

# 移流問題に対する Parareal 法による時間並列計算の収束性向上手法の評価

## Study of Improvement Method of Parareal Iteration Convergence for Advection Equation

- 飯塚幹夫, 九州大学 情報基盤研究開発センター, 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744,  
E-mail : iizuka.mikio.903@m.kyushu-u.ac.jp
- 小野謙二, 九州大学 情報基盤研究開発センター, 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744,  
E-mail : keno@cc.kyushu-u.ac.jp

Mikio Iizuka, Research Institute for Information Technology, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0385

Kenji Ono, Research Institute for Information Technology, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0385

Parallel-in-time integration is desired for cases in which simulation requires long time span integration or more acceleration after the space parallel acceleration is saturated. However, the convergence of the parareal method for hyperbolic PDEs is worse than that for parabolic PDEs. Then, many methods have been proposed to improve the convergence of the parareal method for hyperbolic-PDEs. Therefore, in this presentation, we show the evaluation of improvement method of the convergence for advection equation via numerical test.

### 1. 初めに

「富岳」でのコア数が9,600,000(「京」の15倍)でノード数が200,000(「京」の2.5倍)と増加しているように, 先端スパコンのハードウェアの並列性は増加し続けている。従って, アプリケーションの並列性も増加させ続けなければならない。しかし, アプリケーションにおいて並列性を増加させることは従来の空間並列のような自然な並列性を利用することは限界にきている。そのような中, 新たな方向で並列性を生み出す試みとして, 複数時間ステップに複数演算プロセスを割り当て並列実行する時間並列計算法が着目されてきている。そのような動向に着目し, 本研究では, Lionらにより提案されたParareal法<sup>(1)</sup>をベースに時間並列計算法の研究開発を進めている。

Parareal法は拡散方程式等の放物型偏微分方程式に対しては収束性が良く実用的なレベルにあると考える。一方, 移流方程式や波動方程式等の双曲型偏微分方程式に対しては収束性に課題があり, 現在その課題を解決するための研究が活発に実施されている<sup>(2)</sup>。そこで我々は, 双曲型偏微分方程式を対象に, 収束性の課題の調査や課題解決のための研究を行なってきた<sup>(3)</sup>。双曲型偏微分方程式の中でも移流方程式は流れ現象の最も基礎的な方程式であり応用範囲も広く, もし時間並列計算が可能となればその効果は大きい。そこで特に基礎的段階として一次元の移流方程式に対するParareal法の応用研究に着目している。今回は, その最新の研究成果について移流方程式に対するParareal法の収束性について報告する。

本講演では, 初めにParareal法の計算法とその並列性能の特徴について述べ, Parareal法の収束性が重要であることを述べる。次に移流方程式へのParareal法の応用法を述べる。そして, 双曲型PDEsに対する時間並列計算法の適用がなぜ困難なのかの理由を述べる。具体的には移流方程式に対するParareal法の収束性が, 収束のための修正計算を行うCoarse solverと正確な解の試し計算を行うFine solverの間に生じる波の位相差による非物理的振動現象によることを述べる。次に, これまでに提案されている収束性改善の方法の概要を述べる。そして, 数値実験を用いて提案された計算法に対するParareal法の収束挙動を示し, どこまでParareal法の計算法の改良が来ているのか, まだ残る課題何なのかを示す。最後にまとめと今後研究方向について述べる。

### 2. Parareal 法による時間並列計算法

Parareal法では, 解析を行う時間領域 $\Omega_t \in [0 : T]$ を $N_{ts}$ 個の時間領域幅 $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ のtime sliceと呼ばれる粗い時間領域 $\Omega_n \in [T_{n-1}, T_n]$ に分割する (Fig.1).

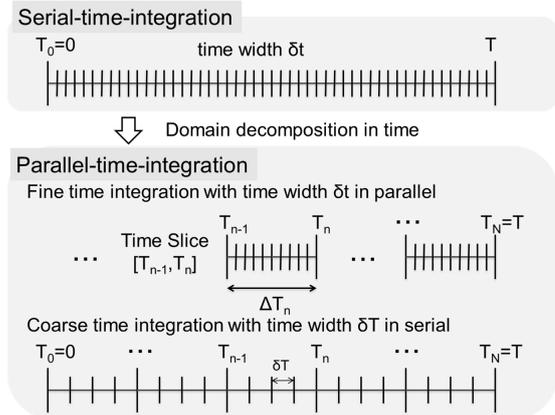


Fig. 1: Domain decomposition in time and parareal iteration.

ここで  $n$  は time slice の番号である。以下, 細かい積分演算とは時間発展現象を十分正確にシミュレーションするために必要な詳細な時間ステップ幅  $\delta t$  の演算で, 十分時間精度の高い時間積分演算のことである。粗視化積分演算とは, Parareal 法の収束計算に使われるもので, 粗い時間ステップ幅  $\delta T$  での時間積分演算または粗いモデル等を用いた計算負荷の低い時間積分演算のことである。ただし, 速い収束のためには高次の時間積分法が必要とされる。

Parareal 法は次のように計算される。(a) 予測計算ステップ: それぞれの time slice  $\Omega_n$  で, 解くべき場の量の仮の始端値  $\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}$  を使った時間ステップ幅  $\delta t$  の細かい積分演算  $\varphi_{\Delta T_n}(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$  により初期値問題を解く。(b) 修正計算: この時, 端点における前の反復との値に食い違いが出る。この食い違い量は修正すべき量であり, この食い違い量を粗視化積分演算  $\varphi_{\Delta T_n}^c(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$  を用いて次の領域の始端値に伝搬させて修正量を得て修正計算を行う。そして各 time slice の端点値が収束するまで (a),(b) を繰り返す。(c) この反復計算の初期値設定: 粗い時間ステップ幅  $\delta T$  等を使い初期値問題を粗く計算する, ここで  $\Delta T \geq \delta T \gg \delta t$  である。このように異なる時間スケールの積分演算を用いるため, Parareal 法は時間方向のマルチレベル解法となっている。細かい積分演算と粗視

化積分演算を、 $\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}$  の  $T_{n-1}$  から  $T_n$  までの積分であることを強調して、 $F(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$  (Fine solver, Fine popagtor ともいう)、 $G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$  (Coarse solver, Coarse popagtor ともいう) と書くことが行われている。このような書き方をすると、良く知られた Parareal 法のアルゴリズムの式 (1) が得られる。

$$\mathbf{U}_n^k = F(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) + G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) - G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) \quad (1)$$

Parareal 法の並列計算では、各 time slic に演算プロセスを割り当て、各 time slic 間では time slice 番号が大きくなる方向に隣接通信を繰り返し修正量を伝搬させていく。

### 3. 並列性能向上における収束性の重要性

Parareal 法の処理手順概要とその中での処理時間を示す変数を Fig.2 に示す。Time slice 数  $N_{ts}$  と並列数  $N_p$  を

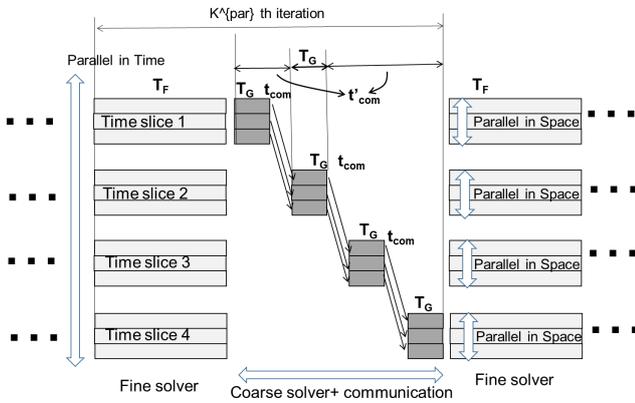


Fig. 2: Computational time in parareal

同数とし、逐次計算時間を並列計算時間で割り、さらに Time Slice 当たりの細かい積分演算の時間  $T_F$  で分子分母を割ると、Fig.2 を参考にして Parareal 法の並列加速率  $\alpha$  は式 (2) のように粗視化積分演算と細かい積分演算の時間比 (時間粗視化率)  $R_{fc} = \frac{T_G}{T_F}$ , time slice 数  $N_{ts}$ , 反復数  $K^{par}$ , 通信時間  $t_{com}$  の関数となる (4)。細かい積分演算と粗視化積分演算に同じ時間積分法を使う場合は  $R_{fc} = \frac{T_F}{T_G} = \frac{\delta T}{\delta t}$  となるが、本論文ではより一般的な方法を考える。つまり、 $R_{fc} = \frac{T_F}{T_G} = Q \frac{\delta T}{\delta t}$ ,  $Q < 1$ , ここで  $Q = T_{F0}/T_{G0}$  は Coarse solver の計算時間を短縮して 1 ステップ当たりの Fine/Coarse solver の処理時間比で、 $T_{G0}, T_{F0}$  は 1 ステップ当たりの Fine/Coarse solver の計算時間、 $R_{fc}^t = \delta T/\delta t$  は Fine/Coarse solver の時間ステップ幅比である。

$$\alpha \left( N_{ts}, R_{fc}, K^{par}, \frac{t_{com}}{T_G} \right) = \frac{\text{逐次計算時間}}{\text{Parareal 法の並列計算時間}} = \frac{T_F N_{ts}}{((T_F + T_S)N_{ts} + T_C N_{ts})K^{par} + T_G N_{ts}} = \frac{1}{K_{par} \left\{ \frac{1}{N_{ts}} + \frac{1}{R_{fc}} \left( 1 + \frac{1}{K_{par}} + \frac{t_{com}}{T_G} \right) \right\}}, \quad (2)$$

ここで、 $T_S = -t_{com} + (t_{com} + T_G)N_{ts}$  は逐次計算時間である。  $R_{fc}$  が大きいと  $\alpha(N_{ts}, R_{fc}, K^{par}, \frac{t_{com}}{T_G}) \rightarrow N_{ts}/K^{par}$

となる。式 (2) から、性能は以下のような挙動となる。  $K^{par}$  が増加すると  $1/K^{par}$  で性能が低下する。  $R_{fc}$  の増加は逐次計算の比率を下げて性能を向上させる。一方、式 (3) から  $R_{fc}$  の増加、すなわち Coarse solver の時間ステップ幅  $\delta T$  の増加は、反復数  $K^{par}$  の増加となることに注意が必要である。そのため Parareal 法の並列加速率を向上させるためには、 $R_{fc}$  の増加と  $K^{par}$  の減少は相反することを考慮し収束性を向上させて  $K^{par}$  の増加を抑制することが最も重要となる。このように収束性は性能向上のための最も重要な検討項目となる。

次に、その  $K^{par}$  の挙動について少し細かく述べておく。  $K^{par}$  は時間並列計算を行う方程式の特性、離散化手法、シミュレーションの問題設定 (規模等) の問題の特性、そして  $R_{fc}, N_{ts}$ , 粗視化積分演算法等の時間並列法の特性により影響を受けると推定される。この  $K^{par}$  は残差  $res$  の推定式が分かれば、Parareal 法の収束判定式  $res^{(K^{par})} \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は収束判定値) から推定可能である。現在この推定式は確立していない。現在研究中であるが分かる範囲で書けば以下のような式となる、

$$\frac{res^{(K^{par})}}{res^{(1)}} = \frac{(C'T\delta T^{mp})^{K^{par}-1}}{(K^{par}-1)!} \prod_{j=1}^{K^{par}-1} (N_{ts} - j), \quad (3)$$

ここで  $m$  はひとつの Time Slice の中での Coarse solver のステップ数、 $p$  は Coarse solver の時間積分法の次数である。この式は Coarse solver の次数  $p$  が大きい、すなわち精度が高いほど Parareal 法の収束性は向上するというを示している。しかし精度を上げることにより Coarse solver 計算コストが増加してしまうと逐次計算負荷が増加し性能が劣化するので、どのような時間積分法を使うか、またその精度をどのように上げるかは慎重に選択する必要がある。拡散項の無い移流問題では式 (3) の係数  $C'$  の値が大きくなり、 $(C'T\delta T^{mp})$  の絶対値が 1 以上になり、反復毎に残差が増加することになる。そのような特性を克服し収束する計算法を開発することが要求されている。

また、Parareal 法の反復数  $K^{par}$  での残差  $res^{(K^{par})}$  は次の式 (4) で評価されることが多い。

$$res^{(K^{par})} = \max_n \left[ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{DOF}} |U_{i,n-1}^{K^{par}} - U_{i,n-1}^{K^{par}-1}|^2}{N_{DOF}}} \right], \quad (4)$$

ここで  $N_{DOF}$  は問題の自由度である。すなわち、この残差の定義により問題規模が違っても 1 変数当たりの残差値を同等して計算が可能となる。

以上より、Parareal 法を利用する時には、問題特性、空間離散化 (ここでは中心差分)、時間離散化が収束性に与える影響を把握し、それを基に性能向上が得られる条件をを勘案し適切な時間粗視化率と時間方向の並列数 (計算資源) を設定し実際の計算を実行することが必要となる。

### 4. 移流方程式と Parareal 法の応用方法

1 次元のスカラー量  $\phi$  の速度  $c$  による移流方程式は式 (5) のように書ける。

$$\partial_t \phi + c \partial_x \phi = 0 \quad (5)$$

この方程式に対する計算法は既によく開発されている。空間離散化では発散防止に重点を置いた上流法、さらに振動抑制にも重点を置いた TVD 法等がある。時間離散化では多段法 (アダムス・バッシュフォース、アダムス・ボルトン、後退差分法)、単段法 (ルンゲ・クッタ法) 等が応用されている。

Parareal 法の応用において加速性を得るためには、収束性の向上、非並列計算の量を支配する時間粗視化率  $R_{fc} =$

$T_F/T_G$  を反復数  $K^{par}$  の増加とバランスを取りながら大きくすることである。

時間粗視化率  $R_{fc}$  を大きくするためには、Coarse solver の計算モデルまたは計算精度を Fine solver のものに比べ簡易なものとして Coarse solver の計算時間を短縮して 1 ステップ当たりの Fine/Coarse solver の処理時間比  $Q = T_{F0}/T_{G0}$  の減少を抑えながら、また時間ステップ幅比  $R_{fc}^t = \delta T/\delta t$  を上げる必要がある。そこで最も単純な方法としては、同じ空間・時間離散化法を用いた同じコードを Fine/Coarse solver に使い、 $R_{fc} = QR_{fc}^t = \delta T/\delta t$  ( $Q = 1$ ) で非並列処理の負荷を下げる調整する方法がある。今回はこの方法を用いている。

### 5. 双曲型偏微分方程式の収束困難性と収束性改良法案

双曲型偏微分方程式に Parareal 法を応用すると収束性が悪い。その理由は Gander ら等により、数学的に双曲型偏微分方程式に適用した Parareal 法の安定性解析を用いて説明がされている<sup>(2)</sup>。具体的には式 (5) をフーリエ変換 (解析しやすいように空間離散化の代わりに) すると右辺の係数が純虚数な以下の式 (6) となる。

$$\partial_t \hat{\phi} = -ikc\hat{\phi} \quad (6)$$

さらに時間離散化は Fine solver で前進オイラー法 (Forward Euler :FE), Coarse solver で後退オイラー法 (Backward Euler :BE) を適用して、Parareal 法の反復毎の解の増幅係数の振幅を見る。すると式 (6) の右辺の係数が純虚数のためその振幅は 1 以上となることが分かる。一方、同様に拡散方程式の場合は式 (6) の右辺が実数となり、その場合の増幅係数の振幅は 1 以下となり良好な収束が可能となる。

また、Gander ら<sup>(2)</sup> は、定性的に次のような収束困難性の説明も加えている。双曲型偏微分方程式の解は波を表す。そのとき、Fine solver と Coarse solver の計算結果の波に位相差があると time slice の端点において喰りにより波の非物理的振動が発生しその振動が減衰せずに time slice 内を伝搬し、一般的には振動が発生すると高次の波数が増え波数が高いほど数値計算では位相誤差が増加し、次の time slice の端点でさらに振動が増幅して収束が悪くなる。

この time slice の端点から発生する非物理的振動の例を図-3 に示す。この場合は、TVD 法と Crank-Nicolson 法を使ったもの、CIP3rd を使ったものである。振動は、波数が高い階段状部分から発生し時間積分法の特性に依ってその位置が伝搬していく。また非物理的な振動の振幅の大きさの違いは移流計算法の位相精度に強く依存することを示唆している。この収束性悪化の機構からこれま

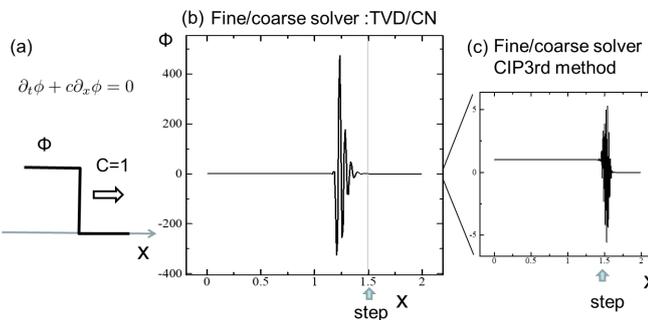


Fig. 3: Non-physical oscillation along the parareal iteration

で以下のような収束性改善の方法が提案されてきている。

- (1) Time slice 端点での Fine/Coarse solver 間での位相差の削減

- (a) グリッドベースの波数の低減 (格子密度の動的制御技術が必要)
- (b) 高精度位相計算法
- (c) 時間領域 T 縮小化
- (d)  $\delta T = \delta t$ , Coarse solver のモデル・計算法の低減 (適用が大変、効果限定的)
- (e) 随伴方程式法による時間方向対称化 (計算量の爆発)

- (2) 更新計算で発生する端点での非物理的振動の抑制
  - (a) 準 Newton Raphson 法である Parareal 法の改善 (緩和係数の導入)
  - (b) エイトケン加速法 (準 Newton Raphson 法に有効) の導入:ベクトル版 (e 変換の  $\epsilon$  算法)
- (3) 端点で発生した非物理的振動の除去
  - (a) RCIP 法、MMT、(WENO) の応用による発生振動除去
  - (b) Coarse solver についてのみ粘性を加えて非物理的振動除去

しかし、これまでこれらを総合的に評価した研究はみあたらない。そこで本研究ではこれらを総合的に評価した研究を進めている<sup>(3)</sup>ので、その一部の結果を紹介する。また、本研究では以上の内、特に下記について研究を進めている。

- (1) グリッドベースの波数の低減
- (2) 準 Newton Raphson 法である parareal 法の改善 (緩和係数の導入等)
- (3) 高精度位相計算法
  - (a) 勾配という位相情報を利用して位相計算精度を上げている CIP3rd
  - (b) さらに曲率という位相情報を利用する CIP5th
  - (c) CIP 法の位相情報の劣化をふせぐ振幅保存法 (STRS 法) の利用の試み
- (4) MMT、WENO の応用による発生振動除去

### 6. 収束性改善法の具体的内容

**Fine/Coarse solver の時間積分法:** セミラグランジェ法を用いる。  $R_{fc}^t \gg 1.0$  を可能とするため  $CFL > 1.0$  にも対応できるようにしている。

**参照上流法:** 高精度位相計算法の影響を見るため、その上流法として河村・桑原法 (KK 法) を用いている。

#### 6.1 高精度位相計算法

**位相情報を移流するもの-CIP3rd, CIP5th:** 有限体積法で空間を離散化し、移流項は CIP 法で離散化した。CIP 法<sup>(5)</sup>のため時間積分は semi-Lagrange 法を用いて移流方程式を計算する。Fine/Coarse solver をこの同じ移流計算コードにより構成した。CIP3rd の場合は良く知られているように勾配情報  $g$  も移流させる。

$$\partial_t \phi + c \partial_x \phi = 0, \quad (7)$$

$$\partial_t g + c \partial_x g = 0, g = \partial_x \phi \quad (8)$$

CIP5th の場合は 5 次の内挿関数を用いて曲率情報  $\chi$  も移流させる。

$$\partial_t \phi + c \partial_x \phi = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t g + c \partial_x g = 0, \quad \partial_t \chi + c \partial_x \chi = 0, \quad (10)$$

$$g = \partial_x \phi, \quad \chi = \partial_x g \quad (11)$$

振幅保存法 (STRS 法): 時空間発展対称性計算法 (STRS(Space-Time Reversal Symmetry) Scheme) (6) は移流方程式の時空間反転対称性の性質を利用し振幅の無減衰計算法を構築するものである. 具体的には式 (14) のパリティ変換の下で式 (12) と式 (13) は等価であり, これが振幅の保存を保証するというものである.

$$\partial_t \phi + c(x, t) \partial_x \phi = 0 \quad (12)$$

$$\partial_{t'} \phi + c(x', t') \partial_{x'} \phi = 0 \quad (13)$$

$$x' = x, \quad t' = -t \quad (14)$$

対流形の移流計算法で, Upwind: 1st order, Lax-Wndroff: 2nd order, QUICK: 2nd order, QUICKEST: 3rd order, Upwind: 3rd order, Kawamura and Kuwahara: 3rd order, Central: 4th order 等は次のように一般形で書ける.

$$\phi_i^n = \phi_i^{n-1} + S \zeta_F \sum_{l=-m}^{m+} a_l \phi_{id+ls}^{n-1} \quad (15)$$

ここで,  $id^\pm = i \mp \text{INT} \left( \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)$ ,  $\zeta_{F,i} = \frac{-s(c)|c| \Delta t + (x_i + x_{ida+})}{-s(c) \Delta x}$  である. この上流法の上流差分法の一般形に対して STRS 法は, 離散化空間での以下のパリティ変換 (式 (16)) を使いました位相変化から  $\Delta t$  の調整を行い式 (17) と書ける.

$$P: \begin{pmatrix} n-1 \\ m^\mp \\ ida^+ \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} n \\ m^\pm \\ ida^- \\ -l \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{ida^-}^n + S \zeta_F \sum_{l=-m}^{m+} a_l \phi_{ida^- - ls}^n \\ &= \phi_{ida^+}^{n-1} + S \zeta_F \sum_{l=-m}^{m+} a_l \phi_{ida^+ + ls}^{n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで,  $\zeta_F$ ,  $m$ ,  $ida^\pm$  は移流方向の Back-Trace 点の記述パラメータである. 式 (15) で書ける移流項の離散化式は式 (17) の形へ変換するだけですべて振幅保存計算法となる. この変換法を CIP 法へ拡張適用して CIP 法で発生する位相情報の劣化, すなわち勾配・曲率の波の減衰を無くせばより位相精度の高い移流計算法を構築可能である. が, 現状ではその拡張はまだ成功していない.

一方, 1次風上差分法の式 (17) を使うと, モード毎 (調和関数毎) には位相も厳密解で計算可能なので, それを利用して移流計算の位相精度が Parareal 法の収束性へ与える影響の調査もしている.

## 6.2 準 Newton Raphson 法である parareal 法の改善

Parareal 法は time slice の端点の値を未知数とした非線形方程式の解法を Newton-Raphson 法で定式化し, 修正値を求める線形方程式の左辺の正確な計算が不可能なことからその計算に大胆な近似を使っている. そのため準 Newton-Raphson 法に基づく計算法と言ってもよい. そこで Coarse solver で計算される修正項に加速・減速処理を行えばより収束性が改善する可能性がある. そこで今回式 (1) の Coarse solver からくる修正量に減速係数  $\gamma$  を使い, また Newton-Raphson 法の修正量に減速係数  $\beta$  を使うことによる式 (20) のように変更し, その修正の効果調べた.

$$\begin{aligned} \sum_{i=n-1}^n (\partial_{U_i} Q(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}, \mathbf{U}_n^{k-1})) d\hat{\mathbf{U}}_i^k &= -Q(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}, \mathbf{U}_n^{k-1}). \\ \mathbf{U}_n^k &= \mathbf{U}_n^{k-1} + \beta d\hat{\mathbf{U}}_n^k. \end{aligned} \quad (18)$$

$$d\mathbf{U}_n^k - \gamma \partial_{U_{n-1}} \varphi_{\Delta T_n}(\mathbf{U}_{n-1}) d\mathbf{U}_{n-1}^k = -\mathbf{U}_{n-1}^{k-1} + \varphi_{\Delta T_n}(\mathbf{U}_{n-1}). \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n^k &= (1 - \beta) \mathbf{U}_n^{k-1} + \beta F(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) \\ &+ \gamma (G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^k) - G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1})) \end{aligned} \quad (20)$$

## 6.3 MMT, WENO の応用による発生振動除去

Parareal 法の更新の後では, Fine/Coarse solver による計算結果の波に位相差が発生し, その波で修正すると喰りによる非物理的振動が発生する. Parareal 法のその修正結果を  $\hat{\phi}_i$  とする. 現在その値を修正して非物理的振動の無い波  $\phi_i$  とする手法を検討している.

MMT 法: Min-max truncation 法 (7) は以下に示すように極めて簡便な処理により安定に非物理的振を抑制して計算可能である. しかし, この方法は精度が悪いことに課題がある.

$$\phi_i^n = \begin{cases} \phi_{i,max} & \phi_{i,max} \leq \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_i & \phi_{i,min} \leq \hat{\phi}_i < \phi_{i,max} \\ \phi_{i,min} & \phi_{i,min} \leq \hat{\phi}_i < \phi_{i,min} \end{cases} \quad (21)$$

WENO: 精度の高い修正法として Weighted Essentially NonOscillatory 法 (8) を用いた計算法を検討している. これは移流計算法ではなく離散点の値から振動の無い滑らかな高精度な補間値を求める方法である.

## 7. 収束性への影響の例

数値実験による調査の結果, RCIP 法, MMT, WENO 法による発生振動除去法は効果が非常に小さかったのでそれ以外の方法の効果例を示す.

計算は階段状分布および曲線状分布を空間時間領域  $x = [0, 3], t = [0, 2]$  を移流速度  $c = 1$  で移流させる 1次元の移流問題 (図.4) である. 空間グリッド幅は  $dx = 10^{-2}$ , 時間ステップ幅は  $\delta t = 10^{-3}$  ( $CFL = 0.1$ ) である. 時間並列数は  $N_{ts} = 20$  で時間粗視化率は  $R_{fc}^t = \delta T / \delta t = 25$  である.

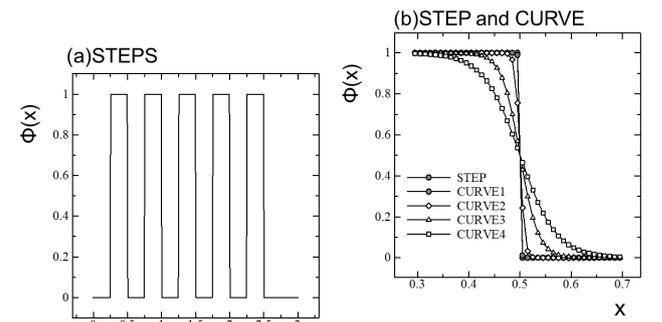


Fig. 4: Initial distribution of scalar value  $\phi$ . (a) many steps case. (b) one step and curvcs casesurfaces.

Parareal 法の収束性改善法の評価の結果を図.5 に示す. 最も効いたのは, 物理量  $\phi$  分布の格子ベースの波数を減小させることである. これはその波数が大きいと数値計算における位相誤差が大きくなるため, その改善が大きき効いている. これを実問題にて一般的に実行するためには物理量分布の変化の激しい部分の格子密度を自動的に増加させればよい. 次に効果があったのは, Coarse solver の計算結果を緩和させる方法であった. その次に効果のあったものは高精度移流計算法の利用であった.

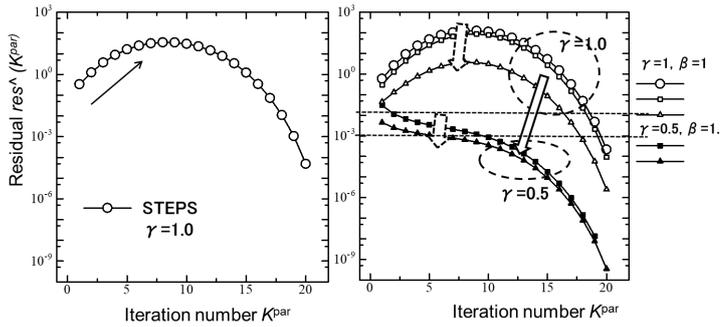


Fig. 5: Improve the convergence of parareal method for 1D advection equation. (a) method reducing grid base wave number such as grid density control method, (b) method relaxing the update of parareal method, (c) method improving the phase accuracy calculated by the coarse solver such as use of high order time integrator, CIP5th method .

## 8. まとめと今後

今回の結果で収束性改善の効果のあるものの順番は, (a) 物理量分布のグリッドベースの波数の低減, (b) Parareal 法の更新計算における緩和係数の導入, (c) 高精度位相な移流項計算法であった. Parareal 法の双曲型方程式への応用に課題はあるものの, 多くの改善案が出されてきており, その効果も完全ではないが示されつつある状況である. 今後さらに多くの案が出され評価・改善が加えられと考えられる. 本研究では, 今後, さらに検討を進める予定である.

## 謝辞

本研究は, 文部科学省ポスト「京」重点課題8「近未来型ものづくりを先導する革新的設計・製造プロセスの開発」の一環として実施したものです. 本論文の結果(の一部)は, 理化学研究所のスーパーコンピュータ「京」を利用して(課題番号:hp170238, hp180171, hp190197), また JSPS 科研費, PJ17H01750 の助成を受けて得られたものです.

## 参考文献

- (1) J.-L. LIONS, Y. MADAY, AND G. TURINICI, “A parareal in time discretization of PDEs”, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 332 (2001), pp.661-668.
- (2) M. J. Gander and S. Vandewalle, “Analysis of the parareal time parallel time integration method”, SIAM Journal on Scientific Computing, vol.29, no.2 (2007), pp.556-578.
- (3) M. Iizuka, K. Ono, “Influence of the phase accuracy of the coarse solver calculation on the convergence of the parareal method iteration for hyperbolic PDEs”, Springer, Computing and Visualization in Science,19 (2018), pp.97-108.
- (4) M. L. Minion, A hybrid parareal spectral deferred corrections method.” Communications in Applied Mathematics and Computational Science, 5.2 (2011), pp.265-301.
- (5) H. Takewaki and T. Yabe, The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: Application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations, J. Comput. Phys., 70 (1987), 353372.
- (6) Katsuhiko Watanabe, a novel framework to construct amplitude preserving wave propagation schemes, Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Annual meeting (2010), pp.123-124(日本語).
- (7) S. Koshizuka, C. B. Carrico, S. W. Lomperski, Y. Oka, Y. Togo, Min-max truncation: An accurate and stable filtering method for difference calculation of convection, Springer, Volume 6, Issue 1(1990), pp 65-76.
- (8) Liu, X., Osher, S. and Chan, T.: Weighted Essentially NonOscillatory Scheme, J. Comput. Phys., 115 (1) (1994), pp.200-212.