第 33 回数値流体力学シンポジウム
D12-3

埋め込み境界射影法に基づく任意形状すべり壁面上の流れの数値計算手法

Immersed boundary projection method for the incompressible Navier-Stokes equation with arbitrarily shaped slip boundaries

○ 藤井 健博, 阪大院, 吹田市山田丘 2-1, E-mail：fujii@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
大森 健史, 阪大工, 吹田市山田丘 2-1, E-mail：t.omori@mech.eng.osaka-u.ac.jp
梶島 岳夫, 阪大工, 吹田市山田丘 2-1, E-mail：kajishima@mech.eng.osaka-u.ac.jp
Takehiro FUJII, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan
Takeshi OMORI, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan
Takeo KAJISHIMA, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

The prediction of the flow confined by arbitrarily shaped walls with slip velocity plays a significant role in the design of microfluidic or nanofluidic devices. In the framework of the immersed boundary projection method, the boundary force is determined to satisfy the no-slip condition in the same way that the pressure is obtained to satisfy the divergence-free constraint in the fractional step method. We extend this method to simulations of the flows with slip boundaries by introducing a new regularization operator which allows the continuous velocity gradient on the immersed boundaries. To validate this method, the channel flows confined by the slip immersed boundaries are computed. The resulting velocity profile shows a good agreement with tha analytical solution.

1. 緒言

近年のマイクロ・ナノ流体工学の進展に伴い, 複雑な流路内での流動解析において，壁面上でのすべり速度を含めて解析することの重要性が高まってきている．そのため，任意形状のすべり壁面上の流れの計算手法が必要となる．

任意形状物体表面を含む流れの計算手法として，境界適合格子を用いる手法は表面に沿った格子を生成することで物体表面での境界条件を直接適用できる．その反面, 物体表面が複雑な形状をしている場合などには，空間離散化が複雑になり，表面が変形する場合には格子を再生成する必要があり，計算コストも大きい．一方，埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method) は時間変化しない直交格子を用いて計算する．そのため計算コストの面で境界適合格子よりも有利になるが，物体表面での境界条件を満たすために特別な操作が必要となる．その操作によって埋め込み境界法は大きく 2 つのアプローチがある．一つは埋め込み境界付近で空間離散化を変える方法である．そしてもう一つは埋め込み境界で境界力を導入する方法である．どちらの方法に対しても埋め込み境界ですべり条件である Navier 境界条件を課す方法は確立していない．本研究では埋め込み境界付近で空間離散化を変える必要のない，境界力を導入する方法に着目し，すべり条件を課す方法を確立することを目的とする．

Peskin[1] による埋め込み境界法は境界力を初めて導入した手法であり，従来から広く用いられている．この手法は変形物体境界がある流れに適用され，その変形量から構成式によって境界力を与える．一方，Taira ら [2] による埋め込み境界射影法 (Immersed Boundary Projection Method) は剛体表面がある流れを解析するのに有用である．埋め込み境界射影法では，埋め込み境界の位置と速度が既知であることを利用して境界力をすべりなし条件が満たされるように部分段階法の枠組みで求める．本研究では，変形しない任意形状壁面で挟まれた流路内の流れの解析に注目するため，埋め込み境界射影法に基づいた任意形状すべり壁面上の流れの計算手法を提案する．

本稿では，境界力を直交格子に分配する演算子が従来のように離散デルタ関数で構成された場合には，Navier 境界条件を適切に課すことができないことを示す．そして Navier 境界条件を課すための新たな分配演算子を提案し，チャネル流れの検証計算を行う．

2. 支配方程式

滑らかな任意形状壁面上の Newton 流体の二次元非圧縮流れを考える．壁面の運動はあらかじめ規定されているものとする．支配方程式は次の無次元化された Navier-Stokes 方程式および連続の式である．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla P + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}_{ext}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{2}$$

ここで Re は Reynolds 数，$\boldsymbol{f}_{ext}$ は外力である．流速 $\boldsymbol{u}$ は壁面上で，すべり境界条件である Navier 境界条件

$$u_t - u_t^B = \mathcal{L}_s \left(\frac{\partial u_t}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_t} \right) \tag{3}$$

および不浸透条件

$$u_n = u_n^B \tag{4}$$

を満たすものとする．ここで，下付き添字の t，n はそれぞれ壁面接線方向，法線方向の成分であることを表しており，上付き添字の B は壁面上の量であることを表している．$\mathcal{L}_s$ は無次元すべり長さである．

3. 埋め込み境界射影法に基づく数値計算手法

本研究では，これらの支配方程式 (1)，(2) および境界条件 (3)，(4) に対する，埋め込み境界射影法に基づく数値計算手法を新たに提案する．本章でその具体的手法を示す．

3.1 埋め込み境界射影法

まず埋め込み境界射影法の概要を以下に示す [2]．埋め込み境界射影法では，埋め込み境界の位置と速度が既知であるとし，そこでの境界条件としてすべりなし条件を与えることを前提としている．ここで，埋め込み境界は Lagrange 点によって表される．このときすべりなし条件は次のように表される．

$$\hat{E}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^B. \tag{5}$$

Copyright © 2019 by JSFM

ここで $\hat{E}$ は，計算格子上で定義された量である速度場 $\boldsymbol{u}$ の Lagrange 点における値を補間によって評価するための補間演算子である．速度場がこの条件を満たすように強制するため，Peskin の埋め込み境界法と同様に境界力 $\boldsymbol{F}$ を Lagrange 点で作用させる．ただし，Peskin の埋め込み境界法では境界力が構成式によって与えられるのに対し，埋め込み境界射影法では，埋め込み境界の位置と速度が既知であることを利用して，境界力を部分段階法の枠組みで求める．まず Navier-Stokes 方程式および連続の式とすべりなし条件を離散化すると

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(3\boldsymbol{A}^n - \boldsymbol{A}^{n-1}\right) - \hat{G}P^{n+1} + \frac{1}{2\mathrm{Re}}\left(\hat{L}\boldsymbol{u}^{n+1}+\hat{L}\boldsymbol{u}^n\right) + \boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + \hat{H}\boldsymbol{F}^{B,n+1}, \quad (6)$$

$$\hat{D}\boldsymbol{u}^{n+1} = 0, \quad (7)$$

$$\hat{E}\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{B,n+1} \quad (8)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{A}^n = -\boldsymbol{u}^n\cdot\hat{G}\boldsymbol{u}^n$ であり，$\hat{G}$，$\hat{L}$，$\hat{D}$ はそれぞれ勾配，Laplacian，発散を差分で行う演算子である．$\hat{H}$ は Lagrange 点で定義された量を計算格子に分配する分配演算子である．なお，補間演算子を含むこれらの演算子は線形演算子である．また，時間離散化に関して，対流項，粘性項にはそれぞれ 2 次の Adams-Bashforth 法，Crank-Nicolson 法を適用した．これらの離散式に対し，式 (6) を圧力勾配項と境界力の項を無視して解いて部分段階速度 $\boldsymbol{u}^F$ を求め，$\hat{D}\boldsymbol{u}^F$ および $\hat{E}\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^{B,n+1}$ の値から式 (7)，(8) を満たすように P^{n+1}，$\boldsymbol{F}^{n+1}$ を求めて速度場を修正する．本研究ではこの手法を，埋め込み境界ですべり境界条件である Navier 境界条件 (3) を満たす場合に応用する．

3.2 Navier 境界条件の演算子表現

すべりなし条件の演算子表現 (8) と同様に，Navier 境界条件 (3) および不浸透条件 (4) を線形演算子によって表現する．まず，(3) の左辺第 1 項と右辺，(4) の左辺は計算格子上で定義された量の埋め込み境界での値であるため，これらは補間演算子 $\hat{E}$ によって評価できる．また，(3) の右辺の偏微分は差分演算子によって表現する．これにより式 (3)，(4) は次のように演算子表現される．

$$\hat{E}u_t - \hat{E}\mathcal{L}_s\hat{G}_n u_t - \hat{E}\mathcal{L}_s\hat{G}_t u_n = u_t^B, \quad (9)$$

$$\hat{E}u_n = u_n^B. \quad (10)$$

ここで $\hat{G}_t$，$\hat{G}_n$ はそれぞれ t，n 方向に関する差分演算子である．t-n 座標系は x-y 座標系に関して角度 θ だけ反時計回りに回転した座標系であるとする．このとき式 (9)，(10) を x-y 座標系に座標変換すれば

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_{xx} & \hat{B}_{xy} \\ \hat{B}_{yx} & \hat{B}_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^B \\ u_y^B \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる．ここで，

$$\hat{B}_{xx} = \hat{E} + \mathcal{L}_s(s_2c\hat{E}\hat{G}_x - c_2c\hat{E}\hat{G}_y), \quad (12)$$

$$\hat{B}_{xy} = -\mathcal{L}_s(c_2c\hat{E}\hat{G}_x + s_2c\hat{E}\hat{G}_y), \quad (13)$$

$$\hat{B}_{yx} = \mathcal{L}_s(s_2s\hat{E}\hat{G}_x - c_2s\hat{E}\hat{G}_y), \quad (14)$$

$$\hat{B}_{yy} = \hat{E} - \mathcal{L}_s(c_2s\hat{E}\hat{G}_x + s_2s\hat{E}\hat{G}_y) \quad (15)$$

である．ただし $s_2 = \sin 2\theta$，$s = \sin\theta$，$c_2 = \cos 2\theta$，$c = \cos\theta$ である．このようにして構成した式 (11) の係数行列を線形演算子 $\hat{B}$ で表す．以上により境界条件を線形演算子によって表現できる．

3.3 計算手順

境界条件を Navier 境界条件とした場合の離散式はすべりなし条件 (8) を

$$\hat{B}\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{B,n+1} \quad (16)$$

で置き換えた場合に相当する．式 (6)，(7)，(16) を埋め込み境界射影法に基づいて解く計算手順 [(3)] について示す．ただし，本研究では計算の簡略化のため，部分段階法ではなく，SMAC 解法の枠組みで計算手順を構成する．

式 (6) に対し，

$$\hat{R} = \hat{I} - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\hat{L}, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{s}_{NS} = \boldsymbol{u}^n + \frac{\Delta t}{2}\left(3\boldsymbol{A}^n - \boldsymbol{A}^{n-1}\right) - \Delta t\hat{G}P^n + \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\hat{L}\boldsymbol{u}^n + \Delta t\boldsymbol{f}_{ext}^{n+1} + \Delta t\hat{H}\boldsymbol{F}^{B,n} \quad (18)$$

と置くと，

$$\hat{R}\boldsymbol{u}^{n+1} + \Delta t\hat{R}\hat{G}\delta P^{n+1} - \Delta t\hat{R}\hat{H}\delta\boldsymbol{F}^{B,n+1} = \boldsymbol{s}_{NS} \quad (19)$$

と書き直せる．ここで，

$$\hat{G}P^{n+1} = \hat{G}P^n + \hat{R}\hat{G}\delta P^{n+1}, \quad (20)$$

$$\hat{H}\boldsymbol{F}^{B,n+1} = \hat{H}\boldsymbol{F}^{B,n} + \hat{R}\hat{H}\delta\boldsymbol{F}^{B,n+1} \quad (21)$$

が成り立つ．しかし，$\hat{R} = \hat{I} + O(\Delta t)$，$\delta P^{n+1} = O(\Delta t)$，$\delta\boldsymbol{F}^{B,n+1} = O(\Delta t)$ であることを考慮すれば，

$$P^{n+1} = P^n + \delta P^{n+1}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{F}^{B,n+1} = \boldsymbol{F}^{B,n} + \delta\boldsymbol{F}^{B,n+1} \quad (23)$$

としても時間に関して導入する誤差は高々2 次である．

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \Delta t\hat{G} & -\Delta t\hat{H} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{B} \end{bmatrix}^T, \quad (25)$$

$$\lambda^{n+1} = \begin{bmatrix} \delta P^{n+1} & \delta\boldsymbol{F}^{B,n+1} \end{bmatrix}^T, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{s}_c = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{u}^{B,n+1} \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

と置くと，式 (19)，(7)，(16) の方程式系は次のように行列表示できる．

$$\begin{bmatrix} \hat{R} & \hat{R}\hat{Q} \\ \hat{W} & \hat{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{n+1} \\ \lambda^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{NS} \\ \boldsymbol{s}_c \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Copyright © 2019 by JSFM

この係数行列を LU 分解すると

$$\begin{bmatrix} \hat{R} & \hat{R}\hat{Q} \\ \hat{W} & \hat{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R} & \hat{O} \\ \hat{W} & -\hat{W}\hat{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} & \hat{Q} \\ \hat{O} & \hat{I} \end{bmatrix} \tag{29}$$

となる．式 (28)，(29) により計算手順は次のようになる．

1 $\hat{R}\boldsymbol{u}^P = \boldsymbol{s}_{NS}$ により予測速度 $\boldsymbol{u}^P$ を求める．

2 $\hat{W}\hat{Q}\lambda^{n+1} = \hat{W}\boldsymbol{u}^P - \boldsymbol{s}_c$ より δP^{n+1}，$\delta \boldsymbol{F}^{B,n+1}$ を求める．

3 $\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^P - \hat{Q}\lambda^{n+1}$ により速度を修正する．

4 式 (22)，(23) により P^{n+1}，$\boldsymbol{F}^{B,n+1}$ を求める．

3.4 補間演算子

任意関数 $\phi(x)$ の $x = a$ での値はデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて次のように表される．

$$\phi(a) = \int \delta(x-a)\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{30}$$

式 (30) の積分を離散表現のために和で置き換える際に，デルタ関数を有限な台をもつ連続関数で近似した離散デルタ関数を用いる．この離散表現は補間に他ならない．埋め込み境界法ではこの離散デルタ関数を用いて補間演算子を構成する．離散デルタ関数はいくつか提案されているが，本研究では Staggered 格子を用いるために，Staggered 格子に適した離散デルタ関数 [4]

$$d(\tilde{x}) = \begin{cases} d_1(\tilde{x}) & \text{for } |\tilde{x}| \le \frac{1}{2} \\ d_2(\tilde{x}) & \text{for } \frac{1}{2} \le |\tilde{x}| \le \frac{3}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{31}$$

を用いる．ここで，

$$d_1(\tilde{x}) = \frac{1}{3}\left\{1 + \sqrt{-3\tilde{x}^2 + 1}\right\} \tag{32}$$

$$d_2(\tilde{x}) = \frac{1}{6}\left\{5 - 3|\tilde{x}| - \sqrt{-3(1-|\tilde{x}|)^2 + 1}\right\} \tag{33}$$

である．この離散デルタ関数を用いて，計算格子で定義された任意の量 ϕ の Lagrange 点 (X_k, Y_k) での値は次のような補間値で表される．

$$\hat{E}_k\phi = \sum_{i,j} d(i-\xi_k)d(j-\eta_k)\phi_{i,j}. \tag{34}$$

ここで x，y 方向の格子幅をそれぞれ Δx，Δy とすると $i = x/\Delta x$，$j = y/\Delta y$，$\xi_k = X_k/\Delta x$，$\eta_k = Y_k/\Delta y$ である．式 (34) によって補間演算子 $\hat{E}$ を構成する．

3.5 分配演算子

埋め込み境界法では通常，分配演算子も離散デルタ関数を用いて構成する．しかし，離散デルタ関数によって構成された分配演算子では Navier 境界条件を適切に再現できない．このことを示す．

まず，埋め込み境界に対し，接線方向と法線方向を t-n 座標系が右手系となるように定義した場合，境界条件 (3) は法線方向が向いている側の流体 (流体 1) に対して Navier 境界条件となる．反対側の流体 (流体 2) に対しては接線方向と法線方向がそれぞれ逆であるために Navier 境界条件の形にならない．境界条件 (3) を課した場合には，流体 1 と流体 2 を合わせた全体の流体の速度場と速度勾配が埋め込み境界で連続となるような条件が流体 2 に課されることになる．このことからわかるように流体 2 の流れ場は物理的な意味を持たず，流れ場の再現性を要求するのは流体 1 に対してのみである．

(3) の離散表現では (9) のように補間演算子を用いる．流体 1 に対して適切に Navier 境界条件を与えるには，(9) の左辺のような補間値と流体 1 からの外挿値との差が小さくなければならない．それは，格子幅を 0 に近づける極限では，埋め込み境界での速度場と速度勾配の連続性を要求することにほかならないが，実際の計算で要求することは，補間範囲での速度場と速度勾配が，特に補間の重み係数の大きい埋め込み境界付近で大きく変化しないことである．

埋め込み境界上で定義された境界力を，式 (31) のような離散デルタ関数で構成された分配演算子で計算格子上に分配する場合を考える．Lagrange 点 (X_k, Y_k) で作用する境界力 $\boldsymbol{F}_k$ をこの分配演算子で分配した場合，

$$\hat{H}_{ij,k}\boldsymbol{F}_k = \frac{\Delta s}{\Delta x \Delta y} d(i-\xi_k)d(j-\eta_k)\boldsymbol{F}_k \tag{35}$$

のように境界力が分布する．ここで，Δs は Lagrange 点の間隔である．離散デルタ関数の対称性により境界力は Lagrange 点に関して対称に分布し，Lagrange 点で最も大きな値をとる．埋め込み境界付近で外力が一様である場合に，そこでの速度分布は境界力の分布に大きく依存することから，埋め込み境界付近の速度場と速度勾配の条件は境界力の分布とその勾配の条件と解釈できる．さらに，境界力の分布は離散デルタ関数で表されるため，離散デルタ関数に対して条件が課せられることとなる．ここで問題となるのが離散デルタ関数の微分である．ただしここにおける微分とは解析的な微分ではなく，差分で評価される程度の関数の変化率である．離散デルタ関数の微分は Lagrange 点で正負を変え大きく変化する．これにより速度勾配も Lagrange 点付近で大きく変化してしまうため，流体 1 に対して適切に Navier 境界条件を課すことができなくなる．そこで，離散デルタ関数の代わりに，Lagrange 点付近で微分が大きく変化しないような分配関数 $d_h(x)$ を構成し，流体 1 に対して適切に Navier 境界条件を課すことのできる境界力の分配方法を新たに提案する．

まず 1 次元問題を考える．保存性，すなわち Lagrange 点上の量を埋め込み境界上で面積積分したものと，Lagrange 点上の量を分配関数によって分配したものを計算格子上で体積積分したものとが一致することが，分配関数に課せられる条件のひとつである．境界力の保存性とそれによるトルクの保存性を保つために次のような条件が課せられる．

$$\sum_i d_h(i-\xi) = 1 \text{ for all } \xi, \tag{36}$$

$$\sum_i (i-\xi)d_h(i-\xi) = 0 \text{ for all } \xi. \tag{37}$$

なお，トルクの保存性は，Lagrange 点上の境界力によって発生する，ある点 A まわりのトルクと，計算格子上に分配された境界力によって発生する，点 A まわりのトルクとが等しいということである．式 (37) を満たすのは ξ に関して対称な分配関数である．この対称性により分配関数の微分が Lagrange 点付近で大きく変化する．そこで，トルクが保存される位置を ξ から r だけずらすことを考える．つまり，Lagrange 点上の境界力が，そこから r だけずれた点で作用しているとして考えたときに発生する点 A まわりのトルクと，計算格子上に分配された境界力によって発生する点 A まわりのトルクとが等しくなるようにする．そのため，トルクの保存性を次のように書き換える．

$$\sum_i (i-\xi-r)d_h(i-\xi) = 0 \text{ for all } \xi. \tag{38}$$

Copyright © 2019 by JSFM

Tab. 1: Parameters for the calculation for the case1.

$N_x \times N_y$	N_H	Δ	Δt	f	Re	$\mathcal{L}_s$
100×100	82	0.5	0.01	0.04	0.03427	3.9

式 (38) によって，分配関数は ξ に関して非対称になり，微分が大きく変化する点は r 付近に移動する．そこで，流体 2 側に r を設定する．式 (36)，(38) に加え，分配関数に対しては，連続関数になること，有限な台を持つこと，分配関数を式 (31) の離散デルタ関数で構成される補間演算子で補間した値が Lagrange 点の位置に依らない一定値となることを課す．$\hat{W}\hat{Q}\lambda^{n+1} = \hat{W}\boldsymbol{u}^P - \boldsymbol{s}_c$ で境界力を求めるときに現れる $\hat{B}\hat{H}$ が Lagrange 点の位置に依らないようにするには，これらに加えて，分配関数の微分を補間演算子で補間した値が Lagrange 点の位置に依らない一定値となることを課すのが望ましいが，台を離散デルタ関数 (31) と同じ 3 格子に設定した場合にはこの条件を課すことができず，これ以外の条件で関数形が一意に決定される．このようにして決定された分配関数は次のように表される．

$$d_h(\tilde{x}; r) = \begin{cases} d_2(\tilde{x}) + \frac{r}{2}a(\tilde{x}) & \text{for } \frac{1}{2} \le \tilde{x} \le \frac{3}{2} \\ d_1(\tilde{x}) + rb(\tilde{x}) & \text{for } |\tilde{x}| \le \frac{1}{2} \\ d_2(\tilde{x}) - \frac{r}{2}a(\tilde{x}) & \text{for } -\frac{3}{2} \le \tilde{x} \le -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{39}$$

ここで，

$$a(\tilde{x}) = 1 + \frac{1 - |\tilde{x}|}{\sqrt{-3(1 - |\tilde{x}|)^2 + 1}}, \tag{40}$$

$$b(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{-3\tilde{x}^2 + 1}} \tag{41}$$

である．式 (39) において $r = 0$ としたとき，分配関数は離散デルタ関数 (31) に一致する．

次に分配関数 (39) を用いて 2 次元の分配演算子を構成する．分配関数は $r \neq 0$ のときに値が負となる領域があるため，離散デルタ関数で構成された分配演算子のように分配関数の積で構成しようとすると負同士の積が現れてしまう．そこで分配演算子を次のように表すことを考える．

$$\begin{aligned} \alpha\hat{H}_{ij,k} &= \lambda d(i - \xi_k) d_h(j - \eta_k; r_y) \\ &\quad + (1 - \lambda) d_h(i - \xi_k; r_x) d(j - \eta_k). \end{aligned} \tag{42}$$

ここで，$\alpha = \Delta x \Delta y / \Delta s$ である．離散デルタ関数 (31) は負の値を取らないため，このように表現することで，負同士の積が現れなくなる．λ，r_x，r_y は t 方向と x 方向のなす角 θ の関数である．トルク保存位置が，常に Lagrange 点から境界法線方向に一定の距離離れた位置になるように設定し，r_x，r_y が有限となることを考慮して，次のように関数形を定める．

$$\lambda = \frac{1}{1 + |\tan\theta|}, \tag{43}$$

$$r_x = A \sin\theta \left(1 + |\cot\theta|\right), \tag{44}$$

$$r_y = -A \cos\theta \left(1 + |\tan\theta|\right) \tag{45}$$

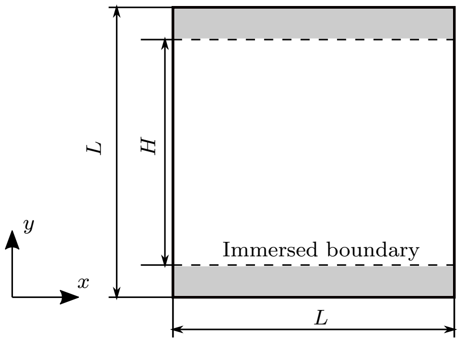

Fig. 1: The computational domain and the immersed boundaries for the case 1.The shaded regions represent tha walls.

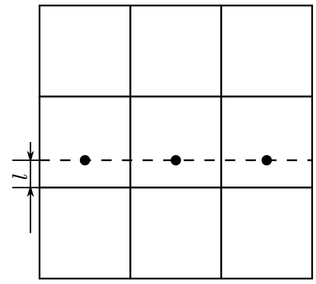

Fig. 2: The positions of the Lagrange points on the staggered grid for the case 1.

ここで A は正の任意定数である．このようにして構成された分配演算子は境界力の保存性およびトルクの保存性を満たし，トルクの保存位置は Lagrange 点を原点としたとき $(A\Delta x \sin\theta, -A\Delta y \cos\theta)$ となる．

本手法ではトルク保存位置の移動を考えたが，埋め込み境界で表される剛体の運動において，それがどのように扱われるかを説明する．流体から剛体に作用する力およびそれによるトルクは，埋め込み境界における流体の応力によって発生する力およびトルクによって表される．そしてそれらは，埋め込み境界から分配される境界力の分配範囲分だけ埋め込み境界より大きな境界で囲まれる領域内の流体加速度と境界力，外力を用いて表される(5)．その際，境界力やそれによるトルクをその領域内で体積積分する．保存性により，境界力の体積積分は $\Sigma_k \boldsymbol{F}_k \Delta s$ で，トルクの体積積分は $\Sigma_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k \Delta s$ でそれぞれ表される．ここで $\boldsymbol{r}_k$ は剛体の重心位置からのトルク保存位置の位置ベクトルである．つまり，剛体の運動を考える場合には，$\boldsymbol{r}_k$ でトルク保存位置の移動を考慮すれば問題ない．なお，格子幅を 0 に近づける極限では，その位置の Lagrange 点からのずれは 0 になる．

4. 検証計算

3 章で示した計算手法によるチャネル流れの計算を示す．壁面が x 方向と平行に配置された場合 (case 1) と x 方向に対して 45 度の角度で配置された場合 (case 2) について示す．まず case 1 の計算例を示す．初期に静止していた流体を一定外力 $\boldsymbol{f}_{ext} = f\boldsymbol{e}_x$ によって駆動する．埋め込み境界として表される壁面では Navier 境界条件を課す． Fig. 1 は計算領域と埋め込み境界を表している．計算領域の境界条件は $x = 0, L$ で周期境界条件，$y = 0, L$ で自由すべり条件を課すこととする．Lagrange 点の間隔 Δs は Fig. 2 のように格子幅 $\Delta = \Delta x = \Delta y$ と等しいし，Fig. 2 において $l = 0.3\Delta$ の位置に Lagrange 点を配置する．x，y 方向の格子数 N_x，N_y は $N_x = N_y = L/\Delta$ で

Copyright © 2019 by JSFM

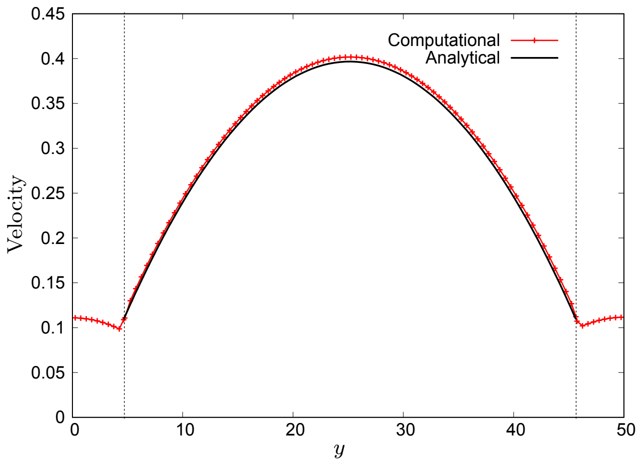

Fig. 3: The velocity profile for the case 1 at $t = 50$. The dashed lines represent the position of the immersed boundaries.

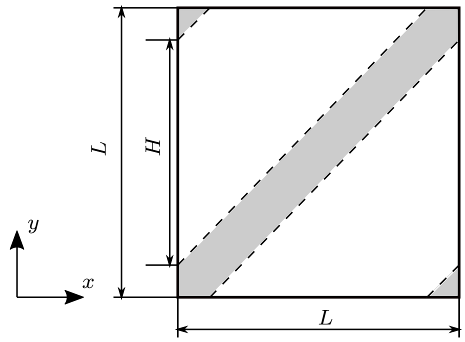

Fig. 4: The computational domain and the immersed boundaries for the case 2. The shaded regions represent tha walls.

あり，$N_H = H/\Delta$ とする．計算格子は Staggered 格子を用いる．式 (44)，(45) における A は 1 とする．このとき分配演算子は，下側の埋め込み境界では

$$\alpha \hat{H}_{ij,k} = d(i - \xi_k) d_h(j - \eta_k; -1) \tag{46}$$

であり，上側の埋め込み境界では

$$\alpha \hat{H}_{ij,k} = d(i - \xi_k) d_h(j - \eta_k; 1) \tag{47}$$

である．その他の計算条件を Tab. 1 に示す．

Fig. 3 に計算によって得られた速度分布と解析解を示す．埋め込み境界近傍では速度勾配が急激に変化していないことがわかる．速度分布は解析解とおおむね一致している．解析解よりわずかにずれているのは，埋め込み境界での勾配の補間による評価がチャネル内から外挿したものとわずかにずれるからである．実際，$\hat{B}\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{B,n+1}$ は 0 に十分近いが，Fig. 3 において，埋め込み境界での解析解の速度勾配と計算で得られた速度勾配はわずかに異なる．これは，補間演算子の補間範囲内で，チャネル内の速度勾配と壁面内の速度勾配が異なるからである．埋め込み境界付近の速度分布は分配関数に大きく依存するが，分配関数のピークは Lagrange 点より離れているものの，補間範囲内にあり，そのため速度勾配が大きく変化する位置も補間範囲内にある．このことが速度勾配の外挿値と補間値とのずれを生じさせていると考えられる．

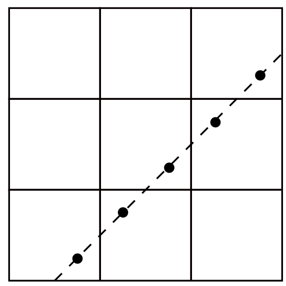

Fig. 5: The positions of the Lagrange points on the staggered grid for the case 2.

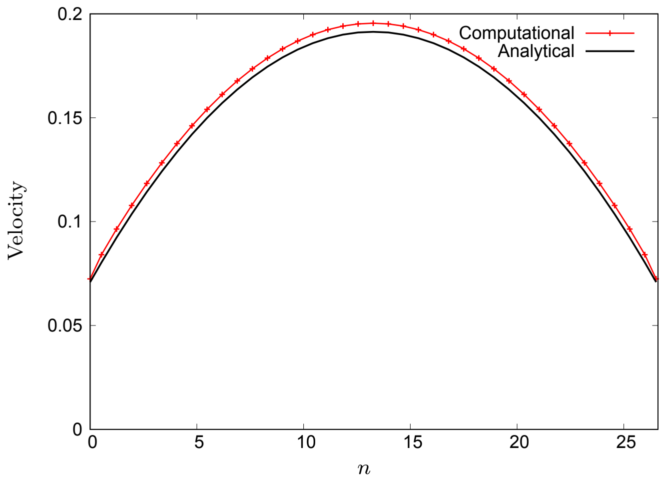

Fig. 6: The velocity profile for the case2 at $t = 50$.

なお離散デルタ関数で構成される分配演算子では計算が破綻する．

次に case 2 の，壁面が x 方向と 45 度の角度をなす場合のチャネル流れの計算を示す．初期に静止していた流体を一定外力 $\boldsymbol{f}_{ext} = f/\sqrt{2}\boldsymbol{e}_x + f/\sqrt{2}\boldsymbol{e}_y$ によって駆動する．埋め込み境界として表される壁面では Navier 境界条件を課す．Fig. 4 は計算領域と埋め込み境界を表している．計算領域の境界条件は全周囲で周期境界条件を課す．Fig. 5 のように Lagrange 点を配置し，$\Delta s = \Delta/\sqrt{2}$ とする．$N_H = 75$ とし，Tab. 1 の N_H 以外のパラメータは同じ値を用いる．分配演算子は，Fig. 4 において中央左および右下の埋め込み境界では

$$\begin{aligned}\alpha \hat{H}_{ij,k} = &\frac{1}{2} d(i - \xi_k) d_h(j - \eta_k; -\sqrt{2}) \\ &+ \frac{1}{2} d_h(i - \xi_k; \sqrt{2}) d(j - \eta_k)\end{aligned} \tag{48}$$

であり，中央右および左上の埋め込み境界では

$$\begin{aligned}\alpha \hat{H}_{ij,k} = &\frac{1}{2} d(i - \xi_k) d_h(j - \eta_k; \sqrt{2}) \\ &+ \frac{1}{2} d_h(i - \xi_k; -\sqrt{2}) d(j - \eta_k)\end{aligned} \tag{49}$$

である．

Fig. 6 に計算によって得られた速度分布と解析解を示す．壁面での速度は良く一致しているものの，ほかの部分ではずれが生じている．これは case 1 と同様に，分配演算子による境界力のピークが補間演算子の範囲内にあり，速度勾配の大きな変化が Lagrange 点から離れているものの補間範囲内で生じるからであると考えられる．

Copyright © 2019 by JSFM

5. 結言

埋め込み境界射影法に基づいた，なめらかな任意形状すべり壁面上の流れ場の計算手法について示した．離散デルタ関数で構成される分配演算子では Navier 境界条件を適切に課すことができないことを示した．Navier 境界条件を離散的に課すために，境界付近での速度勾配の分布に着目し，埋め込み境界の位置に関して非対称な分配関数を新たに導入した．そしてその分配関数に対し，2 次元の分配演算子の構成法を提案した．提案した分配演算子を用いて，壁面が格子に沿う場合と 45 度の角度をなす場合に対してチャネル流れの計算を行い，解析解と比較した．得られた速度分布は解析解とおおむね一致した．以上のことから，本研究で提案した手法により埋め込み境界射影法を任意形状のすべり壁面を含む流れ場に適用可能となった．本手法の三次元への拡張は，分配演算子を本稿で示した方法と同様な方法で三次元表現すれば可能となると考えられる．

参考文献

(1) C.S. Peskin, “Flow patterns around heart valves: a numerical method,” J. Comput. Phys., 10 (1972), pp. 252-271.

(2) K. Taira and T. Colonius, “The immersed boundary method: a projection approach,” J. Comput. Phys., 225 (2007), pp. 2118-2137.

(3) 藤井, 大森, 梶島, “埋め込み境界射影法による動的濡れ現象の定式化,” 第 32 回数値流体力学シンポジウム, E11-4 (2018)

(4) A.M. Roma, C.S. Peskin and M.J. Berger, “An adaptive version of the immersed boundary method,” J. Comput. Phys., 153 (1999), pp.509-534.

(5) U. Lacis, K. Taira and S. Bagheri, “A stable fluid-structure-interaction solver for low-density rigid bodies using the immersed boundary projection method.” J. Comput. Phys., 305 (2016), pp. 300-318.

Copyright © 2019 by JSFM