説明する。圧力流束項も質量流束項と同様に、中心差分項と数値拡散項に分離することにより、数値拡散項付加タイプの構築が可能となる。AUSM⁺-up を例に圧力流束項から数値拡散項を抽出すると次式となる。

$$\tilde{p} = \beta^+ p_L + \beta^- p_R + p_u \quad (59)$$

$$= \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\beta_L - \beta_R}{2} (p_L - p_R) \textcircled{1} + (\beta_L + \beta_R - 1) \frac{p_L + p_R}{2} \textcircled{2} + p_u \textcircled{3} \quad (60)$$

式 (60) から、AUSM⁺-up では中心差分項と 3 つの付加項が抽出された。なお、HR-AUSM⁺-up の場合では、右辺第 4 項に制御パラメータ γ_{HR} を乗算したものとなり、式構造は変化しない。この中から適切な数値拡散項を選択して使用する必要がある。この過程については、後述する検証問題を用いて適切な付加項を決定する。

5. 検証問題と計算条件

本研究では、1 次元検証問題である衝撃波管問題を用いて、衝撃波捕獲性能および AUSM 族スキームにおける数値拡散項付加タイプの検証を実施する。また、2 次元検証問題である渦・衝撃波干渉問題を用いて混合スキームの低散逸性について検証する。

5.1 衝撃波管問題

衝撃波管問題は衝撃波捕獲性能を評価する代表的な検証問題であり、初期値の与え方によって数種類存在するが、本研究では密度、圧力、速度を不連続面の左右で次式のように与える Sod 問題⁽²¹⁾ を用いて検証を実施する。計算条件をまとめて表 1 に示す。

$$\begin{cases} U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1) & (x \leq 0.5) \\ U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1) & (x > 0.5) \end{cases} \quad (61)$$

Tab. 1: Numerical condition of Sod problem.

Computational region (L_1, L_2, L_3)	(1.0, 0.1, 0.1)
Number of grid (N_1, N_2, N_3)	(100, 3, 3)
Time increment, Δt	[-] 4.0×10^{-3}
Ratio of specific heat, γ	[-] 1.4
Prandtl number, Pr	[-] 0.71
Reynolds number, Re	[-] ∞
Mach number, M_0	[-] 3.0

Tab. 2: Numerical condition of shock-vortex interaction problem.

Computational region (L_1, L_2, L_3)	(4.0, 2.0, 0.1)
Number of grid (N_1, N_2, N_3)	(160, 80, 3)
Time increment, Δt	[-] 1.0×10^{-3}
Ratio of specific heat, γ	[-] 1.4
Prandtl number, Pr	[-] 0.71
Reynolds number, Re	[-] ∞
Mach number, M_0	[-] 1.1

5.2 渦・衝撃波干渉問題

渦-衝撃波干渉問題⁽²²⁾は衝撃波捕獲性能と不連続部以外での低散逸性の両立を確認するための2次元検証問題である。計算格子は L_2 および L_3 方向を等間隔とし、 L_1 方向は $0 \leq x \leq 2$ の範囲で \tanh 関数を用いて衝撃波面付近で密となるよう設定し、 $2 \leq x \leq 4$ の範囲では等間隔とする。また、無次元時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とする。計算条件をまとめて表2に示す。

初期条件はマッハ数 $M = 1.1$ の定常衝撃波面の左側に2次元渦を配置した流れ場であり、衝撃波面左側の物理量は以下のように与える。

$$\begin{aligned} U_L &= (\rho^L, u^L, v^L, w^L, p^L) \\ &= (1, 1.1\sqrt{\gamma}, 0, 0, 1) \quad (x \leq 1.0) \end{aligned} \quad (62)$$

衝撃波面右側の物理量は、式(62)で与えられる値からRankine-Hugoniotの式を用いて決定される。さらに、初期の2次元渦を次のように与え、衝撃波面の左から右に向かって移流させる。2次元渦の摂動 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{e})$ は以下のように与える。

$$\begin{cases} \tilde{u} = \varepsilon \tau \exp(1 - \tau^2) \sin \theta \\ \tilde{v} = -\varepsilon \tau \exp(1 - \tau^2) \cos \theta \\ \tilde{w} = 0 \\ \tilde{p} = -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2(1-\tau^2)\exp(2\alpha)}{4\alpha\gamma} \\ \tilde{S} = \ln \tilde{p}/\tilde{\rho} = 0 \end{cases} \quad (63)$$

ここで、 $\tau = r/r_c$ は渦の半径 r と渦度最大値における半径(臨界半径) r_c の比である。 ε は渦強さ、 a は渦の減衰率であり、本研究においては $\varepsilon = 0.3$ 、 $a = 0.204$ 、 $r_c = 0.05$ とする。また境界条件は、 L_1 方向に対してはノイマン境界条件、 L_2, L_3 方向に対しては周期境界条件を課す。

6. 検証結果

6.1 衝撃波管問題の検証結果

衝撃波管問題について、移流項の型に発散型、混合スキームのタイプとして数値流束混合タイプを適用した場合と移流項の型に混合型、混合スキームのタイプとして数値拡散項付加タイプを適用した場合の計算結果を示す。検証に用いた衝撃波捕獲法は3節で示したAUSM⁺-upであり、空間高次精度化手法として3次精度MUSCL法⁽²³⁾を用いている。付加項に式(60)の右辺第2項を用いた場合をCase 1(①)、右辺第3項を用いた場合をCase 2(②)、右辺第4項を用いた場合をCase 3(③)とし、右辺第2項と右辺第3項を用いた場合をCase 4(①+②)、右辺第3項と右辺第4項を用いた場合をCase 5(②+③)、右辺第4項と右辺第2項を用いた場合をCase 6(③+①)、そして右辺第2項から右辺第4項を用いた場合をCase 7(①+②+③)とした。また、混合スキームのタイプに数値流束混合タイプを適用した場合をCase 8とした。

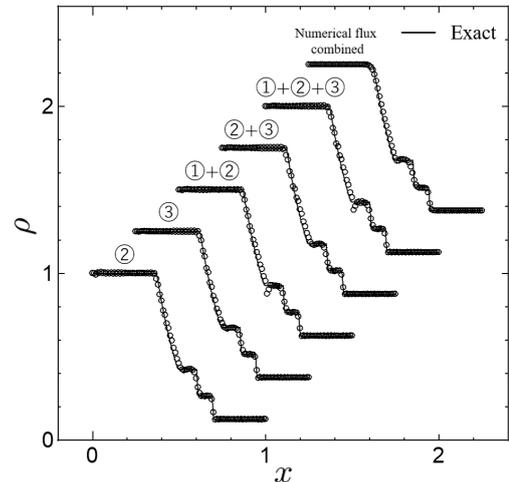


Fig. 1: Density profile of Sod problem by using different numerical dissipation addition cases for AUSM⁺-up.

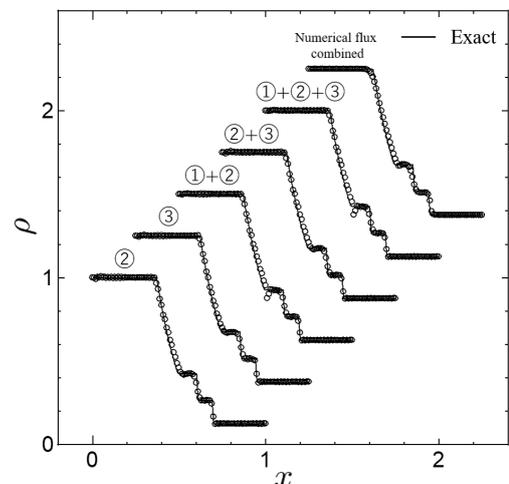


Fig. 2: Density profile of Sod problem by using different numerical dissipation addition cases for HR-AUSM⁺-up.

Tab. 3: Differences between numerical results and exact solution by using different numerical dissipation addition cases for AUSM⁺-up.

Case	Additional term	RMS value of error
1	①	Diverged
2	②	0.017003
3	③	0.015411
4	①+②	0.017798
5	②+③	0.018844
6	③+①	Diverged
7	①+②+③	0.019166
8	-	0.020987

Tab. 4: Differences between numerical results and exact solution by using different numerical dissipation addition cases for HR-AUSM⁺-up.

Case	Additional term	RMS value of error
1	①	Diverged
2	②	0.017003
3	③	0.014490
4	①+②	0.017798
5	②+③	0.017309
6	③+①	Diverged
7	①+②+③	0.018128
8	-	0.020645

無次元時間 $t = 1.1$ における各手法の密度分布を図 1 に示す。図 1 より、手法毎の密度分布に挙動の違いがほとんど見られないことが分かる。次に、厳密解と数値解との差の RMS 値を表 3 に示す。表 3 より、③ 項を付加した Case 3(③) の RMS 値が最も小さくなることが分かる。従って、数値拡散項付加タイプの方が AUSM⁺-up のオリジナルの形を使用できる数値流束混合タイプと比べて高精度な混合スキームのタイプであると言える。

本手法では、AUSM 族スキームの圧力流束に含まれる数値拡散が強い部分を抽出し離散式に付加することで、衝撃波面を鋭く捉えることが可能になり、高精度な衝撃波捕獲スキームとなった。本手法は、衝撃波捕獲性能が高精度であることに加えて、移流項の型に混合型が使用可能になるが、最適な数値拡散項を決定する際に、圧力流束式を変形し、付加項毎に精度検証を実施する必要がある。そこで、オリジナルの形を使用して高精度化された HR-AUSM⁺-up を用いて検証を実施した。その結果、RMS 値は 0.20645 となり、数値流束混合タイプを用いた AUSM⁺-up の RMS 値よりも小さい値となった。しかし、数値拡散項付加タイプを用いたものと比較すると、RMS 値が大きくなることが分かった。そのため、衝撃波捕獲性能では、数値拡散項付加タイプの AUSM⁺-up が最も優れていると言える。

HR-AUSM⁺-up は、オリジナルの形で高精度な衝撃波捕獲性能を示すが移流項の型が発散型に限られる。また、流れ場によっては発散型では高精度な計算が出来ないことも考えられる。そこで、この手法に対応した数値拡散項付加タイプを構築し検証計算を実施した。無次元時間 $t = 1.1$ における密度分布を図 2 に示し、厳密解と数値解との差の RMS 値を表 4 に示す。その結果、AUSM⁺-up の場合と同様に密度分布における挙動の違いがほとんど見られない。また、表 4 より厳密解と数値解との差の RMS 値は、③ 項を付加した Case 3(③) で最も小さくなることが分かる。この結果、今回検証に用いたスキームの中で最も優れた衝撃波捕獲性能のものは数値拡散項付加タイプの HR-AUSM⁺-up となった。

6.2 渦・衝撃波干渉問題の検証結果

次に、渦・衝撃波干渉問題を用いて行った混合スキームの検証結果について示す。本検証では、衝撃波捕獲法として AUSM⁺-up と HR-AUSM⁺-up を用い、自乗量保存形差分との混合手法のタイプとしては数値拡散項付加タイプと数値流束混合タイプを用いる。移流項の型は数値拡散項付加タイプでは混合型、数値流束混合タイプでは発散型とする。この場合、移流される渦の渦度自乗総和の時間履歴を図 3 に示す。初めに、混合手法の有無による考察を行う。混合手法を用いない(衝撃波捕獲法のみ使用する)場合、渦度が大きく減衰していることが分かる。一方、混合手法を用いる(自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法を混合する)場合、渦度の減衰が衝撃波面以外では抑制され低散逸であることが分かる。従って、自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法を混合することで高精度な計算が可能となる。

続いて、自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法を混合する

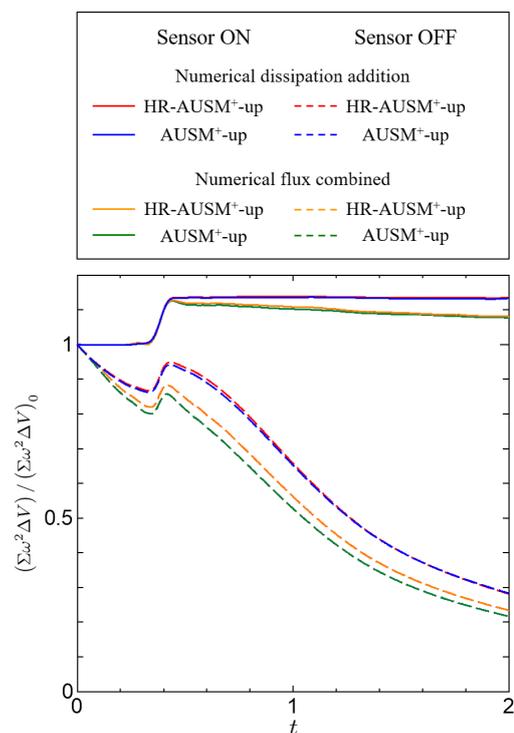


Fig. 3: Shock-vortex interaction problem.

手法の違いにより生じる差異について考察する。混合手法に数値流束混合タイプを用いた場合、混合しない場合よりも渦度の減衰が抑制しているものの微小な散逸が発生している。微小な散逸が発生する理由として、移流項の型に用いている発散型が、支配方程式の離散化に用いるコンパクト差分と相性が悪く、不連続面以外で数値安定性が確保できないためと考えられる。一方、混合手法に数値拡散項付加タイプを用いた場合、衝撃波面以外では散逸が発生しておらず、低散逸に計算ができていたことが分かる。そのため、混合手法に数値拡散項付加タイプを用いた混合スキームが最も高精度なスキームであると言える。

最後に、用いた AUSM 族スキームによる計算結果の違いについて考察する。自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法を混合しない場合の渦度の減衰は、AUSM⁺-up の方が HR-AUSM⁺-up よりも大きくなること分かる。これは、AUSM 族スキーム自身が持つ数値拡散による影響と言える。HR-AUSM⁺-up の数値拡散による減衰が抑制された原因は、圧力流束第 3 項に付加した制御パラメータ γ_{HR} による影響である。

7. 結言

乱流解析に適した衝撃波捕獲スキームを確立するため、自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法との混合手法を検討し、以下の知見を得た。

- (1) AUSM 族スキームに基づく数値拡散項付加タイプのスキームは、適切な数値拡散項を選択し付加することで高精度な計算が可能である。
- (2) HR-AUSM⁺-up に基づく数値拡散項付加タイプのスキームは、衝撃波捕獲性能に優れた手法である。
- (3) 自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法との混合手法を用いることで、高精度な計算が可能となる。
- (4) 数値拡散項付加タイプが最も優れた混合手法であり、より低散逸で圧縮性乱流解析に適した衝撃波捕獲スキームを与える。

参考文献

- (1) Roe, P. L., "Characteristic-based schemes for Euler equations," *Annual Review of Fluid Mechanics.*, 18 (1986), pp. 337-365.
- (2) Steger, J. L., Warming, R. F., "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods," *J. Comput. Phys.*, 40 (1981), pp. 263-293 .
- (3) Liou, M. S., Steffen, C. J., "A new flux splitting scheme," *J. Comput. Phys.*, 107 (1993), pp. 23-39.
- (4) 北村圭一, 嶋英志, AUSM 族スキームの新しい圧力流束: 極超音速空力加熱計算のための衝撃波安定, 全速度数値流束の開発に向けて, 第 24 回数値流体力学シンポジウム (2010), pp. 22-44.
- (5) 森西洋平, 小林直樹, 古賀和樹, "自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法の混合スキーム," 日本機械学会論文集 (B 編), 77-781 (2011), pp.1715-1730.
- (6) 森西洋平, "低マッハ数圧縮性流れの数値シミュレーションに対する移流項の型と自乗量保存形差分スキーム," 日本機械学会論文集 (B 編), 73-726 (2007), pp.451-458.
- (7) 森西洋平, "低マッハ数圧縮性流れの非定常数値計算に対する完全保存形差分スキーム," 日本機械学会論文集 (B 編), 75-759 (2009), pp.2153-2162.
- (8) Morinishi, Y., "Skew-symmetric form of convective terms and fully conservative finite difference schemes for variable density low-Mach number flows," *J. Comput. Phys.*, 229 (2010), pp. 276-300.
- (9) 北川大葵, 山田格, 玉野真司, 森西洋平, 自乗量保存形差分と衝撃波捕獲法との混合手法の検討, 第 32 回数値流体力学シンポジウム, 機械振興会館, 東京, 12 月 11 日-13 日, (2018), pp. 5-6.
- (10) Shima, E., Jounouchi, T., "設計における数値解析の活用について (その 12) - 一粒子的風上法とその検証 -," 航空宇宙技術研究所特別資料, 27 (1994), pp. 255-260.
- (11) Shima, E., Jounouchi, T., "Role of CFD in Aeronautical Engineering (No.14) - AUSM Type Upwind Schemes -," *Proc. 14th NAL symp. Aircraft Comput. Aerodynamics*, (1997), pp.7-12.
- (12) Shima, E., Kitamura, K., "On new simple low-dissipation scheme of AUSM-family for all speeds," *AIAA paper 2009-136*, (2009).
- (13) Kitamura, K., Shima, E., "Improvements of simple low-dissipation AUSM against shock instabilities in consideration of interfacial speed of sound," *Proceedings of ECCOMAS CFD 2010*, (2010).
- (14) Liou, M. S., "A sequel to AUSM, Part II:AUSM⁺-up for all speeds," *J. Comput. Phys.*, 214, (2006), pp. 137-170, .
- (15) 北村圭一, 橋本敦, HR-SLAU2 および HR-AUSM⁺-up: 高解像度非定常空力シミュレーションに向けて, 第 46 回流体力学講演会/第 32 回航空宇宙数値シミュレーション 技術シンポジウム論文集, 弘前文化センター, 青森, 7 月 3 日-4 日, (2014).
- (16) Morinishi, Y., Lund, T. S., Vasilyev, O. V., Moin, P., "Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow," *J. Comput. Phys.*, 143 (1998), pp. 90-124.
- (17) 森西洋平, "非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 1 報-第 3 報)," 日本機械学会論文集 (B 編), 62-604 (1996), pp.4090-4112.

- (18) Lele, S. K., “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution,” *J. Comput. Phys.*, 103 (1992), pp. 366-380.
- (19) 武市康太, 森西洋平, “混合型移流項を用いたコンパクト差分による圧縮性流れの LES,” 第 24 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (2010).
- (20) Ducros, F., Ferrand, V., Nicoud, F., Weber, C., Darracq, D., Gacherieu, C., Poinso, T., “Large-eddy simulation of the shock/turbulence interaction,” *J. Comput. Phys.*, 152 (1999), pp. 517-549.
- (21) Sod, G. A., “A survey of several finite difference method for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws,” *J. Comput. Phys.*, 27 (1978), pp. 1-31.
- (22) Lo, S. C., Blaisdell, G. A., Lyrintzis, A. S., “High-order shock capturing schemes for turbulence calculations,” *AIAA paper 2007-827*, (2007).
- (23) Van Leer, B., “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method,” *J. Comput. Phys.*, 32 (1979), pp. 101-136.