第 33 回数値流体力学シンポジウム
講演番号 D04-1

高次精度 DG 法におけるエイリアシングの理解

Study of aliasing errors for high-order DG methods

○ 淺田啓幸，立命館大, 滋賀県草津市野路東 1-1-1, E-mail：<h-asada@fc.ritsumei.ac.jp>
Hiroyuki Asada, Ritsumeikan University, 1-1-1, Noji-higashi, Kusatsu, Shiga

Study of aliasing errors for high-order discontinuous Galerkin (DG) methods is presented through the Fourier analysis. The high-order DG method has not only physical mode but also unphysical mode. The combined mode consisting of both physical and unphysical mode is first analyzed, and it is shown that the unphysical mode dominates for high wave number. This combined mode aliases with Nyquist angular frequency of π because it is constant in each computational cell, and the aliased combined mode is used to reconstruct the DG solution. Due to this aliasing, the unphysical mode in the high wave number regime affects the solution in the low wave number regime. This behavior results in large amplitude of low wave number in the DG solution for the wave with wide range spectrum.

1. 緒論

数値流体力学 (CFD) における重要課題の１つは，複雑形状まわりの高精度な乱流解析と言われている．複雑形状まわりの解析には，有限体積法による非構造格子法が広く用いられている．一方，複雑な非定常乱流解析には，large eddy simulation (LES) による解析が望ましい．しかし，有限体積法は高次精度化が困難であり [1, 2, 3]，細かい渦を計算格子で直接解像する LES には不適という問題が生じる．

それに対し，Discontinuous Galerkin (DG) 法は，高次精度非構造格子法の１つとして注目されている [4, 5]．DG 法では，計算セル内部に自由度と基底関数を導入し，それらの積の和としてセル内部の物理量分布を表現する．高次精度化は，基底関数の数と次数，および対応する自由度の数を増加させることで容易に達成される．また，セル境界面の物理量は，セル内部の物理量分布から直接再構築できるため，隣接セルの情報を必要とせず，従来の有限体積法にはないコンパクト性を実現できる．一方，DG 法の欠点は高い計算コストと言われているが，高次精度化に伴い高解像度に必要な計算格子数も削減され，結果的には空間精度が低い有限体積法よりも高速な解析が可能と言われている [6, 7]．また，コンパクト性のおかげで，DG 法はスパコンによる大規模並列計算にも適している [8]．

DG 法による LES 解析では，主に implicit LES (ILES) が用いられてきた．通常の LES では格子で解像できない渦スケールを sub-grid-scale (SGS) モデルを用いてモデル化するが，ILES では SGS モデルを用いずに計算スキームに内蔵する数値粘性で代替する [9, 10]．DG 法の数値散逸 (dissipation) は，低波数には高次精度化に伴い小さくなると同時に，高波数には大きくなるため，ILES に適していると言われている [11, 12]．実際，DG 法を用いた ILES 解析は複数報告されており，非定常乱流の高精度解析が実現されている [13, 14, 11]．しかし，これらは比較的低いレイノルズ数に対してであり，高レイノルズ数では数値的に不安定になるという問題が生じる．この不安定性の原因には，小さな dissipation とエイリアシングと言われている [15, 16] が，前者はこれまで言われてきたことと矛盾し，後者に至っては DG 法におけるその原理さえも分かっていない．すなわち，DG 法の基本的な性質は未だ不明瞭であり，安定な ILES を実現するためにはこの基本的な性質を明確にする必要がある．

数値スキームの理解には，フーリエ解析が便利である．フーリエ解析では，修正波数 (modified wave number) を求めて，数値分散 (dispersion) と数値散逸 (dissipation) を求める．先で述べた DG 法の特性 (高波数で大きな dissipation) は，このフーリエ解析で求められたものである．DG 法のフーリエ解析は，Hu らによって初めて行われ [17]，その後多くの文献でも参照されている [11, 18, 19]．しかし，その多くが物理的モードのみを考慮しており，セル内部に自由度と基底関数を導入したことで生じる非物理的モードを考慮していない．それに対し，近年では Asthana と Jameson [20] や Alhawwary と Wang [21] によって，非物理的モードを考慮したフーリエ解析が行われ，高波数であるほど非物理的モードの影響が大きく無視できないことが示されている．だが，エイリアシングの原理については言及されていない．セル内部に分布をもつため，波数を有限体積法の $(p+1)$ 倍 ($p+1$ は空間精度) まで議論することが多いが，実際のところはナイキスト波数でさえも不明瞭である．実際，DG 法はセル内部に物理量の分布をもつと言えど，基底関数の係数である自由度はセル内部で一定であるため，自由度は有限体積法と同等のナイキスト波数でエイリアシングが生じるはずである．更に，このエイリアシングした自由度を用いて最終的な DG 法の解 (セル内の物理量分布) が再構築されるため，この影響は大きいと考えられる．

本研究では，フーリエ解析を通して，DG 法おけるエイリアシングの理解を目指す．簡単のため，1 次元線形スカラー移流方程式に対してフーリエ解析を行う．まず，非物理的モードまで考慮した combined mode の dispersion および dissipation を求め，この波が自由度の段階でどのようにエイリアシングするかを明らかにする．その後，そのエイリアシングした自由度がどのように再構築され最終的な DG 法の解が決定されるかを明らかにする．

2. フーリエ解析方法

1 次元移流方程式は以下の式で与えられる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

u はスカラー変数，c は移流速度である．本研究では $c = 1$ とする．DG 法では，基底関数 ϕ_m と自由度 u_m を用いてセル内部の物理量分布を表現する．

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{N_{DOF}} u_m(t)\phi_m(x). \tag{2}$$

下添字 m は基底関数および自由度のインデックスである．本研究では，Sherwin と Karniadakis による階層的直交基底関数 [22] を用いる．基底関数の直交性は以下のように表される．

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_l\phi_m\,dx = I_l\delta_{lm}. \tag{3}$$

$x_1 \le x \le x_2$ は計算セル内部であり，δ_{lm} はクロネッカーのデルタである．自由度の数 N_{DOF} は空間精度に依存し，1 次元の場合は $N_{DOF} = p$ (p は基底関数の最大次数，$p+1$ は空間精度) となる．

Copyright © 2019 by JSFM

基底関数 ϕ_l をテスト関数として移流方程式 (12) をセル内で積分すると

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_l \frac{\partial u}{\partial t} dx + [\phi_l u^*]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} u \, dx = 0. \tag{4}$$

ただし，$c = 1$ であるから c を無視し，部分積分を用いた．u^* は数値流束であり，ここでは風上的に評価する．すなわち，第 2 項を展開すると

$$[\phi_l u^*]_{x_1}^{x_2} = \phi_{l,x_2} u_{x_2} - \phi_{l,x_1} u_{x_1}^{-}. \tag{5}$$

上添字 $-$ は左隣のセルを表している．DG 法の再構築式 (2) を式 (4) の各項に代入し，基底関数の直交性 (3) を第 1 項に用いると

$$\sum_m \left[I_l \frac{\partial u_m}{\partial t} \delta_{lm} + \phi_{l,x_2} \phi_{m,x_2} u_m - \phi_{l,x_1} \phi_{m,x_1}^{-} u_m^{-} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \phi_m u_m \, dx \right] = 0. \tag{6}$$

今，自由度の解として 1 つのフーリエモード $u_m = \hat{u}_m \exp[i(kx_g - \omega t)]$ を考える．i は虚数単位，k は波数，ω は周波数，x_g はセル中心の座標である．左隣のセルに対しては $u_m^{-} = u_m \exp[-ik\Delta x]$ となる．これらを式 (6) に代入すると，

$$\sum_m \left[-iI_l \omega \delta_{lm} + \phi_{l,x_2} \phi_{m,x_2} - \phi_{l,x_1} \phi_{m,x_1}^{-} \exp[-ik\Delta x] - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \phi_m \, dx \right] u_m = 0.$$

これは，以下のような固有値問題になる．

$$\left[\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-} - \boldsymbol{R} \right] \hat{\boldsymbol{U}} = i\omega \hat{\boldsymbol{U}}. \tag{7}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{U}}$ は $\hat{u}_j$ を成分とするベクトルであり，各行列の成分は以下のように表される．

$$\begin{aligned} P_{lm} &= \frac{1}{I_l} \phi_{l,x_2} \phi_{m,x_2}, \\ P_{lm}^{-} &= \frac{1}{I_l} \phi_{l,x_1} \phi_{m,x_1}^{-} \exp[-ik\Delta x], \\ R_{lm} &= \frac{1}{I_l} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \phi_m \, dx. \end{aligned}$$

固有値 $i\omega$ および固有ベクトル $\hat{\boldsymbol{U}}$ は自由度の数 N_{DOF} だけ得られる．すなわち，複数の波が存在し，各波の強さを λ_m とすると，合成波は以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{U} = \sum_m \lambda_m \hat{\boldsymbol{U}}_m \exp\left[i(kx_g - \omega_m t) \right]. \tag{8}$$

λ_m は，初期値から得られる以下の連立一次方程式を解くことで求められる．

$$\sum_m \lambda_m \hat{\boldsymbol{U}}_m \exp\left[ikx_g \right] = \boldsymbol{U}_{initial}.$$

固有値 ω_m は虚数であり，修正波数 (modified wave number) と呼ばれる．これを $\omega_m = \omega_r + i\omega_i$ とすると，

$$\boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{U}} \exp[\omega_i t] \exp[i(kx_g - \omega_r t)], \tag{9}$$

となり，ω_r が数値的な移流速度 (dispersion)，ω_i が数値的な散逸 (dissipation) を表していることが分かる．dispersion と dissipation の解析解はそれぞれ k と 0 であり，これと比較することで数値スキームの性能が評価できる．前述したように，DG 法には複数の波 (モード) が存在し，それぞれに対して dispersion と dissipation を得る．低波数の領域では，複数のモードの中でも解析解に近い物理的モードが支配的となるが，高波数の領域では，それ以外の非物理的モードの影響が大きくなり無視できなくなる．すなわち，全てのモードを含めた combined mode に対する解析が必要であり，本研究ではその combined mode に対してエイリアシング発生原理の理解を目指す．

3. 解析結果と考察

3.1 物理的モードと非物理的モード

簡単のため，空間 3 次精度 DG 法について考える．図 1 に，dispersion と dissipation を示す．横軸はセル内の角周波数 $k\Delta x$ であり，他の文献と同様に -3π から 3π までを考えた．自由度の数は $N_{DOF} = 3$ であるため，3 つの dispersion と dissipation が得られ，低波数において解析解に近いものが物理的モード，それ以外のものが非物理的モードである．物理的モードの dispersion は高波数において解析解から外れるが，同時に大きな dissipation がかかり急激に減衰する．この高波数での大きな dissipation が ILES に適していると言われていた．一方，非物理的モードは物理的モードと全く異なる挙動を示す．dispersion は正の波数であっても負に成る場合があり，波が逆走することを示している．また，高波数では dissipation が小さくなり，ILES への適性とは真逆である．そのため，特に高波数領域において，物理的モードのみならず非物理的モードを考慮することは重要であるといえる．

図 2 に，物理的モードと非物理的モードの合成波である combined mode の絶対値，dispersion および dissipation を示す．ただし，3 つの自由度の内，1 番目の自由度 u_1 について示し，比較のため物理的モードと非物理的モードも合わせて示した．dispersion と dissipation は以下の様に計算した．

$$\text{dispersion} = \frac{d\angle u_i}{dt}, \ \text{dissipation} = \frac{d \ln(|u_i|)}{dt}. \tag{10}$$

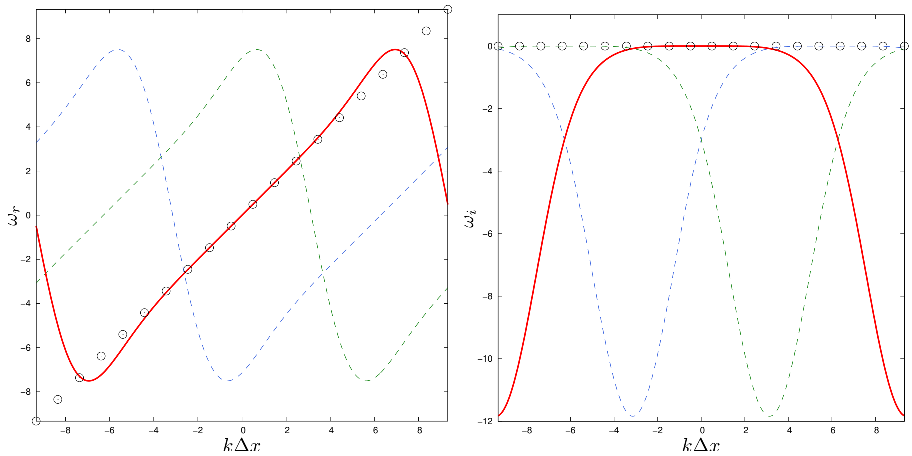
時間微分は 6 次精度中心差分で評価し，時間変動が大きいため平均値を示した．絶対値を見ると，低波数では物理的モードが支配的であり波数の増加とともに減衰していくが，ある程度高波数になると非物理的モードが支配的となり逆に減衰しにくくなることが分かる．この物理的モードと非物理的モードの切り替わりは，dispersion および dissipation でもうかがえる．特に，dispersion が非物理的モードへの切り替わりと同時に急激に解析から外れ，符号が逆転することには留意すべきである．また，dissipation は非物理的モードが原因で高波数において小さくなり，物理的モードのみでは見られた ILES への適性が，この場合は見られないことが分かる．なお，ここでは示さないが，他の自由度 u_2, u_3 についても同様の傾向が見られた．

ここまでの議論は，非物理的モードを解析した過去の文献と同様である [20, 21]．しかし，エイリアシングについては議論していない．上記の combined mode はいわば自由度であるため，セル内で一定であり，有限体積法と同様にナイキスト角周波数 π でエイリアシングが生じるはずである．以降は，この考えのもと combined mode のエイリアシングおよび再構築までの過程について議論する．

3.2 エイリアシングの原理

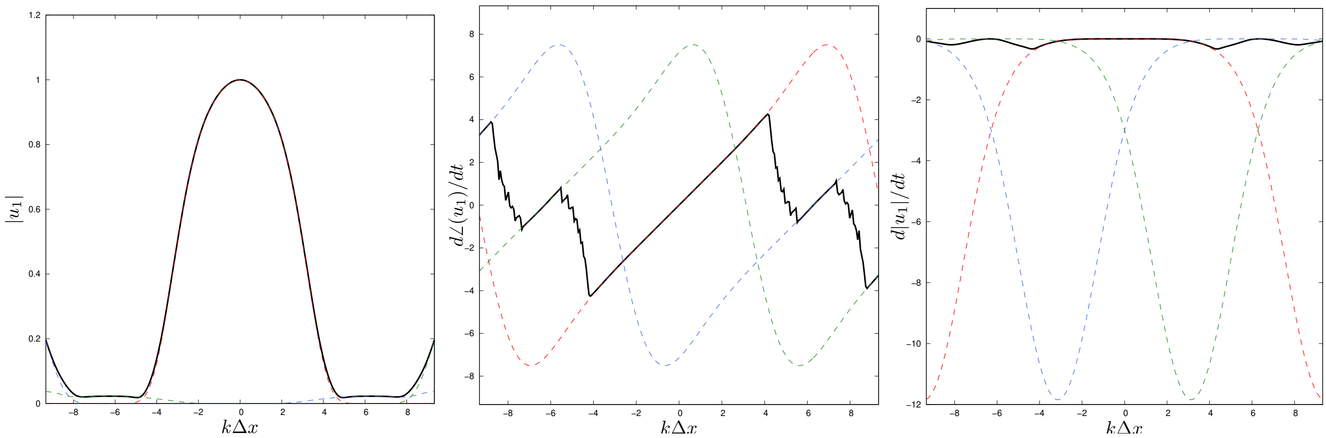
エイリアシングの原理を理解するために，図 3 に角周波数方向 (横軸方向) に $2n\pi$ (n は整数) シフトした combined mode の絶対値を示す．ただし，図 2 と同様に 1 番目の自由度 u_1 について示した．また，考慮している波数が -3π から 3π であるため，ラインが途中で途切れている

 Copyright © 2019 by JSFM



(a) Dispersion (b) Dissipation

Fig. 1: Dispersion and dissipation of third-order DG method. Red line : mode1; blue line : mode2; green line : mode3; solid line : physical mode; dashed line : unphysical mode.



(a) Amplitude ($t/\Delta x = 5$) (b) Dispersion (average) (c) Dissipation (average)

Fig. 2: Amplitude, dispersion and dissipation of third order DG method. First DOF u_1. Black solid line : combined mode; red dashed line : mode1 (physical mode); blue dashed line : mode2 (unphysical mode); green dashed line : mode3 (unphysical mode).

が，以降の議論に支障はない．この図の横軸は出力される角周波数 $k_o\Delta x$ である．そのため，入力の角周波数 $k_i\Delta x$ との関係を明らかにするために，ある入力角周波数におけるケースをシンボルで表した．例えば，$k_i\Delta x = 0.8\pi$ は $\times$ のシンボルで示している．この場合，出力の角周波数は $k_o = \pm 0.8\pi$ だけでなく，$2n\pi$ シフトしたライン上の $k_o = 0.8\pi \pm 2n\pi$ も合わせて存在する．しかし，ナイキスト角周波数は $k_{Ny}\Delta x = \pi$ であるため，実際には $-\pi \leq k\Delta x \leq \pi$ の範囲にあるものが出力角周波数となり，結局のところシフトしていない $k_o = \pm 0.8\pi$ が出力される．つまりエイリアシングは生じない．一方，$*$ のシンボルで示した $k_i = 1.8\pi$ の時は，$k_o = 1.8\pi \pm 2n\pi$ の内，ナイキスト角周波数内に存在するのは 2π シフトした $k_o = 0.2\pi, -0.2\pi$ である．すなわち，入力の角周波数と異なる角周波数が出力される．これがエイリアシングの原理である．同様のことが $k_i = 2.8\pi$($\bullet$ のシンボル) でも生じる．

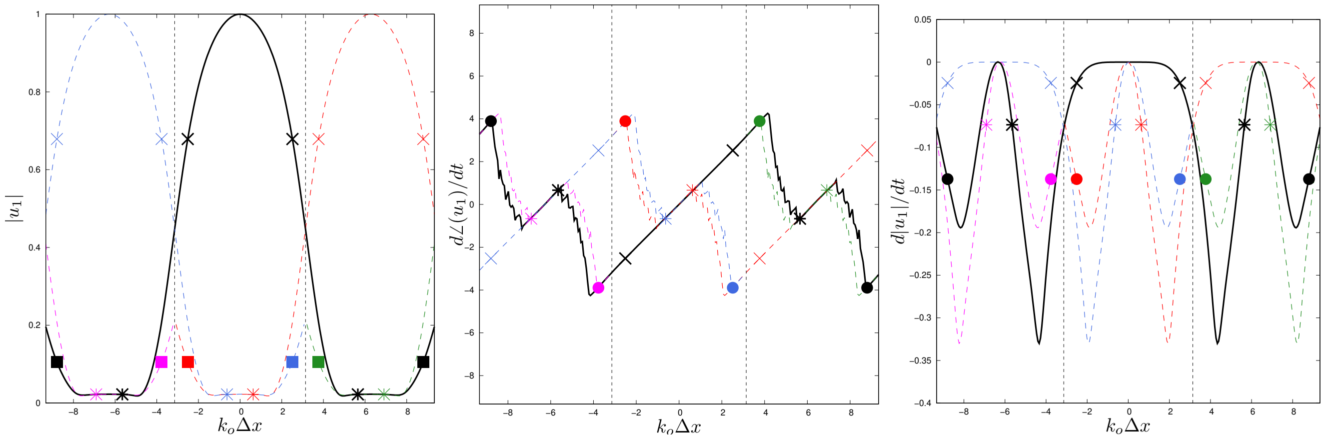
このエイリアシングした combined mode を用いて最終的な DG 法の解が再構築される．ただし，この波 (combined mode) は，セル内で一定でありセル境界面で不連続となる．この不連続の波 $u_i^{\#}$ は以下のように表される．

$$u_{i,k}^{\#} = u_{i,k}E_k, \quad E_k = \frac{1}{N_p}\frac{1-\exp[-ik\Delta x]}{1-\exp[-ik\Delta x/N_p]}. \tag{11}$$

N_p は，再構築を行う点の数である．ここでは，フーリエ変換を行うことを考慮して，セル内で等間隔にとった内点で再構築を行い，$N_p = 3$ とする．また，簡単のため，角周波数ではなく波数で考え，下添字に k を用いた．なお，式 (11) は，離散フーリエ変換 (DFT) の公式を鑑みれば導出できる．再構築は，この不連続の自由度と基底関数の積の和として行われ，波数空間では畳み込みで表される．

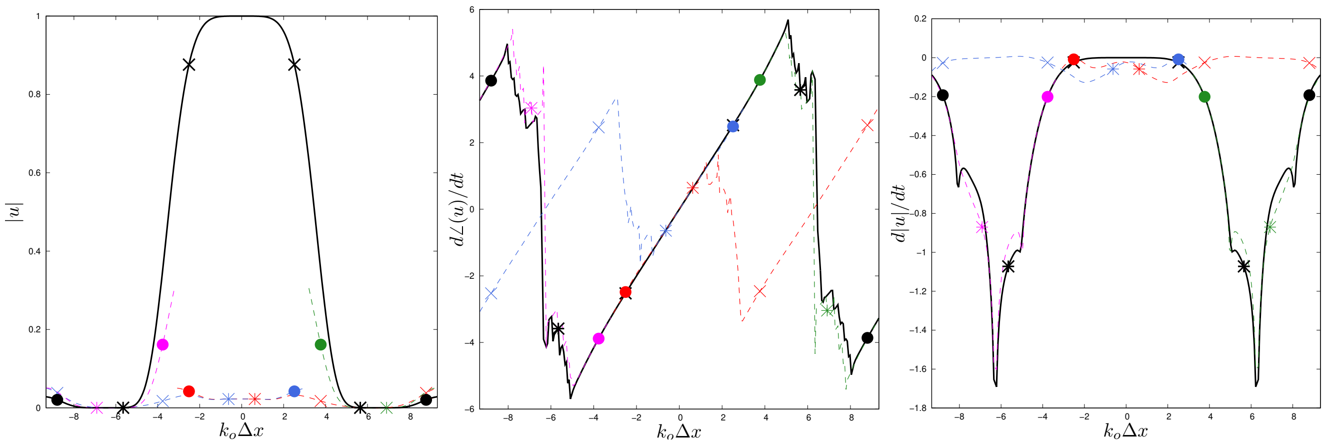
$$u_{rec,k} = \sum_i u_{i,k}^{\#} * \mathcal{F}[\phi_i]_k = \sum_i \sum_l u_{i,k-l}E_{k-l}\mathcal{F}[\phi_i]_l. \tag{12}$$

Copyright © 2019 by JSFM



(a) Amplitude ($t/\Delta x = 5$) (b) Dispersion (average) (c) Dissipation (average)

Fig. 3: Aliasing of DOF for third order DG method. To clarify the aliasing mechanism, $2n\pi$ shifted lines in the wave number direction are shown. Black solid line: no shift; red dashed line: 2π shift; blue dashed line: -2π shift; green dashed line: 4π shift; purple dashed line: -4π shit. The symbols indicate the solution for certain input; $\times : k_{in}\Delta x = 0.8\pi$; $* : k_{in}\Delta x = 1.8\pi$; $\bullet : k_{in}\Delta x = 2.8\pi$.



(a) Amplitude ($t/\Delta x = 5$) (b) Dispersion (average) (c) Dissipation (average)

Fig. 4: Reconstructed solution of third order DG method for single wave number. To clarify the aliasing mechanism, $2n\pi$ shifted lines are shown as Fig. 3. Black solid line: no shift; red dashed line: 2π shift; blue dashed line: -2π shift; green dashed line: 4π shift; purple dashed line: -4π shit. The symbols indicate the solution for certain input; $\times : k_{in}\Delta x = 0.8\pi$; $* : k_{in}\Delta x = 1.8\pi$; $\bullet : k_{in}\Delta x = 2.8\pi$.

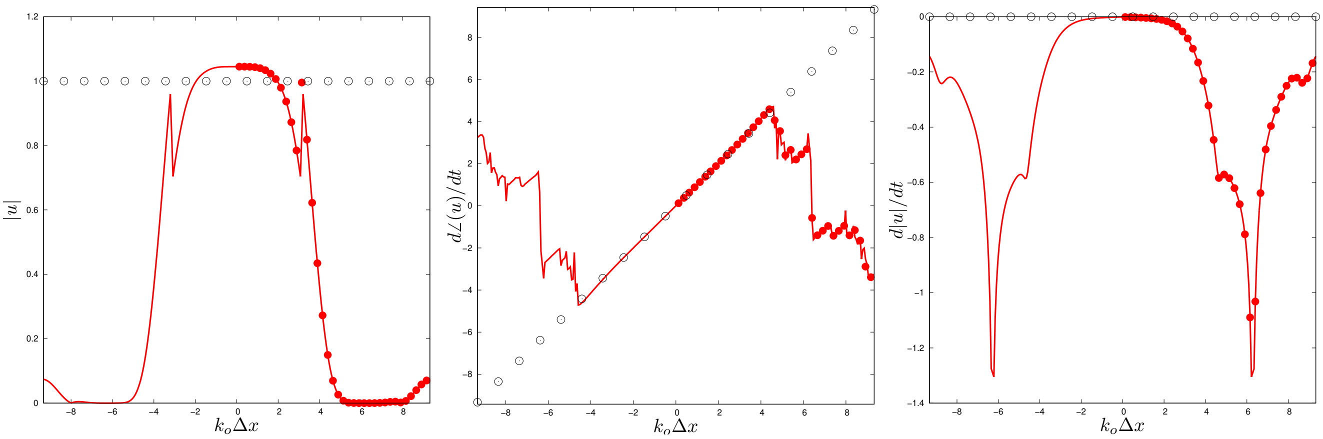
$*$ は畳み込み，$\mathcal{F}$ はフーリエ変換を示している．波数空間における基底関数 (スペクトル) は，フーリエ変換の公式で解析的に求まるが，波数が無限大まで存在しエイリアシングが生じるため，N_p を決めた上で DFT により数値的に求める．基底関数はどのセルにおいても同じ値をとり周期的であるから，波数空間ではセル内の波数が 1 ごと，すなわち計算領域全体ではセル数 N ごとに値を持つ．更に，自由度 u_i は図 3 で見たように，角周波数の周期が 2π，すなわち波数の周期がセル数 N であるから，式 (12) は以下のように簡略化できる．

$$u_{rec,k} = \sum_i u_{i,k} \sum_{l=1}^{N_p} E_{k-Nl} \mathcal{F}[\phi_i]_l = \sum_i u_{i,k} E_k^{\#}. \quad (13)$$

すなわち，combined mode である自由度 $u_{i,k}$ に係数 $E_k^{\#}$ を掛けて足し合わせたものが，波数空間における再構築解となる．内点を設けたことによりナイキスト波数は，自由度の場合と比べて N_p 倍されている．したがって，図 3 において $k_i = 1.8\pi, 2.8\pi$ で生じていたエイリアシングが再構築により生じなくなる．しかし，$2n\pi$ シフトされた波数が消滅するわけではなく，同時に複数の波数が存在するようになる．つまり，自由度のエイリアシングによる影響は，内点を設けた再構築においても影響し続ける．

図 4 に，DG 法による最終的な再構築解の絶対値，dispersion および dissipation を示す．図 3 と同様に，入力角周波数と k_i と出力角周波数 k_o の関係をシンボルで表しており，$-3\pi \le k_i \le 3\pi$ の入力角周波数のみを考えているためラインが途切れている．$k_i = 0.8\pi$($\times$ のシンボル) の場合，$k_o = \pm 0.8\pi, \pm 1.2\pi, \pm 2.8\pi$ が出力され，自由度のエイリアシングにより本来の出力角周波数に加え偽の角周波数が存在するようになる．その偽の角周波数は，解析解とは異なる dispersion をもち，dissipation が小さ

Copyright © 2019 by JSFM



(a) Dispersion　　(a) Dispersion　　(b) Dissipation

Fig. 5: Reconstructed solution of third order DG method for multiple wave number. Red line : Fourier analysis; red circle : calculation; unfilled circle : exact.

く減衰しにくい．しかし，絶対値は小さく，解に大きな影響は与えない．これは，セル境界面で不連続 (低波数であるため僅かに) であることを示していると考えられる．$k_i = 1.8\pi$($*$ のシンボル) では，本来の出力角周波数を持つ波の絶対値が小さく，偽の低い角周波数による波の方が大きくなる．その偽の波の dispersion は意外にもその波数における解析解とよく一致し，dissipation も小さい．しかし，あくまでも偽の周波数であり解析解とは大きく異なる．$k_i = 2.8\pi$($\bullet$ のシンボル) では，更に偽の低波数の支配率が大きくなる．これは，combined mode の内在する非物理的モードが高波数で強くなるためである．その影響は自由度のエイリアシングにより，偽の低波数として現れるのである．偽の低波数による波は，その波数に対する解析解に近い dispersion をもつが，やはり波数そのものが異なるため解析解からとは大きく異なる．

入力波数に対して複数の波数が出力されるため，最終的な DG 法の解が理解しづらい．そこで，$-3\pi \leq k_i\Delta x \leq 3\pi$ の各波数を持った波 $\sum_j \exp[ik_jx_g]$ を入力として考える．この入力に対する解は，図 4 において各ラインで示される解を足し合わせたものになり，これの絶対値，dispersion および dissipation を図 5 に示す．絶対値を見ると，非物理的モードおよび自由度のエイリアシングの影響で，明らかに低波数で悪影響が生じている．本来であれば十分に解像されているはずの低波数で解析解よりも大きな絶対値をもち，急激な変化もうかがえる (この急激な変化は波数を -3π から 3π の範囲で考えているためである)．この低波数領域では dispersion と dissipation は解析解に近いが，余分な強さを持っていると言える．また，高波数でも非物理的モードの影響で少しの絶対値をもつ．この波は非物理的な dispersion をもち，dissipation も小さいため，解に悪影響を与え続けると考えられる．なお，DG 法による数値解 (実際に移流方程式を解き，DFT をかけたもの) も合わせて示しているが，これにより本解析の妥当がうかがえる．

4.　結論

1 次元移流方程式に対するフーリエ解析を通して，高次精度 discontinuous Galerkin (DG) 法におけるエイリアシング原理の理解を試みた．物理的モード以外にも非物理的モードも考慮した combined mode に対して解析を行い，高波数で非物理的モードの影響が大きいことを示した．その combined mode は自由度であり，セル内で一定であるため，ナイキスト角周波数 π でエイリアシングが生じる．エイリアシングした自由度は DG 法の再構築解に用いられ，高波数で影響していた非物理的モードは偽の低波数となって現れることが明らかになった．これは，幅広いスペクトルをもつ波を解析すると，低波数に影響が出やすいことを示しており，不安定性の要因になり得る．今後は，更に高波数まで考慮した場合や，多次元の場合についても解析を行い，それらの知見を踏まえてエイリアシング低減方法の追求を目指す．

参考文献

(1) T. J. Barth. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. In *In AGARD, Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows 61 p (SEE N92-27671 18-34)*, 1992.

(2) R. Abgrall. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, No. 1, pp. 45–58, 1994.

(3) O. Friedrich. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of computational physics*, Vol. 144, No. 1, pp. 194–212, 1998.

(4) W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.

(5) B. Cockburn and C-W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws 2 : General framework. *Math. Comp*, Vol. 52, pp. 411–435, 1989.

(6) Z. J. Wang. High-order methods for the Euler and Navier–Stokes equations on unstructured grids. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 1–41, 2007.

(7) Z. J. Wang, K. Fidkowski, R. Abgrall, F. Bassi, D. Caraeni, A. Cary, H. Deconinck, R. Hartmann, K. Hillewaert, H. T. Huynh, et al. High-order CFD methods: current status and perspective. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 72, No. 8, pp. 811–845, 2013.

Copyright © 2019 by JSFM

(8) R. Biswas, K. Devine, and J. E. Flaherty. Parallel adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 14, pp. 255–284, 1994.

(9) J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran, and R. L. Kolbe. New insights into large eddy simulation. *Fluid dynamics research*, Vol. 10, No. 4-6, p. 199, 1992.

(10) Pierre Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction.* Springer Science & Business Media, 2006.

(11) C-C. Wiart, K. Hillewaert, L. Bricteux, and G. Winckelmans. Implicit LES of free and wall-bounded turbulent flows based on the discontinuous Galerkin/symmetric interior penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 78, No. 6, pp. 335–354, 2015.

(12) R. C. Moura, S. J. Sherwin, and J. Peiró. Linear dispersion–diffusion analysis and its application to under-resolved turbulence simulations using discontinuous galerkin spectral/hp methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 298, pp. 695–710, 2015.

(13) A. Uranga, P-O Persson, M. Drela, and J. Peraire. Implicit large eddy simulation of transition to turbulence at low Reynolds numbers using a discontinuous Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 87, No. 1-5, pp. 232–261, 2011.

(14) F. Bassi, L. Botti, A. Colombo, A. Crivellini, A. Ghidoni, and F. Massa. On the development of an implicit high-order Discontinuous Galerkin method for DNS and implicit LES of turbulent flows. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, Vol. 55, pp. 367–379, 2016.

(15) G. J. Gassner and A. D. Beck. On the accuracy of high-order discretizations for underresolved turbulence simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 27, No. 3-4, pp. 221–237, 2013.

(16) F. Hindenlang, G. J. Gassner, C. Altmann, A. Beck, M. Staudenmaier, and C.-D. Munz. Explicit discontinuous galerkin methods for unsteady problems. *Computers & Fluids*, Vol. 61, pp. 86–93, 2012.

(17) F. Q. Hu, M. Y. Hussaini, and P. Rasetarinera. An analysis of the discontinuous galerkin method for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 151, No. 2, pp. 921–946, 1999.

(18) M. Ainsworth. Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous galerkin finite element methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 198, No. 1, pp. 106–130, 2004.

(19) F. Q. Hu and H. L. Atkins. Eigensolution analysis of the discontinuous galerkin method with nonuniform grids: I. one space dimension. *Journal of Computational Physics*, Vol. 182, No. 2, pp. 516–545, 2002.

(20) K. Asthana and A. Jameson. High-order flux reconstruction schemes with minimal dispersion and dissipation. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 62, No. 3, pp. 913–944, 2015.

(21) M. Alhawwary and Z. J. Wang. Fourier analysis and evaluation of dg, fd and compact difference methods for conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Vol. 373, pp. 835–862, 2018.

(22) S. J. Sherwin and G. E. Karniadakis. Spectral/hp element methods for CFD, 1999.

Copyright © 2019 by JSFM