# 熱を考慮した埋め込み境界－格子ボルツマン法を用いた正方形ダクト内における氷スラリーの熱流動解析

## Numerical Simulation of Ice Slurry Flow with Heat Transfer in a Square Duct by the Thermal Immersed Boundary – Lattice Boltzmann Method

○ 黒岩拓矢, 信州大院, 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail：18w4029h@shinshu-u.ac.jp
吉野正人, 信州大工, 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail：masato@shinshu-u.ac.jp
鈴木康祐, 信州大工, 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail：kosuzuki@shinshu-u.ac.jp
Takuya Kuroiwa, Graduate School of Science and Technology, Shinshu University, Nagano 380-8553
Masato Yoshino, Institute of Engineering, Academic Assembly, Shinshu University, Nagano 380-8553
Kosuke Suzuki, Institute of Engineering, Academic Assembly, Shinshu University, Nagano 380-8553

Ice slurry is a homogenous mixture of small ice particles and carrier liquid, and it can transport cold thermal energy directly because of its fluidly and have a high heat exchange rate because of fine ice particles. However, it is difficult to know the detailed behavior of ice slurry flow in pipes. In this study, we apply the thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method to a three-dimensional ice slurry flow in a square duct. We first investigate the effects of the Reynolds number. It is found that the Nusselt number on the duct wall increases with the Reynolds number, since the speed of the particles that disturb the temperture field becomes higher than the diffusion of heat. Next, we investigate the effect of the ice packing factor (IPF). It is found that the Nusselt number on the duct wall increases with the IPF, since cold particles get closer to the wall due to the collision of particles. The Nusselt number obtained by the present simulation is close to available experimental results, but the increase rate of the Nusselt number to the IPF is smaller than that obtained by the experimental results. Finally, we investigate the effect of adhesion of particles. As a result, it is found that the particles are aggregated for the adhesion model and that the Nusselt number for the adhesion model is smaller than that for the repulsion model.

## 1. 緒言

近年，高い蓄熱能力や流動性，速い熱負荷追従性等の優れた特徴を持つ氷スラリーを利用した冷蔵・冷却が注目されている [1]．氷スラリーとは，微細な氷と液体の固液二相混合物であり，流動性を持ち，水に比べて単位質量（体積）当たりの蓄熱量が大きいため，多様な温度域でかつ高度な温度制御が可能となる．それゆえ，氷スラリーを利用した冷蔵・冷却は極めて適用範囲が広く，その対象として鮮魚，野菜，加工食品，薬品，化学製品の製造や輸送プロセス等での利用が想定される．また，氷スラリーには冷熱を氷として蓄えることで，冷熱利用を時間的・空間的にシフトできるという特性がある．これを利用して，氷スラリーを深夜電力の利用により生成し，得られた冷熱を昼間に利用することで，電力負荷の平準化を促進することが可能になる．

既存の研究として，Kumano et al. [2] は，氷スラリーが円管内を流れる際の熱流動現象についての実験的研究を行っている．その結果，層流において氷スラリーに含まれる氷の割合 (氷充填率：IPF) が増加するほど，管壁におけるヌッセルト数や圧力損失が増加するといった成果を報告している．しかし，氷スラリーの既存の研究はマクロな観点におけるものがほとんどであり，ミクロな観点から局所的な流れ場や温度場と巨視的な流動特性や伝熱特性の関係は解明されていないのが現状である．また，氷スラリー中の氷粒子径は $\mu$m から mm オーダーであり，実験による観測が非常に困難であるため，数値計算によるアプローチが有効であると考えられる．

昨年のシンポジウムで当研究グループの川崎ら [4] は，Suzuki et al. [5] によって提案された熱を考慮した埋め込み境界–格子ボルツマン法（Thermal Immersed Boundary − Lattice Boltzmann Method：熱 IB–LBM) を用いて，二次元管内を流れる氷スラリーの熱流動解析を行った．そこで本研究では，その問題を三次元に拡張し，正方形ダクト内を流動する氷スラリーの熱流動解析を行い，レイノルズ数，氷充填率 (IPF) および氷粒子同士の付着が伝熱特性に与える影響を調べることを目的とした．

## 2. 計算モデル

本研究では，氷スラリー流れを単純化したモデルとして，発熱する三次元ダクト内を流動する多数の低温粒子周りの熱流動解析を行った．

### 2.1 計算対象

本研究では，Kumano et al. [2] の実験を参考に，幅 7.5mm の無限に長い正方形ダクト内を，5%エタノール水溶液から生成された $-2$ ℃ の氷スラリーが流れる系を計算対象とする．氷スラリーの物性値は，流体密度 $\rho_\mathrm{f} = 999.78\mathrm{kg/m^3}$，動粘性係数 $\nu = 2.565 \times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，温度伝導係数 $\alpha = 1.333 \times 10^{-7}\mathrm{m^2/s}$ である．

本計算では，スラリー中の氷粒子はすべて直径 $D$ の球形低温粒子（以下ではこの粒子を氷粒子と称する）としてみなし，流体密度 $\rho_\mathrm{f}$ と氷粒子密度 $\rho_\mathrm{p}$ は等しく，氷粒子は中立浮遊しているものと仮定する．この氷粒子の質量 $M$ と慣性行列 $\boldsymbol{I}$ はそれぞれ，$M = \rho_\mathrm{p}(\pi D^3/6)$，$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(I, I, I)$（$I = MD^2/10$ は慣性モーメント）で表される．また，幅 $H$ のダクトにおいて，氷粒子は一定の長さ $L$ ごとに一定の体積割合で含まれるものとし（Fig. 1 参照），流れ方向に圧力差 $\Delta p$ を設けることで，これらの氷粒子が流動していく．

ダクト壁面は一定温度 $T_\mathrm{w} = 1$ で加熱されており，氷粒子は融解熱によって一定の温度（融点）に保たれているものとして，$T_\mathrm{p} = 0$ で一定とする．ここで，本計算に

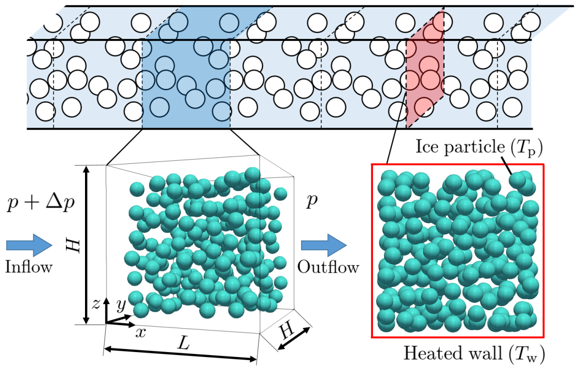


Fig. 1: Modeled system for a thermal flow in a heated square duct with moving ice particles.

おける仮定として，氷粒子形状は溶融・凝固によって変化せず，流体および氷粒子の物性値は一定とし，熱膨張による浮力も無視する．

この系は，以下で定義される IPF と管径比 DR によって幾何学的に特徴づけられる．

$$\mathrm{IPF}=\frac{N_\mathrm{p}\pi D^3}{6H^2L}, \tag{1}$$

$$\mathrm{DR}=\frac{D}{H}, \tag{2}$$

ここで，$N_\mathrm{p}$ は氷粒子の個数である．式 (1) は氷スラリー中の氷粒子の体積割合を表しており，本研究では流体と氷粒子の密度を等しいものと仮定しているため，この IPF は質量割合も表現していることに注意されたい．また，本計算では，すべての計算において管径比を $\mathrm{DR}=0.1$ で一定とした．

### 2.2 支配方程式

流体の運動は，以下に示す非圧縮性粘性流体の連続の式および Navier–Stokes 方程式で記述される．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho_\mathrm{f}}\boldsymbol{\nabla}p+\nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}, \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$，$p(\boldsymbol{x},t)$ はそれぞれ位置 $\boldsymbol{x}$, 時刻 $t$ における流速および圧力である．また，温度は次の移流–拡散方程式に従う．

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}T=\alpha\boldsymbol{\nabla}^2T, \tag{5}$$

ここで，$T(\boldsymbol{x},t)$ は位置 $\boldsymbol{x}$, 時刻 $t$ における流体の温度である．式 (3)–(5) の支配パラメータは，レイノルズ数 $Re$ およびプラントル数 $Pr$ であり．以下のように定義される．

$$Re=\frac{U_\mathrm{ref}H}{\nu}, \tag{6}$$

$$Pr=\frac{\nu}{\alpha}, \tag{7}$$

ここで，$U_\mathrm{ref}$ は氷粒子を含んだ定常流れにおける断面平均流速である．

一方で，氷粒子の重心の速度 $\boldsymbol{U}_\mathrm{p}$ および角速度 $\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}$ は，以下のニュートンの運動方程式によって計算される．

$$M\frac{d\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_\mathrm{f}(t)+\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)}{dt}&+\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)\times\left(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)\right)\\&=\boldsymbol{S}^\mathrm{T}(t)\left(\boldsymbol{T}_\mathrm{f}(t)+\boldsymbol{T}_\mathrm{i}(t)\right),\end{aligned} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{F}_\mathrm{f}(t)$，$\boldsymbol{T}_\mathrm{f}(t)$ はそれぞれ氷粒子が流体から受ける力とトルク，$\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t)$，$\boldsymbol{T}_\mathrm{i}(t)$ は粒子同士の相互作用および壁との衝突により受ける力とトルクであり，$\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t)$ と $\boldsymbol{T}_\mathrm{i}(t)$ の計算については3.4節で述べる．$\boldsymbol{F}_\mathrm{f}(t)$ と $\boldsymbol{T}_\mathrm{f}(t)$ の計算については，文献 [3] を参照されたい．また，$\boldsymbol{S}(t)$ は，氷粒子に固定された座標系から空間に固定された座標系への変換行列であり，$\boldsymbol{S}$ はクオータニオン $\boldsymbol{Q}(t)=(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)^\mathrm{T}$ を用いて，

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} q_0^2-q_2^2-q_3^2+q_1^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2)\\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_3^2-q_1^2+q_2^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1)\\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}, \tag{10}$$

と表される．これより，氷粒子の位置と速度および姿勢と角速度の関係式は以下のように表される．

$$\frac{d\boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t)}{dt}=\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t), \tag{11}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Q}(t)}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}(t), \tag{12}$$

ただし，$\boldsymbol{A}(t)$ は 4 行 4 列の行列であり，角速度 $\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)^\mathrm{T}$ を用いて，

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3\\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2\\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{bmatrix}, \tag{13}$$

と記述される．氷粒子の表面では，すべりなし条件および等温条件が満たされるように，式 (3)–(5) と式 (8)–(13) を連成させて解くことになる．

## 3. 計算手法

本研究では，当研究グループによって提案された熱 IB-LBM [5] を改良した手法を用いる．具体的には，温度場の計算に，optimal two-relaxation-time thermal lattice Boltzmann method（OTRT-TLBM） [6] を用いる．これは，高レイノルズ数における数値安定性を高めるためである．

一般に，熱 IB-LBM はアルゴリズムが簡単であり，並列計算に適している格子ボルツマン法 [7]（Lattice Boltzmann Method : LBM）と，任意形状の境界を扱う問題に対して複雑なメッシュ生成がなく，アルゴリズムが単純である埋め込み境界法 [8, 9]（Immersed Boundary Method: IBM）を組み合わせた手法であり，氷スラリーのような移動境界を伴う熱流動問題に対して有効であると考えられる．また，反復的に物体境界上の計算を行うことで，すべりなし境界条件と等温境界条件をより強く強制できることも知られている．

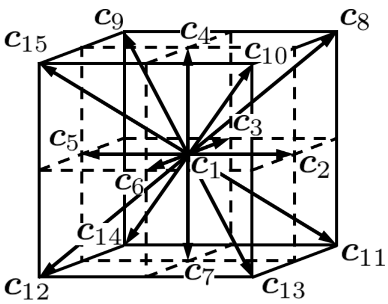


Fig. 2: Three-dimensional 15-velocity model.

### 3.1 熱を考慮した格子ボルツマン法

格子ボルツマン法（LBM）とは，流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体として近似し，各仮想粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し，得られた速度分布関数のモーメントから巨視的変数（流速，圧力，温度など）を求める数値計算手法である．本節では，非圧縮性粘性流体に対する LBM について述べる．なお，使用される物理量の無次元化については付録 A を参照されたい．

格子気体モデルとして，Fig. 2 に示す 3 次元 15 速度モデルを用いた．この速度モデルの粒子速度 $\boldsymbol{c}_i (i = 1, 2, ..., 15)$ は，以下のように与えられる．

$$[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4, \boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{c}_8, \boldsymbol{c}_9, \boldsymbol{c}_{10}, \boldsymbol{c}_{11}, \boldsymbol{c}_{12}, \boldsymbol{c}_{13}, \boldsymbol{c}_{14}, \boldsymbol{c}_{15}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

本手法では，流れ場と温度場を表現するため，座標 $\boldsymbol{x}$ および時刻 $t$ における速度 $\boldsymbol{c}_i$ をもつ仮想粒子の速度分布関数 $f_i(\boldsymbol{x}, t)$，$g_i(\boldsymbol{x}, t)$ を導入する．速度分布関数 $f_i$，$g_i$ の時間発展は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t) =& f_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau_f}[f_i(\boldsymbol{x}, t) \\ &- f_i^{\mathrm{eq}}(p(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} g_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t) =& g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t) - \left(1 - \frac{1}{\tau_g}\right)[g_{\bar{i}}(\boldsymbol{x}, t) \\ &- g_{\bar{i}}^{\mathrm{eq}}(T(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))], \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，$\Delta x$ は格子幅，$\Delta t$ は時間刻み（仮想粒子が隣の格子点まで移動する時間），$\tau_f$，$\tau_g$ は緩和時間であり，$\bar{i}$ は $\boldsymbol{c}_{\bar{i}} = -\boldsymbol{c}_i$ となる番号を表す．なお，$g_i$ の時間発展に OTRT-TLBM [6] を用いている点が従来の熱 IB-LBM [5] からの改良点である．また，式 (15) および (16) 中の局所平衡分布関数 $f_i^{\mathrm{eq}}$，$g_i^{\mathrm{eq}}$ は，次式で与えられる．

$$f_i^{\mathrm{eq}}(p, \boldsymbol{u}) = E_i \left[3p + 3\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{u} + \frac{9}{2}(\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{u})^2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\right], \tag{17}$$

$$g_i^{\mathrm{eq}}(T, \boldsymbol{u}) = E_i T \left(1 + 3\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{u}\right), \tag{18}$$

ここで，$E_i$ は LBM が Navier–Stokes 方程式および温度の移流拡散方程式に帰着するように決められる定数であり，本研究では 3 次元 15 速度モデルを扱うため，$E_i$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &E_1 = 2/9, \\ &E_2 = \cdots = E_7 = 1/9, \\ &E_8 = \cdots = E_{15} = 1/72. \end{aligned} \tag{19}$$

巨視的変数である圧力 $p$，流速 $\boldsymbol{u}$，温度 $T$ および熱流束 $\boldsymbol{q}$ は，以下のように計算される．

$$p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{15} f_i, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{15} \boldsymbol{c}_i f_i, \tag{21}$$

$$T = \sum_{i=1}^{15} g_i, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{15} g_i(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u}). \tag{23}$$

動粘性係数 $\nu$，温度伝導係数 $\alpha$ および熱伝導係数 $\lambda$ は，以下のように与えられる．

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\tau_f - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \tag{24}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(\tau_g - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \tag{25}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\tau_g \Delta x. \tag{26}$$

なお，外力および熱量を考慮する場合には，$\boldsymbol{g}$ を体積力，$Q$ を熱量として，以下のように時間発展する．

**1**. 外力，熱量なしで時間発展する．

$$\begin{aligned} f_i^*(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t) =& f_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau_f}[f(\boldsymbol{x}, t) \\ &- f_i^{\mathrm{eq}}(p(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))], \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} g_i^*(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x, t + \Delta t) =& g_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x}, t) - \left(1 - \frac{1}{\tau_g}\right)[g_{\bar{i}}(\boldsymbol{x}, t) \\ &- g_{\bar{i}}^{\mathrm{eq}}(T(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))]. \end{aligned} \tag{28}$$

**2**. $f_i^*$, $g_i^*$ をそれぞれ外力，熱量によって補正する．

$$f_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t), \tag{29}$$

$$g_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = g_i^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + \Delta x \frac{\alpha}{\lambda} E_i Q(\boldsymbol{x}, t + \Delta t), \tag{30}$$

ここで，$\lambda/\alpha$ はみかけの熱容量である．

### 3.2 埋め込み境界法

本研究では任意形状の境界上ですべりなし境界条件および等温境界条件を満たすために，埋め込み境界法を用いる．流れ場における埋め込み境界法は，境界の内外が同種の非圧縮粘性流体で満たされているとみなし，境界近傍に適切な体積力を加えることにより，境界上でのす

べりなし境界条件を満足させる方法である．同じく，温度場における埋め込み境界法は境界近傍に適切な熱量を加えることにより，境界上の等温境界条件を満足させる方法である．また，反復的に物体境界上の体積力と熱量の計算を行うことで，すべりなし境界条件と等温境界条件をより強く強制できる．この手法の詳細は Suzuki et al. の参考文献 (5) を参照されたい．なお，この参考文献では二次元の系における埋め込み境界法を用いているが，三次元の系においても同じアルゴリズムで計算することができる．

### 3.3　氷粒子の運動

次のステップ $t+\Delta t$ における氷粒子の速度 $\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t+\Delta t)$ および角速度 $\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t+\Delta t)$ は，オイラーの陽解法を用いて式 (8)，(9) を離散化することで，以下のように求められる．

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t+\Delta t)=\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t)+\frac{\Delta t}{Sh}\frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{f}(t)+\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t)}{M}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t+\Delta t)=\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)\;+\;\frac{\Delta t}{Sh}\,\boldsymbol{I}^{-1}\big[&\boldsymbol{S}^\mathrm{T}(t)\big(\boldsymbol{T}_\mathrm{f}(t)+\boldsymbol{T}_\mathrm{i}(t)\big)\\ &-\;\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)\times\big(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{p}(t)\big)\big],\end{aligned} \tag{32}$$

ここで，$Sh$ は LBM におけるストローハル数である（定義の詳細は付録 A を参照）．また，次のステップにおける氷粒子の重心位置 $\boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t+\Delta t)$ も，式 (11) をオイラーの陽解法により離散化し，以下のように求める．

$$\boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t)+\frac{\Delta t}{Sh}\,\boldsymbol{U}_\mathrm{p}(t), \tag{33}$$

一方で，氷粒子の姿勢 $\boldsymbol{Q}(t+\Delta t)$ は，式 (12) を修正オイラー法により離散化し，以下のように求める．

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{Q}}(t+\Delta t)=\boldsymbol{Q}(t)+\dfrac{\Delta t}{Sh}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}(t),\\[2ex] \boldsymbol{Q}(t+\Delta t)=\boldsymbol{Q}(t)+\dfrac{\Delta t}{2Sh}[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}(t)\\[2ex] \qquad\qquad\qquad +\boldsymbol{A}(t+\Delta t)\tilde{\boldsymbol{Q}}(t+\Delta t)].\end{cases} \tag{34}$$

### 3.4　衝突モデル

流体中の多数の氷粒子の運動を計算する際，氷粒子が他の氷粒子や壁を貫通することを防ぐために衝突モデルが必要となる．近年の研究では，円柱や球といった粒子に対して衝突した際に反発力や付着力を与えるモデルが考案されている．このモデルに応じて，$\boldsymbol{F}_\mathrm{i}$ および $\boldsymbol{T}_\mathrm{i}$ が決定される．衝突モデルの詳細を以下に示す．

#### 3.4.1　反発モデル

本研究では，Feng and Michaelides (10) の方法を参考に，ある氷粒子 $i$ が他の氷粒子 $j$ と衝突した際に反発力 $\boldsymbol{F}_{ij}^\mathrm{rep,p}$ を，壁と衝突した際に反発力 $\boldsymbol{F}_i^\mathrm{rep,w}$ を生じさせるモデルを使用した．氷粒子 $i$ が氷粒子 $j$ から受ける反発力 $\boldsymbol{F}_{ij}^\mathrm{rep,p}$ は，以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{F}_{ij}^\mathrm{rep,p}=\begin{cases}\dfrac{c_{ij}}{\epsilon_\mathrm{p}}\left(\dfrac{d_{ij}-R_i-R_j-\zeta}{\zeta}\right)^2\left(\dfrac{\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j}{d_{ij}}\right), & \\ \qquad\qquad d_{ij}\le R_i+R_j+\zeta, & \\ 0, \qquad d_{ij}>R_i+R_j+\zeta, & \end{cases} \tag{35}$$

ここで，$c_{ij}$ は衝突パラメータ，$\epsilon_\mathrm{p}$ は剛性パラメータ，$d_{ij}=|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j|$ は氷粒子間の中心距離，$R_i$，$R_j$ は氷粒子の半径，$\zeta$ は反発力が作用する領域，$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{X}_j$ は氷粒子の中心座標である．本計算では，$c_{ij}=MU_\mathrm{ref}^2/D$，$\epsilon_\mathrm{p}=0.1$ とし，埋め込み境界法の有効範囲に氷粒子が接した際に上記の反発力を作用させるため，$\zeta=2\Delta x$ とした．

氷粒子が壁に衝突する際も同様の方法を用いて，反発力 $\boldsymbol{F}_i^\mathrm{rep,w}$ は以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{F}_i^\mathrm{rep,w}=\begin{cases}\dfrac{c_{ij}}{\epsilon_\mathrm{w}}\left(\dfrac{d_\mathrm{iw}-R_i-\zeta}{\zeta}\right)^2\left(\dfrac{\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_\mathrm{w}}{d_\mathrm{iw}}\right), & \\ \qquad\qquad d_\mathrm{iw}\le R_i+\zeta, & \\ 0, \qquad d_\mathrm{iw}>R_i+\zeta, & \end{cases} \tag{36}$$

ここで，$\boldsymbol{X}_\mathrm{w}$ は壁の座標，$\epsilon_\mathrm{w}$ は剛性パラメータ，$d_\mathrm{iw}=|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_\mathrm{w}|$ は氷粒子の中心と壁の距離である．本計算では，$\epsilon_\mathrm{w}=0.1$ とした．求めた $\boldsymbol{F}_{ij}^\mathrm{rep,p}$ および $\boldsymbol{F}_i^\mathrm{rep,w}$ を式 (8)，(31) の $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}$ に代入することで反発を表現する．

#### 3.4.2　付着モデル

本研究では，Fogelson and Guy (11) の方法を参考に，ある氷粒子 $i$ が他の氷粒子 $j$ と衝突した際に拘束力 $\boldsymbol{F}_{i,j}^\mathrm{adh,p}$ およびトルク $\boldsymbol{T}_{i,j}^\mathrm{adh,p}$ を生じさせるモデルを使用する．付着モデルの計算は以下の手順で行う．

**Step 1.** 拘束点を配置し，ばねとダンパで繋ぐ．

氷粒子 $i$ が氷粒子 $j$ に衝突したとき，すなわち，氷粒子間の中心距離 $d_{ij}\le R_i+R_j+\zeta$ となったとき，Fig. 3 のように拘束点を各氷粒子の表面上に 3 点ずつ配置する．この 3 点は，氷粒子中心間を結ぶ直線に対して垂直かつ氷粒子中心を含んだ面において，氷粒子に内接する正三角形の頂点に配置される．また，各拘束点間を結ぶ直線は，氷粒子中心間を結ぶ直線と平行であり，このときの中心間距離 $d_{ij}$ は各拘束点間距離 $d_{ij}^\mathrm{ref}$ と等しい．さらに，Fig. 3 のように拘束点同士をばね（自然長 : $d_{ij}^\mathrm{ref}$）とダンパで繋ぎ，氷粒子同士を拘束する．このように 3 点で拘束することで，氷粒子同士の相対的な運動（並進・回転）を抑制できる．

**Step 2.** 拘束点に作用する力を計算する．

3 点の拘束点距離と相対速度から，各拘束点に作用する力 $\boldsymbol{F}_{ij,k}^\mathrm{adh}$ $(k=1,2,3)$ を計算する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{ij,k}^\mathrm{adh}=-k_\mathrm{t}(d_{ij,k}-d_{ij}^\mathrm{ref})&\frac{\boldsymbol{x}_{i,k}^\mathrm{adh}-\boldsymbol{x}_{j,k}^\mathrm{adh}}{d_{ij}}\\ &-c_\mathrm{t}(\boldsymbol{u}_{i,k}^\mathrm{adh}-\boldsymbol{u}_{j,k}^\mathrm{adh}),\end{aligned} \tag{37}$$

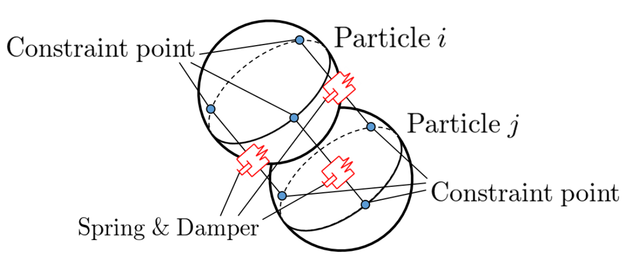


Fig. 3: Illustration of the adhesion model.

ここで，$d_{ij,k}$ は各時刻における拘束点間距離，$\boldsymbol{x}_{i,k}^{\mathrm{adh}}$，$\boldsymbol{x}_{j,k}^{\mathrm{adh}}$ は拘束点の座標，$\boldsymbol{u}_{i,k}^{\mathrm{adh}}$，$\boldsymbol{u}_{j,k}^{\mathrm{adh}}$ は拘束点の移動速度，$k_{\mathrm{t}}$ はばね定数，$c_{\mathrm{t}}$ はダンパ定数である．本計算では，無次元ばね定数 $N_{\mathrm{k}} = k_{\mathrm{t}}/\rho_{\mathrm{f}} U_{\mathrm{ref}}^2 = 10.0$，無次元ダンパ定数 $N_{\mathrm{c}} = c_{\mathrm{t}}/\rho_{\mathrm{f}} U_{\mathrm{ref}} D = 1.0\times10^{-3}$ となるように $k_{\mathrm{t}}$ と $c_{\mathrm{t}}$ を定めた．

**Step 3.** 氷粒子中心に作用する力 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{adh}}$ およびトルク $\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{adh}}$ を計算する．

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{adh}} = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{F}_{ij,k}^{\mathrm{adh}}, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{adh}} = \sum_{k=1}^{3} [(\boldsymbol{x}_{i\mathrm{a}} - \boldsymbol{X}_i) \times \boldsymbol{F}_{ij,k}^{\mathrm{adh}}]. \tag{39}$$

一度付着した氷粒子 $i$，$j$ は，拘束力を与え続け離れないようにする．求めた $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{adh}}$ および $\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{adh}}$ を式 (8)，(31) の $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}$ および式 (9)，(32) の $\boldsymbol{T}_{\mathrm{i}}$ に代入することで付着を表現する．また，氷粒子が壁に衝突した際は付着はせず，式 (36) を用いて反発力を与える．

## 4. 計算結果および考察

### 4.1 計算条件

2.1 節で述べたように，本研究では無限に長い正方形ダクトを想定している．これを数値計算上で再現するために，計算領域を $L \times H \times H = 150\Delta x \times 150\Delta x \times 150\Delta x$ とし，領域の入口と出口に圧力差 $\Delta p$ のある周期境界条件を用いる．温度場についても同様に，領域の入口と出口に周期境界条件を用いる．初期において，領域内の温度は $T = 0$ であり，流れ場は定常状態の三次元ポアズイユ流になっている．また，上下の壁面には，流れ場に対してすべりなし境界条件，温度場に対して等温境界条件（$T_{\mathrm{w}} = 1$）を用いる．この領域中に，直径 $D = 15\Delta x$ の氷粒子をランダムに配置する．氷粒子表面には，埋め込み境界法に基づくすべりなし境界条件および等温境界条件（$T_0 = 0$）を与える．また，プラントル数を $Pr = 19.2$ とし，レイノルズ数および IPF を変化させ計算を行った．なお，本計算では設定したレイノルズを一定とするため，氷粒子を含んだ定常流れにおける断面平均流速が $U_{\mathrm{ref}} = 0.05$ となるように圧力差 $\Delta p$ を制御している．

### 4.2 レイノルズ数の影響

まず，レイノルズ数の影響を調べるため，$Re$ を 200 から 1000 まで変化させて計算を行った．このときの IPF を約 10%（$N_{\mathrm{p}} = 191$）とし，各 $Re$ の氷粒子初期配置は等しいものする．また，氷粒子同士が衝突した際には反発するモデル [(10)] を使用する．Fig. 4 に，各レイノルズ数に対する全ダクト壁面の平均ヌッセルト数の時間変化を示す．なお，全ダクト壁面の平均ヌッセルト数 $\overline{Nu}$ は，以下のように定義する．

$$Nu = \frac{H(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{w}})}{\lambda(T_1 - T_0)}, \tag{40}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{4H^2}\int_{\boldsymbol{x}\in S} Nu\, d\boldsymbol{x}, \tag{41}$$

ここで，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{w}}$ は壁面の単位法線ベクトル，$S$ は全ダクト壁面であり，式 (23) を用いて壁面上の熱流束 $\boldsymbol{q}$ を求めることで $\overline{Nu}$ を計測する．Fig. 4 より，計算初期において高い値を示していた平均ヌッセルト数が，時間経過とともに一定の値に落ち着いていることがわかる．また，レイノルズ数が高いほど，平均ヌッセルト数が増加する

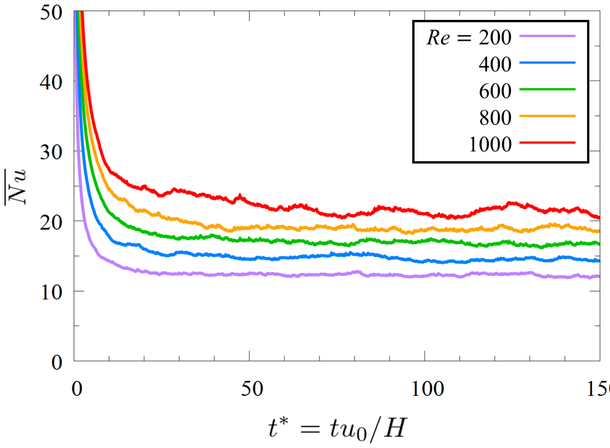


Fig. 4: Time variations of the averaged Nusselt number of the whole wall of the duct for various values of $Re$.

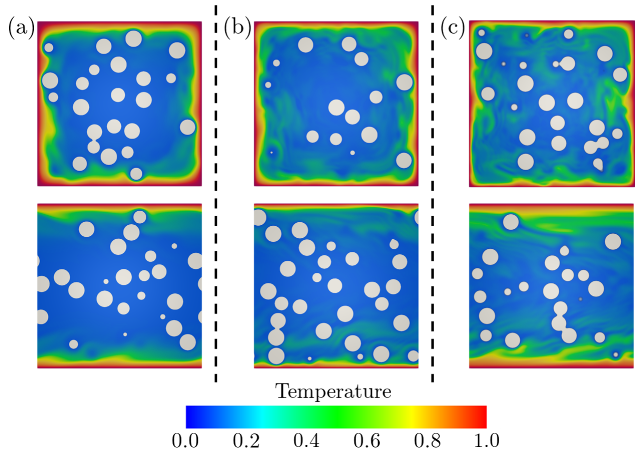


Fig. 5: Snapshots of the temperature fields viewed from the outlet (upper) and side (lower) of the duct for (a) $Re = 200$, (b) 600, and (c) 1000 at $t^* = 150$.

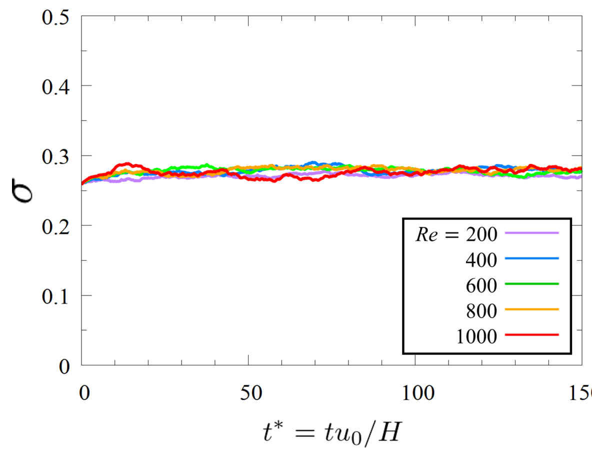


Fig. 6: Time variations of the standard deviation of particle distribution for various values of $Re$.

傾向にあることがわかる．これは，レイノルズ数が高くなるほど熱の拡散に対する流体の速度が増加するため，ダクト中を氷粒子がより頻繁に通過するようになり，熱源近くの温度境界層が大きく乱されたことが原因であると考えられる．このことは，Fig. 5 に示した無次元時間 $t^* = tU_{\rm ref}/H = 150$ における温度分布図を見ても確認できる．

次に，ダクト内を流れる氷粒子のばらつきを評価するため，以下のような式を定義した．

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_{\rm p}-1}\sum_{i=1}^{N_{\rm p}}\left(r_i - r_{\rm ave}\right)^2}, \tag{42}$$

ここで，$r_i$ は流路幅の半値幅 $0.5H$ によって無次元化された各氷粒子中心と流路中心の距離，$r_{\rm ave}$ は $r_i$ のアンサンブル平均，$\sigma$ は $r_i$ の標本標準偏差であり，氷粒子の断面方向へのばらつきを表す．Fig. 6 に各レイノルズ数に対する氷粒子のばらつき $\sigma$ の時間変化を示す．Fig. 6 から，どのレイノルズ数においても氷粒子のばらつきに大きな変化は見られず，レイノルズ数によって氷粒子のばらつきに差が生じないことが確認できる．なお，実験 [2] では，粒子の分布に偏りが生じることがわかっているが，この違いは本研究において流体と粒子の密度を等しくし，重力の影響を無視していることが要因の一つとして考えられる．

### 4.3　氷充填率の影響

次に，氷充填率の影響を調べるため，IPF を 2.5% から 15.0% まで変化させて計算を行った．このときのレイノルズ数を $Re = 1000$ とした．また，氷粒子同士が衝突した際には反発するモデル [10] を使用する．Fig. 7 に，各 IPF に対する全ダクト壁面の平均ヌッセルト数の時間変化を示す．この図から，Fig. 4 の場合と同様に，$\overline{Nu}$ の値は最初に大きく減少し，その後ほぼ一定値に収束している．また，IPF が増加するほど，平均ヌッセルト数が高くなることがわかる．これは，IPF が高い，すなわち氷粒子の数が多いほど，氷粒子同士が頻繁に衝突するため，壁面から受ける反力に逆らい氷粒子が熱源近くに多く点在し，これらの氷粒子によって熱源周りの流体が冷やされたことが原因と考えられる．また，IPF の増加に伴い，氷粒子の表面積が増加したことも要因の一つとして挙げられる．このことは，Fig. 8 に示した無次元時間 $t^* = 150$ の温度分布図において，IPF が増加するにつれて流体の温度が全体的に低下していることとも対応している．

次に，ダクト内を流れる氷粒子のばらつきを評価した．Fig. 9 に各 IPF に対する氷粒子のばらつき $\sigma$ の時間変化を示す．Fig. 9 を見ると，Fig. 6 に比べて氷粒子のばらつきに差が生じたものの，各 IPF において計算初期からの変動量は小さく，2.5%≤IPF≤15.0% の範囲では，初期配置と概ね等しいばらつきで流動していることが確認できる．この点に加え，IPF の増加に伴い氷粒子の個数が多くなることから，熱源である壁面近くに存在する氷粒子の個数も IPF に依存すると考えられる．

次に，平均ヌッセルト数と IPF の関係を実験結果と比較した．Fig. 10 に，全ダクト壁面の平均ヌッセルト数と IPF の関係を示す．なお，本計算結果の平均ヌッセルト数は，無次元時間 $t^* = 150$ における値をプロットしている．Fig. 10 より，平均ヌッセルト数は実験値と概ね近い

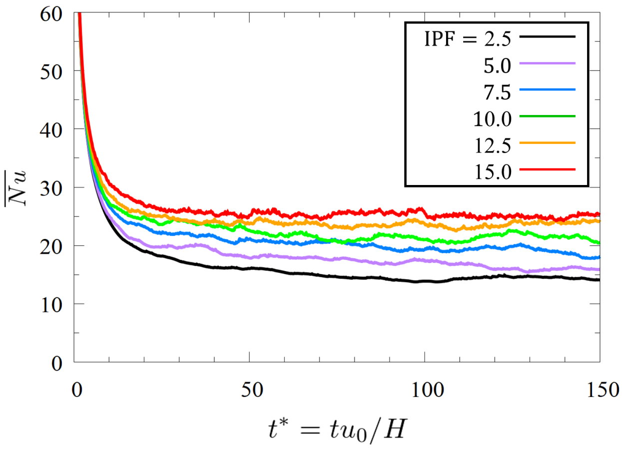


Fig. 7: Time variations of the averaged Nusselt number of the whole wall of the duct for various values of IPF.

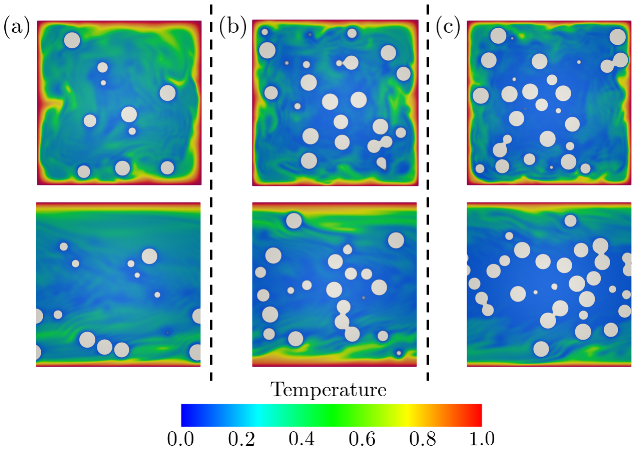


Fig. 8: Snapshots of the temperature fields viewed from the outlet (upper) and side (lower) of the duct for (a) IPF = 4.9%, (b) 10.0%, and (c) 15.0% at $t^* = 150$.

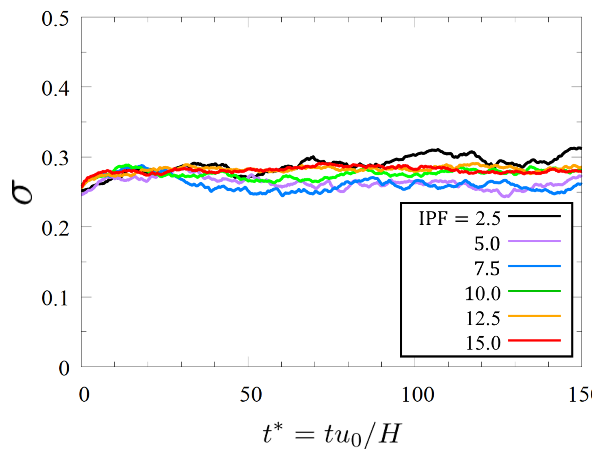


Fig. 9: Time variations of the standard deviation of particle distribution for various values of IPF.

値を示しており，IPF が高くなるほど平均ヌッセルト数が増加するという傾向は捉えているものの，IPF に対する平均ヌッセルト数の増加率が実験値よりも低い結果となった．これは，本計算におけるダクトの幅と氷粒子直

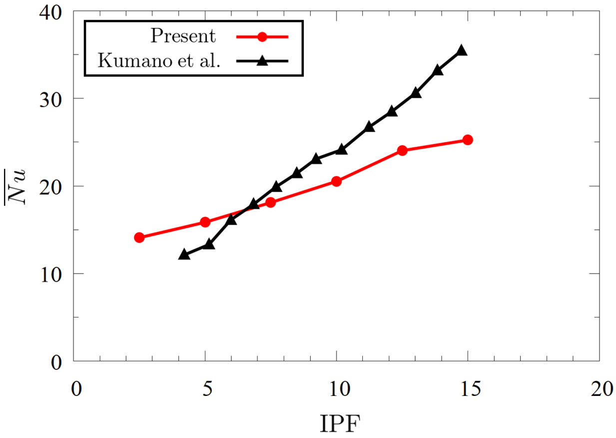


Fig. 10: Relationship between Nusselt number and IPF. The available experimental result by Kumano et al. [(2)] is also shown for comparison.

径の比が実験よりも大きいことや，氷粒子形状が実際のスラリーとは異なり同一の大きさの球状粒子であることなどが原因として考えられる．

### 4.4　付着の影響

最後に，氷粒子の付着の影響を調べるため，付着モデルを導入し計算を行った．支配パラメータとして，レイノルズ数を $Re = 1000$，プラントル数を $Pr = 19.2$ とし，氷充填率が IPF $= 5.0, 10.0, 15.0\%$ の 3 パターンの計算を行った．

Fig. 11 に，各 IPF に対する全ダクト壁面の平均ヌッセルト数の時間変化を示す．Fig. 11 より，反発モデルを用いた場合に比べ，付着モデルの方が平均ヌッセルト数が低下していることがわかる．これは，氷粒子同士が付着したことで氷粒子の実効的な表面積が減少し，氷粒子の吸熱量が全体的に減少したことに加え，付着により，氷粒子の分布に偏りが生じ，壁面近くに点在する氷粒子の数が減少したことが原因として考えられる．

Fig. 12 に IPF $= 10.0\%$ の無次元時間 $t^* = 150$ における氷粒子と温度場を示す．(a) より，氷粒子同士が付着し，クラスタ状になっていることがわかる．また，(b) より，クラスタ状になった氷粒子がダクトの片方の壁面に寄っていることがわかる．このために，氷粒子が離れた方の壁面近くの温度が高くなっており，温度分布が反発モデルのときよりも不均一になったと考えられる．このことは，付着により平均ヌッセルト数が減少したこととも対応している．

## 5.　結言

熱 IB–LBM を用いて三次元管内における氷スラリーの熱流動解析を行った．

まず，レイノルズ数の影響を調べたところ以下の結論を得た．

- IPF=10.0%とし，レイノルズ数を変えて計算を行ったところ，レイノルズ数が高いほど熱の拡散に対する流体の速度が増加し，壁面近くの温度場が乱されるため，境界における平均ヌッセルト数が増加する傾向にある．

次に，レイノルズ数 $Re = 1000$ とし IPF を変えて計算を行ったところ，以下の結論を得た．

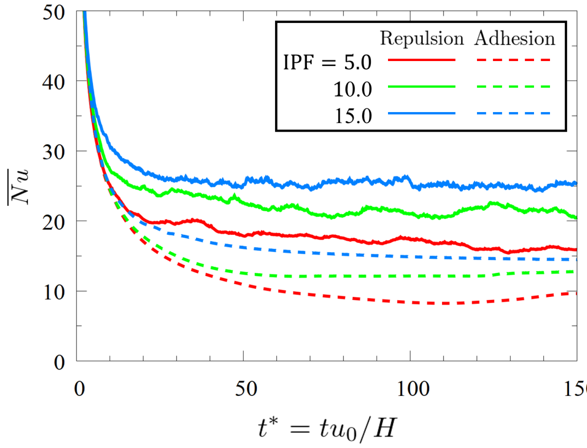


Fig. 11: Time variations of the averaged Nusselt number of the whole wall of the duct with repulsion model and adhesion model for various values of IPFs.

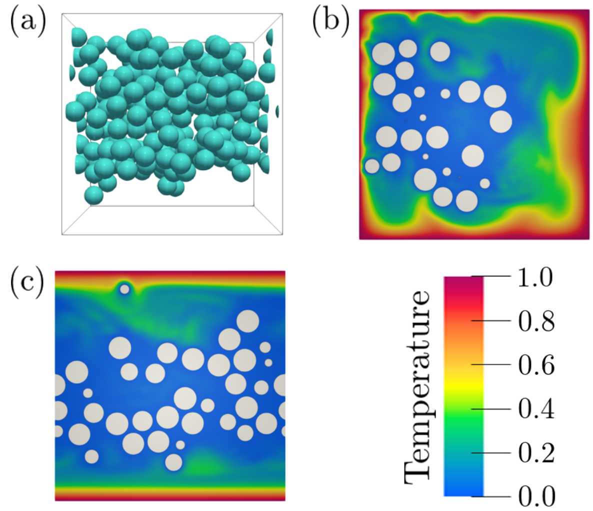


Fig. 12: Snapshots of (a) ice particle, (b) the temperature field viewed from the outlet of the duct, and (c) temperature field viewed from the side of the duct for IPF $= 10.0\%$ at $t^* = 150$.

- IPF が高くなるほど境界付近に氷粒子が多く点在するため，壁面上の平均ヌッセルト数が増加する．
- 平均ヌッセルト数は文献 [(2)] の結果の傾向を捉えており，値も概ね一致しているものの，IPF に対する平均ヌッセルト数の増加率が実験値よりも低いため，モデルの改良が必要であると考えられる．

最後に，付着モデルを導入し計算を行ったところ，以下の結論を得た．

- 氷粒子同士が付着し，クラスタ状になることが確認できた．氷粒子がクラスタ状になることで氷粒子の表面積が減少し，壁面近くに点在する氷粒子数が少なくなるのに伴い，平均ヌッセルト数も低下した．

今後の課題として，氷粒子形状の変更および溶融・凝固による氷粒子形状の変形を考慮した計算を行い，実際の氷スラリーに近づけていくことが必要である．

## 付録 A　無次元量の定義

本手法で用いる無次元変数の定義を以下に示す．使用される物理量はすべて，代表長さ $\hat{L}_0$，粒子の代表速さ $\hat{c}$，時間スケール $\hat{t}_0 = \hat{L}_0/\hat{U}_0$（$\hat{U}_0$: 流れの代表速さ），基準密度 $\hat{\rho}_\mathrm{f}$，基準温度差 $\Delta\hat{T}_0$，基準温度 $\hat{T}_0$，定圧比熱 $\hat{c}_\mathrm{pf}$ を用いて無次元化したものである．

$$\left.\begin{array}{ll}
\boldsymbol{c}_i = \hat{\boldsymbol{c}}_i/\hat{c}, & \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}/\hat{L}_0, \\
t = \hat{t}/\hat{t}_0, & \Delta x = \Delta\hat{x}/\hat{L}_0, \\
\Delta t = \Delta\hat{t}/\hat{t}_0, & f_i = \hat{f}_i/\hat{\rho}_\mathrm{f}, \\
g_i = (\hat{g}_i - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \rho = \hat{\rho}/\hat{\rho}_\mathrm{f}, \\
p = \hat{p}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}^2), & \boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}/\hat{c}, \\
T = (\hat{T} - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \nu = \hat{\nu}/(\hat{c}\hat{L}_0), \\
\alpha = \hat{\alpha}/(\hat{c}\hat{L}_0), & \lambda = \hat{\lambda}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}_\mathrm{pf}\hat{c}\hat{L}_0), \\
\boldsymbol{g} = \hat{\boldsymbol{g}}\hat{L}_0/(\rho_\mathrm{f}\hat{c}^2), & Q = \hat{Q}\hat{L}_0/(\rho_\mathrm{f}\hat{c}_\mathrm{pf}\Delta\hat{T}_0\hat{c}), \\
\boldsymbol{X}_k = \hat{\boldsymbol{X}}_k/\hat{L}_0, & \boldsymbol{U}_k = \hat{\boldsymbol{U}}_k/\hat{c}, \\
T_k = (\hat{T}_k - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, &
\end{array}\right\} \tag{43}$$

ここで，$\hat{}$ は有次元量を表す．なお，ストローハル数 $Sh$ を $Sh = \hat{U}_0/\hat{c}$ と定義すると，$Sh = \Delta t/\Delta x$ であることに注意されたい．

## 参考文献

(1) Wang, J., Battaglia, F., Wang, S., Zhang, T. and Ma, Z., "Flow and heat transfer characteristics of ice slurry in typical components of cooling systems: A review," Int. J. Heat Mass Transf., 141 (2019), pp. 922–939.

(2) Kumano, H., Asaoka, T. and Sawada, S., "Effect of initial aqueous solution concentration and heating conditions on heat transfer characteristics of ice slurry," Int. J. Refrig., 41 (2014), pp. 72–81.

(3) Suzuki, K. and Inamuro, T., "Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method," Comput. Fluids, 49 (2011), pp. 173–187.

(4) 川崎剛史, 吉野正人, 鈴木康祐, "熱を考慮した埋め込み境界–格子ボルツマン法を用いた管内における氷スラリーの熱流動解析," 第 32 回数値流体シンポジウム講演論文集 (2018).

(5) Suzuki, K., Kawasaki, T., Furumachi, N., Tai, Y. and Yoshino, M., "A thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method for moving-boundary flows with Dirichlet and Neumann conditions," Int. J. Heat Mass Transf., 121 (2018), pp. 1099–1117.

(6) Ginzburg, I., Humières, D.D. and Kuzmin, A., "Optimal stability of advection-diffusion lattice Boltzmann models with two relaxation times for positive/negative equilibrium," J. Stat. Phys., 139 (2010), pp. 1090–1143.

(7) Yoshino, M. and Inamuro, T., "Lattice Boltzmann simulations for flow and heat/mass transfer problems in a three-dimensional porous structure," Int. J. Numer. Methods Fluids, 43 (2003), pp. 183–198.

(8) Peskin, C. S., "Flow patterns around heart valves: a numerical method," J. Comput. Phys., 10 (1972), pp. 252–271.

(9) Peskin, C. S., "Numerical analysis of blood flow in the heart," J. Comput. Phys., 25 (1977), pp. 220–252.

(10) Feng, Z. G. and Michaelides, E. E., "Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows," J. Comput. Phys., 202 (2005), pp. 20–51.

(11) Fogelson, A. L. and Guy, R. D., "Platelet-wall interactions in continuum models of platelet thrombosis: formulation and numerical solution," Math. Med. Biol., 21 (2004), pp. 293–334.