

体心立方格子ボルツマン法によるチャネル乱流の直接数値解析

Direct numerical simulation of turbulent channel flow by body-centred cubic lattice Boltzmann method

○ 國嶋雄一, 九大, 福岡市西区元岡 744, E-mail : ykunishima@mech.kyushu-u.ac.jp
Yuichi Kunishima, Kyushu University, 744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395 Japan

This research attempts to improve stability and reproducibility of lattice Boltzmann method (LBM) for turbulent flow. Single relaxation time LBM suffers from instability as grid Reynolds number becomes large. From the point of the discrete particle velocity set, D3Q27 which includes two sets of sub-lattice is more stable and accurate than one sub-lattice models, D3Q15 and D3Q19. Remarking length ratio of main lattice and 1st sub-lattice, we propose an one sub-lattice model which uses body-fitted lattice $(\pm a/2, \pm a/2, \pm a/2)$ as the main lattice, and $(\pm a, 0, 0)$ *cyc.* as the 1st sub-lattice. Stability and reproducibility of the model is compared with the conventional models in direct numerical simulation of turbulent channel flow.

1. 背景

格子 Boltzmann 方程式を基礎式とする格子 Boltzmann 法 (lattice Boltzmann method, LBM) ⁽¹⁾ の適用範囲は, 高 Reynolds 数流れに広がりつつある. LBM の衝突項について, 最も単純な単一緩和時間モデルは格子 Reynolds 数の増加とともに不安定となるため, 多緩和時間モデル ⁽²⁾ や cumulant モデル ⁽³⁾ をはじめとする数多くの改良策が提案されている. 一方, 移流項について, 単純立方格子 $(\pm a, 0, 0)$ *cyc.* に 1 種類の副格子を組み合わせる 3 次元 15 速度または 19 速度モデルを基準に, 乱流において顕在化する格子の向きに対する非等方性の抑制するにあたり, 15, 19 速度モデルによる結果の重ね合わせ ⁽⁴⁾ や 2 種類の副格子を用いる 27 速度モデル ⁽⁵⁾ の有効性が示されている.

ここで, 離散 Boltzmann 方程式の移流項を差分法により離散する差分格子 Boltzmann 法 ⁽⁶⁾ では, 静止及び正 20 面体の頂点を用いた, すなわち静止粒子以外が単一の移流速度を持つ, 3 次元 13 速度モデルが提案され, 15 速度モデルに対する優位性が示されている ⁽⁷⁾. 正 20 面体は 3 次元空間を充填できないため, この 13 速度モデルは, 直ちに LBM に適用することはできないものの, 粒子モデルにおいて副格子を付け加える以外の工夫の余地を示唆している. また, 近年行われている試みの一つとしては, 最密充填格子上のモデル ⁽⁸⁾ が挙げられる.

本研究では, 1 種類のみ副格子によるモデルの中で主・副格子間の長さ比が最小となるモデルとして, 基礎格子として体心立方格子 $(\pm a/2, \pm a/2, \pm a/2)$ を用いる 3 次元 15 速度モデル (D3Q15B) を提案する. 壁乱流のベンチマークテストである平行平板間乱流 ⁽⁹⁾ の直接数値解析を実施し, 既存の単純立方格子モデルによる結果との比較を進める.

2. 解析手法

2.1 基礎式

格子 Boltzmann 方程式 Equation (1) に, LBM の基礎式である格子 Boltzmann 方程式を示す.

$$f_m(x_i + c_{mi}, t + 1) = f_m(x_i, t) + \frac{f_m^{\text{eq}}(x_i, t) - f_m(x_i, t)}{\phi} \quad (1)$$

t は時間, x_i は Cartesian 座標, c_{mi} , f_m は m 種類目の粒子の移流速度及び分布函数を表す. 本研究では衝突項として単一緩和時間モデルを用いる. f_m^{eq} は局所平衡分布, ϕ は単一緩和時間を表す.

流体力学方程式 本研究における LBM は, 以下に示す低 Mach 数の Newton 流体における連続の式及び Navier-

Stokes 式を回復するものとする.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - 2 \rho \nu S_{ij} \} = 0. \quad (3)$$

ここで, ρ は密度, u_i は流速を表し, 分布函数により以下のように定義される.

$$\rho := \sum_m f_m, \quad (4)$$

$$\rho u_i := \sum_m c_{mi} f_m. \quad (5)$$

圧力 p は, 音速 C_s が一定のもと, 次の関係を満たすものとする.

$$dp = C_s^2 d\rho. \quad (6)$$

また, Eq. (3) 右辺の ν は動粘度, S_{ij} は次式で表される変形速度テンソルである.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (7)$$

2.2 体心立方 15 速度モデル

離散粒子速度 Equation (1) における c_{mi} の具体形を定める. 3 次元空間を充填することができる立方晶構造は, Fig. 1 に示す 3 通りである. ここで, a は立方晶のサイズを表す. Equations (2), (3) を回復するためには, 結晶構造の最近接点間を結ぶ主格子に加え, 第 2 以降の近接点同士を結ぶ副格子が少なくとも 1 種類必要となる. 本研究では, 第 1 副格子の主格子に対する速度比に注目し, これが最小となるモデルとして, Table 1 に示す, 体心立方格子を主格子とする 3 次元 15 速度 (D3Q15B) モデルを提案する.

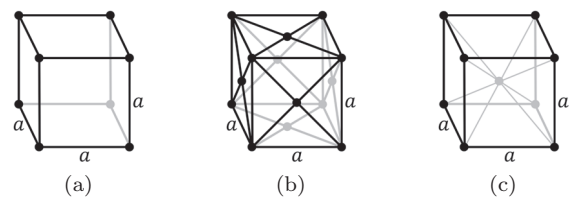


Fig. 1: Cubic crystal system: (a) primitive, (b) face-centered, (c) body-centered; from ja.wikipedia.org

Tab. 1: Discrete velocity set of D3Q15B

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c_{m1}	0	+a/2	-a/2	+a/2	-a/2	-a/2	+a/2	-a/2	+a/2
c_{m2}	0	+a/2	+a/2	-a/2	-a/2	-a/2	-a/2	+a/2	+a/2
c_{m3}	0	+a/2	+a/2	+a/2	+a/2	-a/2	-a/2	-a/2	-a/2

	10	11	12	13	14	15
	+a	0	0	-a	0	0
	0	+a	0	0	-a	0
	0	0	+a	0	0	-a

局所平衡分布 D3Q15B の局所平衡分布として、単純立方格子モデルと同様の、次の形を考える。

$$f_m^{\text{eq}} := E_m \rho \left[1 - \frac{u_i u_i}{2C_s^2} + \frac{c_{mi} u_i}{C_s^2} + \frac{c_{mi} c_{mj} u_i u_j}{C_s^4} \right]. \quad (8)$$

ここで、 E_m は各粒子に対する重み係数を表す。本稿では、D3Q15B における E_m 及び C_s を、既存の単純立方格子モデルとの関係から導出する。Table 1 に示した c_{mi} を x_1 - x_2 平面に縮退させると、 $(0, 0)$ 、 $(\pm a/2, \pm a/2)$ 、及び $(\pm a, 0)$ *cyc.* の 9 速度となる。これらの速度ベクトルについて、その大きさを $\sqrt{2}$ 倍し、 x_3 軸周りに $\pi/4$ 回転させると、単純立方格子における 2 次元 9 速度モデル (D2Q9) に一致する。D2Q9 モデルの音速は $a/\sqrt{3}$ であるので、D3Q15B モデルの音速は $a/\sqrt{6}$ と分かる。また、D3Q15B モデルにおける $(a, 0, 0)$ は D2Q9 モデルにおける (a, a) となる、 $(0, 0, a)$ は静止粒子に組み込まれる、など上述の操作における速度ベクトル間の対応関係を考慮することにより、

$$E_1 = 7/18, \quad E_{2\sim 9} = 1/18, \quad E_{10\sim 15} = 1/36, \quad (9)$$

を得る。

体心立方格子 D3Q15B における体心立方格子は、 $(0, 0, 0)$ 及び $(a/2, a/2, a/2)$ を基点とする 2 組の 3 次元配列により表すことができる。ここで、D3Q15B 及び単純立方格子モデルの比較として時間刻みに加えてモデルの音速 C_s を揃えると、D3Q15B における立方晶のサイズは単純立方格子モデルの $\sqrt{2}$ 倍、格子密度は単純立方格子モデルの $1/\sqrt{2}$ 倍となる。また、3 次元非定常解析における計算負荷の目安として、時間ステップ数と格子点数との積及び Mach 数を揃えると、D3Q15B のステップあたりの時間進行は単純立方格子モデルの $2^{-1/8} \simeq 0.917$ 倍、立方晶のサイズは単純立方格子モデルの $2^{3/8} \simeq 1.297$ 倍となる。

静止壁境界条件 bounce-back 条件に基づく D3Q15B モデルにおける静止壁境界条件を示す。ここでは、 $x_2 > 0$ が流体である $x_2 = 0$ の静止壁を扱う。境界条件を課すべき分布関数は、 $x_2 = 0$ 面から $x_2 = a/2$ 面に向かう f_2, f_3, f_8, f_9 及び $x_2 = a$ 面に向かう f_{11} 、そして $x_2 = 0$ 面を通り抜け $x_2 = a/2$ 面に向かう f_{11} である。

本研究では、 $x_2 = 0$ 面の静止粒子 f_1 、及び同面上を移流する粒子 $f_{10}, f_{12}, f_{13}, f_{15}$ は考慮せず、壁面に到達する粒子として、 $x_2 = a/2$ 面の f_4, f_5, f_6, f_7 及び $x_2 = a$ 面の f_{14} のみを考慮する。これらの粒子は、1 ステップの間 $x_2 = 0$ 面にとどまる。そして、その次のステップにおいて、単一緩和時間 ϕ による衝突を経て、bounce-back の向きに壁から出て行く。ここで、静止壁面上における局

所平衡分布は、 E_m 及び壁面上の密度 ρ_w を用い次のように書ける。

$$f_m^{\text{eq}}|_{x_2=0} = E_m \rho_w. \quad (10)$$

境界における密度 ρ_w は、壁面上に到達した分布関数をもとに次式により与える。

$$\rho_w = 4(f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_{14})|_{x_2=0}. \quad (11)$$

最後に、 $x_2 = a/2$ 面における f_{14} を半ステップ後に壁面で反射させ、次のステップにおける $x_2 = a/2$ 面における f_{11} とする。

3. 平行平板間乱流解析

D3Q15B における静止壁境界条件の検証、及びモデルの壁乱流への適用能力の調査のために、壁面間距離の半値及び壁面摩擦速度に対する Reynolds 数がおおよそ 180 の平行平板間乱流の直接数値解析⁽⁹⁾を実施した。

設定 チャネル幅の半値に対する格子解像度を n とする。このとき、立方晶サイズは壁座標により $a = 180/n$ と表される。主流・スパン方向は、壁座標でそれぞれ 1440、720 の周期条件とする。このとき、壁面及び周期境界上を含めた領域内の総格子点数は、単純立方格子モデルにおいて $(8n+1)(2n+1)(4n+1)$ 、D3Q15B において $(8n+1)(2n+1)(4n+1) + 64n^3$ となる。

本解析では、壁面摩擦速度に対する Mach 数を 7.5×10^{-3} と定めた。このとき、Eq. (1) の単一緩和時間は、

$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{7.5 \times 10^{-3}}{C_s}, \quad (12)$$

と表され、単純立方格子モデルでは $\phi \simeq 0.5 + 7.22 \times 10^{-5}n$ 、D3Q15B では $\phi \simeq 0.5 + 1.02 \times 10^{-4}n$ となる。また、駆動力として流路内の粒子¹に体積力を与えている⁽¹⁰⁾。

結果 本稿では、D3Q15B における $n = 36, 48, 72$ の解析結果のみを示す。Figure 2 に平均流速 \bar{u} の分布を示す。壁面第 1 点及び粘性底層における流速値は壁座標の値にほぼ一致しており、D3Q15B の壁面境界条件は妥当である。また、流路中央における流速は、解像度の増加とともに参照データ⁽⁹⁾に近づく。ただし、D3Q19 による先行研究⁽¹¹⁾では $n = 128$ において²参照データに対する良好な一致が見られているのに対し、本解析結果では最も細かい $n = 72$ において流路中央部の流速を数%過大評価する傾向が残る。

Figure 3 に、各方向流速の root mean square 値に基づく乱れ強度を示す。ただし、 v' 及び w' はそれぞれ壁面鉛直・スパン方向値である。本解析の結果は、解像度の不足とともに全ての方向の乱れを過小評価する。これは、従来手法において遷移層領域における u' を過大評価し、 v', w' を過小評価する傾向とは異なる。

4. まとめ

体心立方格子を基本格子とする 3 次元 15 速度モデルを提案した。チャネル乱流の直接数値解析を行い、平均流速分布が解像度の増加とともに参照データに近づくことを確認した。乱れ強度について、解像度不足により各方向の値が全て弱まるという、既存の解析手法における結果とは異なる傾向が見られた。

謝辞

本研究は、文部科学省ポスト「京」萌芽的課題「基礎科学の挑戦—複合・マルチスケール問題を通じた極限の

¹D3Q15B の静止壁境界条件において壁面にとどまる粒子を除く

²主流・スパン方向領域サイズは異なる

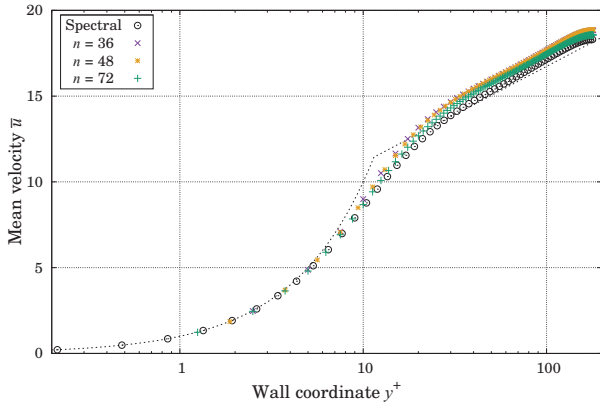


Fig. 2: Mean velocity profiles; “Spectral” is referenced from Kim et al., 1987

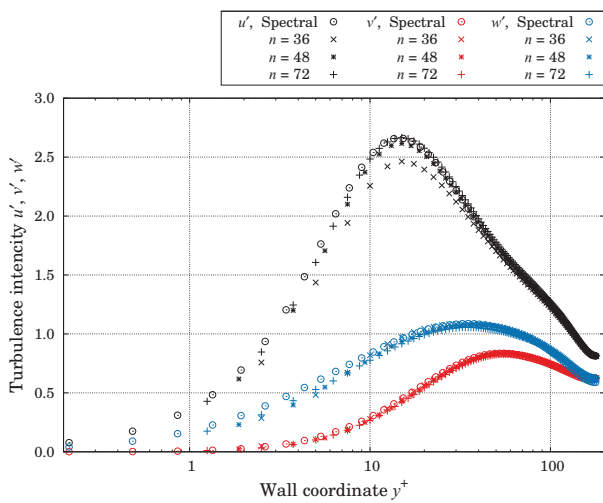


Fig. 3: Turbulence intensity profiles; “Spectral” is referenced from Kim et al., 1987

探究」の一環として実施したものです。

参考文献

- (1) 稲室, “格子ボルツマン法: 新しい流体シミュレーション法 (物性研究者のための計算手法入門),” 物性研究, 77-2 (2001), pp. 197–232.
- (2) d’Humières, D., “Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions,” Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 360-1792 (2002), pp. 437–451.
- (3) Geier, M., Schönherr, M., Pasquali, A., and Krafczyk, M., “The cumulant lattice boltzmann equation in three dimensions: Theory and validation,” Comput. Math. Appl., 70-4 (2015), pp. 507–547.
- (4) 日置, 梶島, “格子ボルツマン法による円管内乱流の DNS (流体工学, 流体機械),” 日本機械学会論文集 B 編, 69-679 (2003), pp. 630–635.
- (5) Kuwata, Y. and Suga, K., “Anomaly of the lattice Boltzmann methods in three-dimensional cylindrical flows,” J. Comput. Phys., 280 (2015), pp. 563–569.

- (6) 日本機械学会, “CFD 最前線,” 機械工学最前線 / 日本機械学会編, 共立出版 (2007).
- (7) Tamura, A., Okuyama, K., Takahashi, S., and Ohtsuka, M., “Three-dimensional discrete-velocity BGK model for the incompressible Navier–Stokes equations,” Comput. Fluids, 40-1 (2011), pp. 149–155.
- (8) 宮内, “最密充填格子上的格子ボルツマンモデル,” 第 32 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (2018), F08-2.
- (9) Kim, J., Moin, P., and Moser, R., “Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number,” J. Fluid Mech., 177 (1987), pp. 133–166.
- (10) 國嶋, 梶島, 葛原, “差分格子ボルツマン法の乱流解像能力の検証,” 第 28 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (2014), D03-3.
- (11) Lammers, P., Beronov, K. N., Volkert, R., Brenner, G., and Durst, F., “Lattice BGK direct numerical simulation of fully developed turbulence in incompressible plane channel flow,” Comput. Fluids, 35-10 (2006), pp. 1137–1153.