

ラグランジュマーカークー粒子を用いた オイラー型流体-構造統一連成解法

Eulerian Unified Formulation Using Lagrangian Marker Particles for Fluid-Structure Interaction Problems

- 嶋田 宗将, 神戸大, 〒 657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail : shimada t@stu.kobe-u.ac.jp
西口 浩司, 理研, 〒 650-0047 兵庫県神戸市中央区港島南町 7-1-26, E-mail : koji.nishiguchi@riken.jp
岡澤 重信, 山梨大, 〒 400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11, E-mail : sokazawa@yamanashi.ac.jp
坪倉 誠, 神戸大・理研, 〒 657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail : tsubo@tiger.kobe-u.ac.jp
Tokimasa Shimada, Kobe Univ., 1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe, Hyogo, 657-8501
Koji Nishiguchi, RIKEN, 7-1-26 Minatojima-minami-machi, Chuo-ku, Kobe, Hyogo, 650-0047
Shigenobu Okazawa, Yamanashi Univ., 4-3-11 Takeda, Kofu, Yamanashi, 400-8511
Makoto Tsubokura, Kobe Univ.・RIKEN, 1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe, Hyogo, 657-8501

Fluid-Structure Interaction (FSI) problems can be observed in various engineering fields. Thus FSI problems are indispensable for designing many engineering systems. For the numerical analysis of FSI problems, one of the effective approaches is a full Eulerian FSI formulation, in which solid and fluid are numerically solved in the spatially fixed mesh. However, it cannot avoid the numerical dissipation of functions to represent spatial distribution of solid or internal variables of solid due to their advection equations. Thus, the numerical dissipation problem should be overcome in order to obtain high accurate numerical results. Given the aforementioned background, in this research, Eulerian unified analysis method of fluid and structure interaction problems with Lagrangian marker particles is proposed for solving the problem of numerical dissipation due to solving advection equations. Finally, it is confirmed that the proposed method is effective to obtain high accuracy results with using lower resolution meshes.

1. 緒言

流体の運動と構造物(固体)の運動・変形が相互に影響を及ぼしている現象(流体-構造連成問題)は我々の身の回りにおいて多く存在している。それらの例として、風によって変形・振動する建築物や血流によって変形する血管が挙げられる。これらの現象のメカニズム解明や予測を行うことは工学的・産業的に非常に重要であるため、実験や数値解析による様々な研究が行われてきている。特に、近年においては、計算機の性能が大きく向上していることによって数値解析が果たす役割が大きくなっている。

流体-構造連成問題に関する数値解析手法としては、解析を行う際に用いるメッシュの種類に基づいて、「ラグランジュ型解法」と「完全オイラー型解法」に大別することができる。

ラグランジュ型解法は、固体の移動・変形に伴い、移動・変形するメッシュを解析に用いる方法である。ラグランジュ型解法のうち代表的な方法としては、移動・変形する固体についてはラグランジュメッシュを用いて解き、流体については空間において固定されたオイラーメッシュで解く、つまり、固体と流体の間で別々のメッシュを用いる方法⁽¹⁾が挙げられる。また、空間において固定されたメッシュを用いて解析を行うが、得られた解析結果に従い、そのメッシュが固体の移動・変形などに合わせてラグランジュ的に変形する、境界適合メッシュを用いる、Arbitrary Lagrangian Eulerian(ALE)法⁽²⁾や Deforming-Spatial-Domain/Stabilized Space-Time(DSD/SST)法⁽³⁾などによって、固体と流体の運動を同じメッシュ上で解く手法も存在する。これらのような固体の移動・変形に伴ってメッシュを変形させるラグランジュ型解法を用いた場合は、「変形する固体界面を高精度に追跡できる」「経路依存性のある固体の構成則などの計算が容易」といったメリットがある一方で、「メッシュ生成を手作業で行うため、ノウハウや多大な時間を要することがある」「固体に大変形が生じた場合、数値的安定性等の理由からメッシュを再生成する必要がある、その結果として計算精度が悪化する」といったデメリットを抱えている。

ラグランジュ型解法が抱えている、複雑な形状のメ

ッシュ作成に要する労力や固体の大変形に伴う計算の難しさといった問題を回避できる方法として、固体と流体の運動を空間に固定された変形しない直交メッシュ上で同時に解く、完全オイラー型解法が提案されている。完全オイラー型解法においては、空間において固定されたメッシュを用いるため、固体と流体の界面の位置や、固体領域の空間的な分布をメッシュによって陽的に定義できないため、密度関数法⁽⁴⁾・Volume of Fluid(VOF)法⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾・Piecewise Linear Interface Calculation(PLIC)法⁽⁸⁾などを用いて各計算セルにおいて固体が占める体積の割合などを求める必要が存在すると同時に、固定メッシュ上で固体内部変数の計算を行う必要が存在する。その際、VOF関数などのカラー関数や経路依存性のある固体内部変数に対しては固定メッシュ上で移流方程式を解くことで値を求めるため、解析時間が経過するにつれて数値拡散により、解析精度が悪化するという問題を抱えている⁽⁶⁾。

これらの数値拡散による問題を解決するために、杉山らは完全オイラー型解法に対して新たに Particle in Cell(PIC)法を導入することで、固体領域をラグランジュ粒子によって表現すると同時に、ラグランジュマーカークー粒子上で固体内部変数について計算を行うことで数値拡散を防ぐ方法を提案している⁽⁹⁾。この方法においては、固体内部変数については移流方程式を用いず、ラグランジュ粒子上で計算する一方で、基礎方程式や空間微分量はオイラーメッシュ上で計算する。そのため、メッシュ生成が容易であり、大変形に伴うメッシュの再生成が不要であるといった完全オイラー型解法の利点が維持されている。ただし、この方法においては、用いている支配方程式において流体と固体の密度が等しいことを仮定しているため、手法を利用して解析を行うことが可能な現象に制限が存在する。また、既存の移流方程式を利用した方法と比較して解の精度がどのように向上しているかという報告もされていない。

そこで、本研究においては、西口らによって提案されている有限体積法に基づく完全オイラー型流体-構造連成解析手法⁽⁶⁾⁽⁷⁾に対して、新たに固体領域を表現するためのラグランジュマーカークー粒子を利用した手法を提案する。

その上で、提案手法を用い、西口らが取り扱った流体-構造連成問題に関するベンチマーク問題⁽¹⁾の解析を行い、解析結果の比較を行うことで、提案手法に関する有効性の検証や性能の比較評価を行う。なお、本研究において、西口らによる手法を基本となる手法として用いる理由としては、西口らの方法はメッシュの局所細分化が可能で並列化効率の高い Building Cube Method(BCM)⁽¹⁰⁾を用いているため、並列化効率について検証を行った結果、良好な並列化効率を得られることが確認されており⁽⁶⁾⁽⁷⁾、より複雑・大規模な現象についての解析を行うことが期待できること、そして、西口らの方法において用いられている支配方程式においては、空気と金属のように流体と固体に密度の差が存在するケースを扱うことが理論的に可能となっているため、様々な問題へ適用することが可能であると考えられることの二点が挙げられる。

2. 基礎方程式と構成則

2.1 連続の式と運動方程式の体積平均化

本研究において扱う物質は非圧縮性を仮定した流体と固体であり、それらの物質の運動について連続体力学という場の理論を用いて解析を行う。なお、完全オイラー型解法を用いる際は、一つの計算セルに複数の物質が存在しうするため、それぞれの支配方程式について何らかの操作を行う必要が存在する。そこで、本研究においては、岡澤ら⁽⁴⁾や西口ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾によって既に提案・利用されている、非圧縮性を仮定した流体と固体に対して体積平均化を施した支配方程式を用いる。

まず、非圧縮性を仮定した流体と固体の運動に関する支配方程式である、連続の式(質量保存則)と運動方程式はそれぞれ次の式によって表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2)$$

これらの式において、 \mathbf{v} は物質の速度、 ρ は物質の密度、 $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力テンソル、 \mathbf{b} は単位体質量当たりの物体力をそれぞれ表している。

次に、3次元ユークリッド空間内の検査体積 ($x - \Delta x/2 \leq \bar{x} \leq x + \Delta x/2$, $y - \Delta y/2 \leq \bar{y} \leq y + \Delta y/2$, $z - \Delta z/2 \leq \bar{z} \leq z + \Delta z/2$) において物質 i が存在する領域を Ω_i としたとき、

$$I_i(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x, y, z) \in \Omega_i \\ 0, & \text{if } (x, y, z) \notin \Omega_i \end{cases} \quad (3)$$

という性質を持つ指示関数 I_i を定義する。つまり、この指示関数 I_i は、検査体積内のある点において物質 i が存在する場合は 1、物質 i が存在しない場合は 0 をとる関数である。この指示関数 I_i を用いることで、ある検査体積内において存在する n 種類の非圧縮性物質に対する連続の式と運動方程式は式 (1) と (2) より、次のように表される。

$$\sum_{i=1}^n I_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i \rho_i \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \sum_{i=1}^n I_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \left(\sum_{i=1}^n I_i \rho_i \right) \mathbf{b} \quad (5)$$

ここで、各物理量につく添え字 i は物質 i に関する物理量であることを示す。

最後に、これらの式 (4) と式 (5) に対してそれぞれ体積平均化操作を施すことによって、連続の式と運動方程式は以下のように表すことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{mix}} = 0 \quad (6)$$

$$\rho_{\text{mix}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{mix}}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\text{mix}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}} \right\} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}} + \rho_{\text{mix}} \mathbf{b} \quad (7)$$

以上の式において現れる、 \mathbf{v}_{mix} 、 ρ_{mix} 、 $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}}$ はそれぞれ次のように表される物理量である。

$$\mathbf{v}_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad (8)$$

$$\rho_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \rho_i \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad (10)$$

これらの式 (8)~(10) において現れる ϕ_i はある検査体積を物質 i が占める割合、つまり、検査体積内における物質 i の体積率を意味し、指示関数 I_i を用いて次の式によって与えることができる。

$$\phi_i = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} I_i d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \quad (11)$$

また、式 (8) に現れる $\bar{\mathbf{v}}_i$ は物質 i が存在する領域 Ω_i における \mathbf{v}_i の相体積平均値、式 (10) に現れる $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ は物質 i が存在する領域 Ω_i における $\boldsymbol{\sigma}_i$ の相体積平均値を意味し、それぞれ次の式によって定義される。

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{\phi_i} \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} I_i \mathbf{v}_i d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \right) \quad (12)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i = \frac{1}{\phi_i} \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} \int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} I_i \boldsymbol{\sigma}_i d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} \right) \quad (13)$$

検査体積において体積平均化を行った連続の式 (6) と連続体の運動方程式 (7) を支配方程式として用いることによって、各物質が混合体として扱われるので、複数種類の物質に対する個々の支配方程式を個別に解く必要がなくなり、統一的な解析が可能となる。そのため、複数種類の物質に関する連成問題の取り扱いが容易になる。また、本研究における数値計算においては、上記の説明の際に扱った検査体積は 1 つの計算セルに相当し、体積率 ϕ_i は VOF 関数に相当する。

本研究においては、体積平均化を施した基礎方程式 (6)・(7) と次項において示す各物質の構成則式を用いて解析を行う。そのため、速度については各物質の速度 \mathbf{v}_i ではなく、体積平均化を行った速度 \mathbf{v}_{mix} を求める。

2.2 構成方程式

本研究においては、Zhao ら⁽¹⁾や西口ら⁽⁷⁾による先行研究で得られた数値解析の結果と比較を行うため、流体に関する構成方程式として次の式によって与えられる、非圧縮性 Newton 流体の構成方程式を利用する。

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} - p \mathbf{I} \quad (14)$$

ここで、 μ は粘性係数、 \mathbf{D} は変形速度テンソル、 p は圧力を表す。

固体の構成方程式についても、Zhao らや西口らが用いた、超弾性体の 1 種である非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に非圧縮性流体における構成方程式と同じ式で与えられる粘性応力を加えた次の構成方程式を利用する。

$$\boldsymbol{\sigma} = G(\mathbf{B} - \mathbf{I}) + 2\mu \mathbf{D} - p \mathbf{I} \quad (15)$$

ここで、 G はせん断弾性係数、 B は左コーシーグリーン変形テンソル、 μ は粘性係数、 D は変形速度テンソル、 p は圧力を表し、右辺第一項が超弾性体の 1 種である非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に相当し、右辺第 2 項が粘性応力に相当する。また、本研究においては、Zhao らや西口らと同様に、固体の粘性係数 μ については流体の粘性係数と等しい値であり、時間的・空間的に変化しない量であるとして扱う。

左コーシーグリーン変形テンソル B は運動 $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ の勾配を意味する物理量である変形勾配テンソル $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ を用いて、次のように定義されている。

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (16)$$

本研究においては、左コーシーグリーン変形テンソルを用いて固体の変形を評価したうえで、式 (15) を利用し応力を求めるが、その際は、左コーシーグリーン変形テンソル時間的な変化を求める必要があり、その物質時間微分式は次のように表される。

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T \quad (17)$$

なお、この式中の \mathbf{L} は速度勾配テンソルを意味する。

3. 数値解析手法

本研究で提案する、ラグランジュマーカー粒子を利用した数値解析においては、空間固定された直交メッシュ上において支配方程式や空間微分量について解き、固体領域 (固体物質点) を表すラグランジュマーカー粒子において固体の持つ物理量 (左コーシーグリーン変形テンソルなど) を計算する。本節の以降において、直交メッシュ上において行う計算とラグランジュマーカー粒子上において行う計算に分けて、本研究で提案する数値解析手法の詳細について説明する。

3.1 空間固定された直交メッシュ上での計算

本研究において提案する手法では、西口らによって既に提案されている手法⁽⁷⁾に基づいて、直交メッシュ上で計算を行う基礎方程式 (6)(7) の空間離散化については有限体積法を用い、時間進行法についてはフラクショナル・ステップ法⁽¹¹⁾を用いた。その際、速度と圧力についてはコケート配置法を用いることでセルの中心において定義し、さらに、密度と体積率についてはセルの中心において定義する。また、非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく固体の偏差応力と左コーシーグリーン変形テンソルは各セル境界面の中心において定義する一方で、流体と固体の粘性による偏差応力についてはセルの中心において定義する。これらの物理量に対する定義点を用いて、空間固定された直交メッシュ上において支配方程式を解く。

本項の以降においては、空間固定された直交メッシュ上において支配方程式を解くために必要な離散化、特に時間に関する離散化について説明を行う。

3.1.1 フラクショナル・ステップ法について

まず、体積平均化を行った連続体の運動方程式 (7) は、応力について圧力 p と偏差応力 σ'_{mix} に分けることによって、以下の式のように書き換えられる。

$$\rho_{\text{mix}} \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{mix}}}{\partial t} + (\rho_{\text{mix}} \mathbf{v}_{\text{mix}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}} = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma'_{\text{mix}} + \rho_{\text{mix}} \mathbf{b} \quad (18)$$

ここでフラクショナル・ステップ法を用い、中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ と呼ばれる、 $n+1$ ステップにおける速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ を計算するために現れる中間的な解を導入することで、式 (18) に対して次のような時間に関する離散化が施される。

$$\rho_{\text{mix}}^n \frac{\mathbf{v}_{\text{mix}}^* - \mathbf{v}_{\text{mix}}^n}{\Delta t} + (\rho_{\text{mix}} \mathbf{v}_{\text{mix}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}} = \nabla \cdot \sigma'_{\text{mix}} + \rho_{\text{mix}} \mathbf{b} \quad (19)$$

$$\frac{\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1} - \mathbf{v}_{\text{mix}}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_{\text{mix}}^n} \nabla p^{n+1} \quad (20)$$

フラクショナル・ステップ法においては、まず、速度に関する式 (19) を用いて中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ を求めた後、圧力に関する式 (20) を解くことによって次の時刻 ($n+1$ ステップ) の速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ を求める。しかし、圧力に関する式 (20) において右辺に現れる圧力 p^{n+1} が未知であるため、この圧力 p^{n+1} を先に求めておく必要がある。そのため、圧力 p^{n+1} については、式 (20) の両辺に対し発散をとり、その式について速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ が連続の式 (6) を満たさなければならぬという条件を適用することで導かれる、次の式を用いて計算を行う。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{mix}}^* = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{mix}}^n} \nabla p^{n+1} \right) \quad (21)$$

この式を圧力ポアソン方程式と言い、この式を解くことによって次の時刻 ($n+1$ ステップ) の圧力 p^{n+1} が求まる。

以降において、フラクショナル・ステップ法によって導かれたそれぞれの式を解くために行った式変形操作等について詳細に述べる。

3.1.2 中間速度の計算

中間速度に関する式 (19) を解くためには、移流項、応力項、体積力項の各項の計算について用いる時間に関する離散化方法を決める必要があり、本研究においては、時間に関する離散化方法として次に述べるものを用いた。応力項については固体の応力波による時間増分制約を緩和するため、2次精度のクランクニコルソン法を用いた。次に、移流項については固体の応力波による時間増分制約に比べて移流速度による時間増分制約が小さいと考えられるため、2次精度のアダムス・バッシュフォース法を用いた。最後に、体積力項については、1次精度の Euler 陽解法を用いた。以上の時間に関する離散化方法を用いることによって、速度に関する式 (19) は次のように表される。

$$\begin{aligned} \rho_{\text{mix}}^n \frac{\mathbf{v}_{\text{mix}}^* - \mathbf{v}_{\text{mix}}^n}{\Delta t} &+ \frac{3}{2} (\rho_{\text{mix}}^n \mathbf{v}_{\text{mix}}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}}^n - \frac{1}{2} (\rho_{\text{mix}}^{n-1} \mathbf{v}_{\text{mix}}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}}^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \nabla \cdot (\sigma'_{\text{mix}} + \sigma_{\text{mix}}^n) + \rho_{\text{mix}}^n \mathbf{b} \end{aligned} \quad (22)$$

この式中に現れる、 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^n$ 、 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n-1}$ 、 σ'_{mix}^n 、 σ_{mix}^n 、 ρ_{mix}^n 、 ρ_{mix}^{n-1} は既知であるが、偏差応力項 σ'_{mix} は未知であり、新たに求める必要がある。以降においては、未知である応力項 σ'_{mix} の求め方について説明を行う。

未知である偏差応力項 σ'_{mix} を求めるためには、 σ'_{mix} が速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ の汎関数として表されている必要がある。解析領域内に 1 種類の流体 (非圧縮性流体) と 1 種類の固体 (非圧縮性固体) の計 2 物質が存在する場合、体積平均化を行った応力に関する式 (10) より σ'_{mix} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma'_{\text{mix}} &= \phi_s^* \sigma'_s + \phi_f^* \sigma'_f \\ &= \phi_s^* \sigma'_s + \phi_f^* \sigma'_f \\ &\simeq \phi_s^n \sigma'_s + \phi_f^n \sigma'_f \\ &= \phi_s^n (\sigma'_{s\text{-str}} + \sigma'_{s\text{-vis}}) + (1 - \phi_s^n) \sigma'_f \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、上記の式における下付き添え字 s は固体、 f は流体をそれぞれ意味している。また、固体の偏差応力 σ'_s

について、非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力 $G(\mathbf{B} - \mathbf{I})$ を $\sigma'_{s\text{-str}}$ 、粘性応力による偏差応力 $2\mu_s \mathbf{D}$ を $\sigma'_{s\text{-vis}}$ とし、分離した形で表現している。なお、式 (23) の導出について、体積率 ϕ_i^* (ここで、 $i = s, f$) について計算することは可能であるが、中間速度を反復計算によって解くごとに体積率 ϕ_i^* に関する移流方程式を計算し更新することは計算コスト上非現実的でなく、十分に細かな時間刻みを用いた場合、 ϕ_s^* と ϕ_f^* がほぼ等しくなることが言えるので、本研究においては、 $\phi_s^* \approx \phi_f^*$ とし、変形を行った。

式 (23) に存在する固体の非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力 $\sigma'_{s\text{-str}}$ は左コーシーグリーン変形テンソルの汎関数であるが速度の汎関数ではない。そこで、固体の非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力 $\sigma'_{s\text{-str}}$ について速度 \mathbf{v}^* の汎関数として表すため、伊井ら (12) によって提案された次の線形化による仮定式と時間離散化の方法を利用する。

$$\begin{aligned}\sigma'_{s\text{-str}} &\approx \sigma'_{s\text{-str}} + \frac{\partial \sigma'_{s\text{-str}}}{\partial \mathbf{B}} : \Delta \mathbf{B}^n \\ &= \sigma'_{s\text{-str}} + \frac{\partial \sigma'_{s\text{-str}}}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^n)\end{aligned}\quad (24)$$

上記の式における $\frac{\partial \sigma'_{s\text{-str}}}{\partial \mathbf{B}}$ は 4 階のヤコビアン・テンソルであるが、本研究において用いている neo-Hooke 体の構成方程式は $G(\mathbf{B} - \mathbf{I})$ として与えられるため、各成分は定数となる。ここで、式 (24) 中の右辺第 2 項に現れる $\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^n$ について求めるため、左コーシーグリーン変形テンソルの物質時間微分 (17) を利用する。左コーシーグリーン変形テンソルの物質時間微分 (17) は Euler 表示を用いると次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T \quad (25)$$

伊井らはこの式に対し、次のように時間に対する離散化を施している。

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{B}^* - \mathbf{B}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} (\mathbf{v}_{\text{mix}}^n \cdot \nabla) \mathbf{B}^n - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{B}^{n-1} \\ = \left(\frac{\mathbf{L}^n + \mathbf{L}^*}{2} \right) \cdot \mathbf{B}^n + \mathbf{B}^n \cdot \left(\frac{\mathbf{L}^n + \mathbf{L}^*}{2} \right)^T\end{aligned}\quad (26)$$

ここで、式 (26) における移流項について、伊井らは移流の影響が小さいとして無視し、 $\Delta \mathbf{B}^n = \mathbf{B}^* - \mathbf{B}^n$ については最終的に次のように扱っている。

$$\Delta \mathbf{B}^n = \Delta t \left\{ \left(\frac{\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^n + \nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^*}{2} \right) \cdot \mathbf{B}^n + \mathbf{B}^n \cdot \left(\frac{\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^n + \nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^*}{2} \right)^T \right\} \quad (27)$$

この式 (27) を式 (24) に代入することで、非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力 $\sigma'_{s\text{-str}}$ が速度 \mathbf{v}^* の汎関数として表すことが可能となる。本研究においても、伊井らの利用した上記の線形化方法を用いて非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力 $\sigma'_{s\text{-str}}$ の計算を行う。

また、固体の粘性応力と流体の粘性応力に関しては、すでに述べたように、固体と流体の粘性係数が等しく ($\mu = \mu_s = \mu_f$)、同時に粘性応力の式の形が等しいため、最終的に式 (23) は次のように表される。

$$\begin{aligned}\sigma'_{\text{mix}} &= \phi_s^n (\sigma'_{s\text{-str}} + 2\mu \mathbf{D}^*) + (1 - \phi_s^n) 2\mu \mathbf{D}^* \\ &= \phi_s^n \sigma'_{s\text{-str}} + 2\mu \mathbf{D}^* \\ &= \phi_s^n \sigma'_{s\text{-str}} + \mu \left\{ (\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^*) + (\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^*)^T \right\}\end{aligned}\quad (28)$$

同様に、 n ステップにおける既知の偏差応力 σ'^n_{mix} については以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma'^m_{\text{mix}} &= \phi_s^n (\sigma'^m_{s\text{-str}} + \sigma'^m_{s\text{-vis}}) + (1 - \phi_s^n) \sigma'^m_f \\ &= \phi_s^n (\sigma'^m_{s\text{-str}} + 2\mu \mathbf{D}^n) + (1 - \phi_s^n) 2\mu \mathbf{D}^n \\ &= \phi_s^n \sigma'^m_{s\text{-str}} + 2\mu \mathbf{D}^n \\ &= \phi_s^n \sigma'^m_{s\text{-str}} + \mu \left\{ (\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^n) + (\nabla \mathbf{v}_{\text{mix}}^n)^T \right\}\end{aligned}\quad (29)$$

以上により、式 (22) は既知である n ステップまでの物理量と、求めようとしている中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ のみによって表すことができるようになった。本研究においては、空間離散化の際には各物理量が検査体積 (セル内) や検査体積を囲む各面 (セル境界面) において一定の値を取るという、有限体積法における仮定を用いて各項に関する積分を行うと同時に空間離散化を施す。また、移流項と粘性応力項に対する空間離散化については 2 次精度の中心差分を用いた。

3.1.3 圧力の計算

先に説明した通り、フラクショナル・ステップ法を用いた場合、中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ を求めた次の手順として、圧力ポアソン方程式 (21) と中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ を用いて次ステップにおける圧力 p^{n+1} を求める。ここで、圧力ポアソン方程式 (21) を再度以下に示す。

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{mix}}^*}{\Delta t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_{\text{mix}}^n} \nabla p^{n+1} \right) \quad (21)$$

本研究においては、この式に対して 2 次精度の中心差分を用いて空間離散化を行った離散化式を Red/Black オーダリングによって色分けされた逐次過緩和法 (13) を用いて解く。なお、コロケート配置法を用いた場合においては隣接するセルの圧力差を評価できないことによってチェッカーボード状の圧力振動が生じることが知られているため、本研究においては Rhie-Chow 法 (14) を用いて圧力振動の発生を回避する。

3.1.4 次ステップ速度の計算

フラクショナル・ステップ法を用いて中間速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^*$ と次の時刻 ($n+1$ ステップ) における圧力 p^{n+1} を求めることによって、最終的に速度修正式 (20) を解くことで、次の時刻 ($n+1$ ステップ) の速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ を求めることができるようになる。ここで、(20) について、次の時刻 ($n+1$ ステップ) の速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ を求める式となるように式変形したものを以下に示す。

$$\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1} = \mathbf{v}_{\text{mix}}^* - \frac{\Delta t}{\rho_{\text{mix}}^n} \nabla p^{n+1} \quad (30)$$

この式を次の時刻 ($n+1$ ステップ) の速度 $\mathbf{v}_{\text{mix}}^{n+1}$ について解く際に、圧力 p^{n+1} に対する勾配 (∇p^{n+1}) について空間に対する離散化を行う必要がある。本研究においては、圧力 p^{n+1} に対する勾配 (∇p^{n+1}) について空間に対する離散化を 2 次精度の中心差分を用いて行った。

3.1.5 密度に関する計算

統一場における密度 ρ_{mix}^{n+1} は式 (9) に基づいて、後述する方法によって求めた体積率を用いて、次のように求めることで更新する。

$$\rho_{\text{mix}}^{n+1} = \phi_s^{n+1} \rho_s + (1 - \phi_s^{n+1}) \rho_f \quad (31)$$

3.2 ラグランジュマーカー粒子における計算

本研究においては、ラグランジュマーカー粒子を用いて固体領域を陽的に表現する。さらに、ラグランジュマーカー粒子上においては、ラグランジュマーカー粒子自身の移動、左コーシーグリーン変形テンソル、neo-Hooke 体の構成方程式に基づく固体偏差応力の計算を行う。また、それらによって得られた値を利用して空間メッシュ上での左コーシーグリーン変形テンソル、neo-Hooke 体の構成方程式に基づく固体偏差応力、固体体積率の計算を行う。本項の以降において、ラグランジュマーカー粒子上におけるそれらの物理量計算方法などについて説明する。

3.2.1 ラグランジュマーカー粒子の扱いと初期生成法

本研究において、ラグランジュマーカー粒子は以下に示す 2 つの性質を持つ粒子であるとして扱った。

- ラグランジュマーカー粒子は固体に関する物理量を保有する点であり、連続体力学における物質点 (ラグランジュ表示) の考え方を利用する。
- ラグランジュマーカー粒子は点であると同時に、ラグランジュマーカー粒子を中心とした周囲に仮想的な空間領域を持つ。

次に、ラグランジュマーカー粒子に関する計算開始前の配置方法や仮想的な領域の与え方について説明を行う。

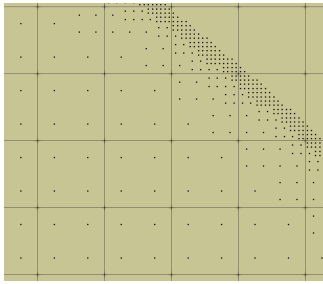


Fig. 1: Distribution of Lagrangian marker particles at initial time step

Fig. 1 においては、ラグランジュマーカー粒子の初期生成例として 2 次元計算における粒子の計算開始前の配置の様子を示している。図中の黒線はセル境界を表し、黒点はラグランジュマーカー粒子を表している。

ラグランジュマーカー粒子に関する計算開始前の配置方法であるが、2 次元の場合は、Fig. 1 に示したように、1 つの計算セルを 4 分割したサブセルを作り、その中心点にラグランジュマーカー粒子を配置する。3 次元の場合は、1 つの計算セルを 8 分割したサブセルを作り、その中心点にラグランジュマーカー粒子を配置する。ただし、固体と流体の界面付近についてはサブセルをさらに細かく分割したサブセルを設定し、そのサブセルの中心点に粒子を配置することが可能となっている。つまり、2 次元の場合はラグランジュマーカー粒子を配置するためのサブセルの大きさ (面積) は、計算セル (正方形) の $1/4, 1/16, 1/64, \dots$ となり、3 次元の場合はラグランジュマーカー粒子を配置するためのサブセルの大きさ (体積) は、計算セル (立方体) の $1/8, 1/64, 1/512, \dots$ となる。

ラグランジュマーカー粒子について計算開始前の配置がサブセルによって決定されることより、ラグランジュマーカー粒子が初期にもつ仮想的な領域の大きさや形状はラグランジュマーカー粒子が所属するサブセルの大きさ・形状に等しいとする。なお、ラグランジュマーカー粒子が持つ仮想的な領域の形状は、本来であれば固体が変形するに伴って変形すると考えられるが、本研究においてはその変形を考慮せず、常に一定の大きさ・形状を保つとして扱った。

3.2.2 ラグランジュマーカー粒子に関する計算に利用する補間関数

ラグランジュマーカー粒子が持つ物理量は、ラグランジュマーカー粒子の空間位置ベクトル (Euler 座標) 上に於いて表されるため、計算セルの中心や界面において定義される物理量を粒子上の計算に利用する場合や、計算した値を計算セルの中心や計算セル境界面の中心に与える場合は補間を行う必要がある。そのため、本研究においては、計算セル上の物理量をラグランジュマーカー粒子に対して補間する場合においては補間重みづけ関数として 1 次元離散 Delta 関数による重みづけ関数 w_D を用い、ラグランジュマーカー粒子上の物理量を計算セルの界面に与える場合に補間重みづけ関数として逆距離加重法 (Inverse distance weighted method) による重みづけ関数 w_I を用いた。

まずは、以下に本研究において用いた 1 次元離散 Delta 関数による補間重みづけ関数 ⁽¹⁵⁾ を示す。

$$w_D(r) = \begin{cases} \frac{3}{4} - r^2, & \text{if } |r| \leq 0.5 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} - 3|r| + r^2 \right), & \text{if } 0.5 < |r| \leq 1.5 \\ 0, & \text{if } 1.5 < |r| \end{cases} \quad (32)$$

ここで、 r は補間を行うラグランジュマーカー粒子とセル中心点、もしくは補間を行うラグランジュマーカー粒子とセル境界面の中心との各軸についての距離を計算セル長さをを用いて正規化した距離を意味する。なお、1 次元離散 Delta 関数による補間重みづけ関数を用いてセル上の物理量を粒子に補間する際に、補間の際の式におけるセルの長さに関する項が打ち消されるため、以降における説明の際はその項については記載しない。

次に、以下に本研究において用いた逆距離加重法による補間重みづけ関数 ⁽¹⁶⁾ を示す。

$$w_I(r) = \begin{cases} \left(\frac{r_{\max} - r}{r_{\max}} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{if } r \leq r_{\max} \\ 0, & \text{if } r_{\max} < r \end{cases} \quad (33)$$

ここで、 r は補間を行うラグランジュマーカー粒子とセル中心点、もしくは補間を行うラグランジュマーカー粒子とセル境界面の中心点との直線的な距離を意味する。また、 r_{\max} は補間を行う際に用いる点の最大許容距離を決める定数である。逆距離加重法による重み関数を用いて物理量の補間を行う際は、各々の補間について重みづけ関数 $w(r)$ を正規化する必要がある。

3.2.3 ラグランジュマーカー粒子の空間位置ベクトル

ラグランジュマーカー粒子の空間位置ベクトル \mathbf{x}_{Lag} と速度 \mathbf{v}_{Lag} の関係は次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{\text{Lag}}}{\partial t} = \mathbf{v}_{\text{Lag}}(t) \quad (34)$$

この式を \mathbf{x}_{Lag} について解くことによって、ラグランジュマーカー粒子の位置を求めることができる。この式中の右辺に対して、2 次精度のアダムス・バッシュフォース法を用いて時間に関する離散化を行うと、次の式が得られる。

$$\mathbf{x}_{\text{Lag}}^{n+1} = \mathbf{x}_{\text{Lag}}^n + \Delta t \left(\frac{3}{2} \mathbf{v}_{\text{Lag}}^n - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\text{Lag}}^{n-1} \right) \quad (35)$$

ここで、式 (35) の右辺に現れる速度 $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^n$ と $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^{n-1}$ については、セル中心における速度ではなくラグランジュマーカー粒子が持つ速度であるため、補間を行うことで求める必要がある。そのため、先ほどの式 (32) で表され

る離散 Delta 関数による重みづけを利用してセル中心の速度よりラグランジュマーカー粒子が持つ速度 $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^n$ を求めるが、その際の式は次のようになる。

$$\mathbf{v}_{\text{Lag}}^n = \sum_{i=1}^{N_C} w_D(r_{x,i}^n) w_D(r_{y,i}^n) w_D(r_{z,i}^n) \mathbf{v}_{\text{Cell},i}^n \quad (36)$$

この式において、 N_C は各粒子に対して $|r_{x,i}^n| \leq 1.5$ かつ $|r_{y,i}^n| \leq 1.5$ かつ $|r_{z,i}^n| \leq 1.5$ となるセル中心の数、 $\mathbf{v}_{\text{Cell},i}^n$ は補間における i 番目セルの中心における速度をそれぞれ表している。なお、 $r_{x,i}^n, r_{y,i}^n, r_{z,i}^n$ については、ラグランジュマーカー粒子と補間における i 番目セルの中心との距離を各軸方向のセルの長さで割ることで求められる無次元距離を意味している。

$n-1$ ステップにおいて粒子が持つ速度 $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^{n-1}$ は式 (36) を用いて、1 ステップ前に得られている値であるため、 $n+1$ ステップにおけるラグランジュマーカー粒子の位置を求める際には新たに計算することは行わない。

式 (35) に対して式 (36) によって補間を行うことで求めた速度 $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^n$ とすでに求めている $\mathbf{v}_{\text{Lag}}^{n-1}$ を代入することによって、次の時刻 ($n+1$ ステップ) でのラグランジュマーカー粒子の位置ベクトルが得られる。

3.2.4 ラグランジュマーカー粒子における左コーシーグリーン変形テンソルと固体偏差応力

式 (35) を用いて次の時刻 ($n+1$ ステップ) でのラグランジュマーカー粒子の位置ベクトルを求めた後、次の時刻 ($n+1$ ステップ) におけるラグランジュマーカー粒子上の左コーシーグリーン変形テンソルを求める。

左コーシーグリーン変形テンソル \mathbf{B}_{Lag} の物質時間微分に関する式 (17) について、ラグランジュマーカー粒子に関する物理量はラグランジュ表示を用いていることに留意しながら式の変形を行うと、次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{Lag}}}{\partial t} = \mathbf{L}_{\text{Lag}} \cdot \mathbf{B}_{\text{Lag}} + \mathbf{B}_{\text{Lag}} \cdot \mathbf{L}_{\text{Lag}}^T \quad (37)$$

この式の右辺について、2 次精度のアダムス・バッシュフォース法を用いて時間に関する離散化を行うと、次の式が得られる。

$$\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n+1} = \mathbf{B}_{\text{Lag}}^n + \frac{\Delta t}{2} (3\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^n - \mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^{n-1}) \quad (38)$$

ここで、 $\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^n$ は次の式を意味する。

$$\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^n = \mathbf{L}_{\text{Lag}}^n \cdot \mathbf{B}_{\text{Lag}}^n + \mathbf{B}_{\text{Lag}}^n \cdot (\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n)^T \quad (39)$$

また、 $\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^{n-1}$ は式 (39) に関して n を $n-1$ と置き換え、両辺の物理量に対して時間に関する情報を一致させたものである。

式 (38) の右辺に現れる $\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^n$ と $\mathbf{Rhs}_{\text{Lag}}^{n-1}$ には速度勾配テンソル $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n$ と $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^{n-1}$ が含まれているが、これらはラグランジュマーカー粒子が持つ速度勾配テンソルであるため、補間を行うことで求める必要がある。本研究においては、速度をセル中心において定義していることより、速度勾配テンソルについてはセル境界面の中心において定義した。そのため、セル境界面上の速度勾配テンソルについて、セル境界面に対して法線ベクトルと等しい方向の勾配についてのみ計算が可能となり、セル境界面に対して平行な方向に関する勾配が得ることができないため、ラグランジュマーカー粒子が持つ速度勾配テンソルを求める際は成分ごとに補間を行う点異なる。

以上より、ラグランジュマーカー粒子が持つ速度勾配テンソルについては、 x, y, z 軸方向に対する速度の勾配

に分けて補間を行って求めた速度勾配テンソルを最終的に加え合わせることで求める。つまり、ラグランジュマーカー粒子が持つ速度勾配テンソル $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n$ のうち、 x, y, z 軸方向に対する速度の勾配を取り出したテンソルをそれぞれ $\mathbf{L}_{\text{Lag},x}^n, \mathbf{L}_{\text{Lag},y}^n, \mathbf{L}_{\text{Lag},z}^n$ とおいたとき、 $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n$ との関係は次のようになる。

$$\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n = \mathbf{L}_{\text{Lag},x}^n + \mathbf{L}_{\text{Lag},y}^n + \mathbf{L}_{\text{Lag},z}^n \quad (40)$$

$\mathbf{L}_{\text{Lag},x}^n, \mathbf{L}_{\text{Lag},y}^n, \mathbf{L}_{\text{Lag},z}^n$ については、式 (32) で表される離散 Delta 関数による重みづけを利用して、各セル境界面での速度勾配テンソルを用いて、それぞれ次のようにして求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{Lag},x}^n &= \sum_{i=1}^{N_{Fx}} w_D(r_{x,i}^n) w_D(r_{y,i}^n) w_D(r_{z,i}^n) \mathbf{L}_{\text{Cell},i}^n \\ \mathbf{L}_{\text{Lag},y}^n &= \sum_{i=1}^{N_{Fy}} w_D(r_{x,i}^n) w_D(r_{y,i}^n) w_D(r_{z,i}^n) \mathbf{L}_{\text{Cell},i}^n \\ \mathbf{L}_{\text{Lag},z}^n &= \sum_{i=1}^{N_{Fz}} w_D(r_{x,i}^n) w_D(r_{y,i}^n) w_D(r_{z,i}^n) \mathbf{L}_{\text{Cell},i}^n \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 N_{Fx}, N_{Fy}, N_{Fz} は法線ベクトル方向が添え字と同じ方向であるセル境界面のうち $|r_{x,i}^n| \leq 1.5$ かつ $|r_{y,i}^n| \leq 1.5$ かつ $|r_{z,i}^n| \leq 1.5$ を補間を行うラグランジュマーカー粒子に対して満たすものの数をそれぞれ表している。また、 $\mathbf{L}_{\text{Cell},i}^n$ は各セル境界面での速度勾配テンソルを表しており、先述の通り、セル境界面に対して法線ベクトルと等しい方向の勾配についてのみ計算が可能であるため、計算を行えない成分については 0 として値を与える。なお、本研究においては、セル境界面を共有するセル中心の速度を用いた 2 次精度中心差分を用いて空間離散化を行った。そして、 $r_{x,i}^n, r_{y,i}^n, r_{z,i}^n$ については、ラグランジュマーカー粒子と補間における i 番目セル境界面の中心との距離を各軸方向のセルの長さで割ることで求められる無次元距離を意味している。

$n-1$ ステップにおいて粒子が持つ速度勾配テンソル $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^{n-1}$ は上記の式 (40) と式 (41) を用いて、1 ステップ前に得られている値であるため、 $\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n+1}$ を求める際に新たに計算することは行わない。

式 (39) に対して、補間を行うことで求めた速度勾配テンソル $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^n$ とすでに求めている $\mathbf{L}_{\text{Lag}}^{n-1}$ 、さらに、既知である $\mathbf{B}_{\text{Lag}}^n$ と $\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n-1}$ をそれぞれ代入することによって、式 (38) の右辺第 2 項が求まるため、最終的に $n+1$ において粒子が持つ左コーシーグリーン変形テンソル $\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n+1}$ が得られる。そして、固体の構成方程式 (15) より、得られた $\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n+1}$ を用いて、 $n+1$ におけるラグランジュマーカー粒子上の非圧縮性 neo-Hooke 体の構成方程式に基づく偏差応力が以下の式で得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{Lag}}^{n+1} = G (\mathbf{B}_{\text{Lag}}^{n+1} - \mathbf{I}) \quad (42)$$

3.2.5 ラグランジュマーカー粒子上の物理量の直交メッシュへの補間

先の項までの説明によって次の時刻 ($n+1$ ステップ) においてラグランジュマーカー粒子が持つ、数値解析を行うために必要な物理量が全て求められた。これらの物理量のうち、次の時刻 ($n+1$ ステップ) においてラグランジュマーカー粒子が持つ左コーシーグリーン変形テンソルと偏差応力を直交メッシュ上のセル境界面の中心に補間することによって、さらに次の時刻 ($n+2$ ステップ)

に関する直交メッシュ上での速度と圧力を求めるための計算が可能となる。

直交メッシュ上における固体偏差応力は、先述したように各セル境界面の中心において定義されていることより、固体の左コーシーグリーン変形テンソルと偏差応力について、ラグランジュマーカー粒子から直交メッシュ上に補間する際は、各セル境界面に対して補間を行う。よって、次の時刻 ($n+1$ ステップ) における各セル境界面での中心における固体の左コーシーグリーン変形テンソル B_{CellF}^{n+1} と偏差応力 $\sigma_{\text{CellF}}^{n+1}$ は、次の時刻 ($n+1$ ステップ) においてラグランジュマーカー粒子が持つ左コーシーグリーン変形テンソルと偏差応力、そして、式 (33) で表される重み関数を利用してそれぞれ次のように補間される。

$$B_{\text{CellF}}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_P} w_i(r_i^{n+1}) V_{\text{Lag},i} B_{\text{Lag},i}^{n+1}}{\sum_{i=1}^{N_P} w_i(r_i^{n+1}) V_{\text{Lag},i}} \quad (43)$$

$$\sigma_{\text{CellF}}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_P} w_i(r_i^{n+1}) V_{\text{Lag},i} \sigma_{\text{Lag},i}^{n+1}}{\sum_{i=1}^{N_P} w_i(r_i^{n+1}) V_{\text{Lag},i}} \quad (44)$$

ここで、上記の式 (43)(44) において、 N_P は補間を行うセル境界面の中心に対して $r_i^{n+1} \leq r_{\text{max}}$ を満たすラグランジュマーカー粒子の数、 $V_{\text{Lag},i}$ はラグランジュマーカー粒子が持つ仮想的な領域の大きさ、下付き添え字 CellF はセル境界面の中心における物理量、下付き添え字 Lag, i は i 個目 ($i = 1, \dots, N_P$) のラグランジュマーカー粒子が持つ物理量であるということをそれぞれ表している。

なお、 r_i^{n+1} は補間先のセル境界面における中心の座標と次の時刻 ($n+1$ ステップ) においてその周りに存在する i 個目 ($i = 1, \dots, N_P$) のラグランジュマーカー粒子が占める空間位置 ($\mathbf{x}_{\text{Lag},i}^{n+1}$) との間の無次元距離を表し、次の式によって計算される。

$$r_i^{n+1} = \sqrt{\left(\frac{x_{\text{CellF}} - x_{\text{Lag},i}^{n+1}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{y_{\text{CellF}} - y_{\text{Lag},i}^{n+1}}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{z_{\text{CellF}} - z_{\text{Lag},i}^{n+1}}{\Delta z}\right)^2}$$

ここで、 x_{CellF} 、 y_{CellF} 、 z_{CellF} は補間を行うセル境界面の中心における x 座標、 y 座標、 z 座標をそれぞれ表している。また、 Δx 、 Δy 、 Δz は x 軸方向、 y 軸方向、 z 軸方向へのセルの長さをそれぞれ意味する。本研究において、式 (43)(44) における補間の最大許容距離は $r_{\text{max}} = 1$ であり、1 セル分の距離を設定した。

3.2.6 ラグランジュマーカー粒子を用いた直交メッシュ上の体積率計算

最後に、直交メッシュ上での計算を行う際に必要となる固体の体積率 ϕ_s を、ラグランジュマーカー粒子に関する分布 (位置) の情報とラグランジュマーカー粒子の持つ仮想的な領域を利用して求める方法について説明する。

本手法においては、2 段階の手順によって固体の体積率を計算する。

まず、1 目的の手順においては、ラグランジュマーカー粒子に関する分布の情報を用いて各セルが固体の内部・外部・界面のいずれに当てはまるかを確認する。その際は各セルにおけるラグランジュマーカー粒子の有無の情報を用いる、つまり、ある 1 つのセルとその周りのセル (2 次元においては 8 セル、3 次元においては 26 セル) のすべてにラグランジュマーカー粒子が存在する場合、そのセルを固体の内部に当たるセルであると判定する。一方で、ある 1 つのセルとその周りのセルのどこかにラグランジュマーカー粒子が存在しないセルが 1 つ以上ある場合、そのセルに固体の界面が存在する可能性があるとしてみなし、後述の 2 目的の手順によって体積率を計算する。最後に、この手順において固体内部に当たるセルとして判定されたセルに対しては、体積率として 1 を与える。

次に、2 目的の手順においては、ラグランジュマーカー粒子に関する位置の情報とラグランジュマーカー粒子の持つ仮想的な領域に基づいて、先の手順において固体内部に当たるセルとして判定されなかったセル、つまり、固体境界面、または、固体外部と考えられるセルにおける体積率を計算する。各粒子が持つ仮想的な領域を利用して計算セルにおける固体の体積率を計算する際には、セル中心とラグランジュマーカー粒子の 1 次元的な距離を用いて計算を行うことは妥当ではなく、各軸方向に関するセル中心とラグランジュマーカー粒子との距離を考慮して計算を行うことが妥当であるといえる。

本研究においては、各セルにおける固体の体積率を計算する際に、次のような重みづけ関数を利用する。

$$w_V(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } |r| \leq \frac{h}{2} - \frac{l}{2} \\ 1 - \frac{|r| - (\frac{h}{2} - \frac{l}{2})}{l}, & \text{if } \frac{h}{2} - \frac{l}{2} < |r| < \frac{h}{2} + \frac{l}{2} \\ 0, & \text{if } \frac{h}{2} + \frac{l}{2} \leq |r| \end{cases} \quad (45)$$

ここで、 r は体積率計算を行うセル中心点とラグランジュマーカー粒子との間の各軸方向に関する距離を意味し、詳細については後述する。また、 h はセルにおける x, y, z 軸方向の長さを表し、 l はラグランジュマーカー粒子生成時のサブセルにおける 1 辺の長さを表している。つまり、この重みづけ関数は、ラグランジュマーカー粒子が持つ仮想領域のうち、セル内に存在している部分の割合を 1 次元的に計算する関数であり、この関数を各軸方向に対して求め、それらの値の積をとることによって、セル内に存在している仮想領域の割合が求められるようになっていく。そのため、この関数を用いて回転しない剛体に対しての体積率を計算した場合は、各セルにおいて厳密に適切な体積率が得られ、かつ体積率の総和が厳密に保存されるようになっている。

この重みづけ関数を用いて、各セルにおける固体の体積率 ϕ_s を次のように求める。

$$\phi_s^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_P} w_V(r_{x,i}^{n+1}) w_V(r_{y,i}^{n+1}) w_V(r_{z,i}^{n+1}) V_{\text{Lag},i}}{V_{\text{Cell}}} \quad (46)$$

ここで、上記の式において、 N_P は補間を行うセルに対して $|r_{x,i}^{n+1}| < \frac{\Delta x}{2} + \frac{l}{2}$ かつ $|r_{y,i}^{n+1}| < \frac{\Delta y}{2} + \frac{l}{2}$ かつ $|r_{z,i}^{n+1}| < \frac{\Delta z}{2} + \frac{l}{2}$ を満たすラグランジュマーカー粒子の数、 $V_{\text{Lag},i}$ は i 個目 ($i = 1, \dots, N_P$) のラグランジュマーカー粒子が持つ仮想的な領域の大きさ、 V_{Cell} は体積率を計算しているセルの体積、ということをそれぞれ表している。

なお、 $r_{x,i}^{n+1}$ 、 $r_{y,i}^{n+1}$ 、 $r_{z,i}^{n+1}$ については、 i 個目のラグランジュマーカー粒子と体積率を計算しているセルの中心点との間の各軸方向に関する距離を意味している。

以上において説明した、手順 1、そして、手順 2 における式 (46) を用いることで、全計算セルにおける固体の体積率が求められる。

4. 数値解析結果

本節においては、固体と流体の密度が等しい条件下での流体・構造連成問題に関する 2 種類のベンチマーク問題 (1) を用いて、本研究において提案する手法 (以降、「提案手法」と表す) の有効性に関する検証を西口らの結果 (7) との比較によって行う。ここで、本研究において扱っている問題は全て 2 次元の計算になるが、これまで示した離散化式などは 3 次元での計算に関するものであるため、2 次元での計算を行う際はそれらの式の y 軸方向に関する項や成分を考慮しないことで適切に計算を行うことができる。つまり、本研究では 2 次元問題に対して、座標軸として x 軸と z 軸を利用して計算を行った。本研究において扱った 2 種類のベンチマーク問題の概要と実際の着目点について以下において説明する。

1 つ目のベンチマーク問題は、キャビティ流れの中において超弾性体 (固体) が移動・変形する問題であり、固体の移動・変形の様子について参照解と西口らの結果に対して比較を行う。

2 つ目のベンチマーク問題は、流体中に配置された超弾性体 (固体) と流体にそれぞれ初速度を与えることで超弾性体を振動させる問題であり、エネルギーの時刻歴について参照解と西口らの結果に対して比較を行う。

4.1 キャビティ流れによって移動・変形する超弾性体

まず、キャビティ流れの中で超弾性体が移動・変形する問題⁽¹⁾について取り扱う。

Fig. 2 において示すように、1 辺の長さが 1 である正方形解析領域の中の (0.6,0.5) に半径が 0.2 の円形の超弾性体が存在し、その周りに流体が満たされている。

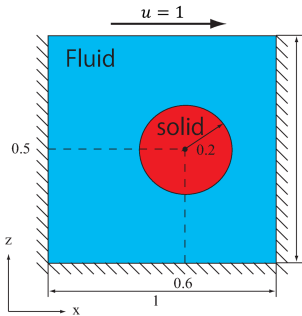


Fig. 2: Deformable disk in a lid-driven cavity: initial geometry

この解析領域上端の壁面に対し、 x 軸正方向に速さ 1, つまり、 $u = 1.0$ を境界条件として与えることで、解析領域にキャビティ流れを誘起する。また、それ以外の解析領域壁面における境界条件として、滑りなし境界条件を与える。

固体と流体に関する物性値は次の Tab. 1 において示す無次元量を与える。

Tab. 1: Deformable disk in a lid-driven cavity: Material properties

Solid: incompressible viscoelastic solid solid	
Mass density ρ_s	1.0
Shear elastic modulus G	0.1
Viscosity μ	0.01
Fluid: incompressible Newtonian fluid	
Mass density ρ_f	1.0
Viscosity μ	0.01

本研究においては解析領域を 128×128 分割 (均一に分割) した直交メッシュを用いて、無次元時間 $t = 8.20$ までの計算を行った。その際、時間刻み (Δt) については、 $\Delta t = 2.50 \times 10^{-4}$ を用いた。

以上において示した条件のもと、提案手法を用いて得られた結果と参照解 (Zhao ら⁽¹⁾) と西口ら⁽⁷⁾ の結果との間で比較を行う。なお、Zhao らは固体領域を三角形メッシュ (ラグランジュメッシュ) で表現し、その背景には固定された直交メッシュが存在し、それら 2 種類のメッシュを同時に用いて計算を行っている。また、西口らは本研究と同じ支配方程式を用いているが、固体の体積率や固体物性量に対しては移流方程式を用いて計算しており、解析領域を均一に分割した直交メッシュを用いて計算を行っている。

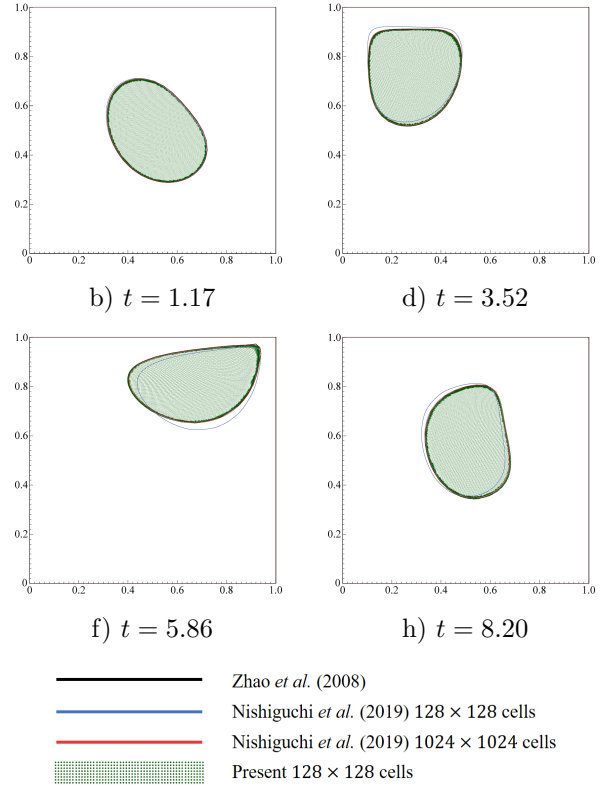


Fig. 3: Deformable disk in a lid-driven cavity: comparison of the solid deformation between the method of Zhao *et al.*, the method of Nishiguchi *et al.* and the proposed method

Fig. 3 は提案手法を用いて得られた結果 (128×128 分割) と参照解 (Zhao ら) と西口らの結果との間で固体の移動・変形に関して比較を行った図である。この図より、提案手法を用いた場合、 128×128 分割のメッシュを用いた場合であっても Zhao らによる解と精度よく一致していることが言える。一方で、西口らの結果においては、Zhao らによる解と精度よく一致させるためには 128×128 分割のメッシュでは不十分であり、 1024×1024 分割のメッシュを用いることが必要であることが確認できる。つまり、提案手法を用いることによって、計算メッシュの解像度を $1/8$ に低下 (粗く) した場合であっても、西口らの手法と同等の解を得ることができるといえる。

4.2 流体中において振動する超弾性体

次に、流体中に配置された超弾性体と流体にそれぞれ初速度を与えることで、超弾性体を振動させる問題⁽¹⁾について取り扱う。

Fig. 4 において示すように、1 辺の長さが 1 である正方形解析領域の中心 (0.5,0.5) に半径が 0.2 の円形の超弾性体が存在し、その周りに流体が満たされている。

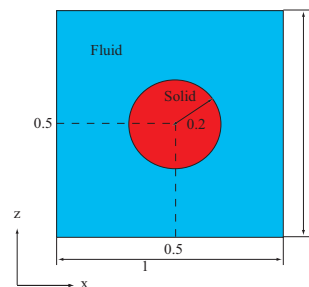


Fig. 4: Oscillating disk surrounded by fluid: initial geometry

その固体と流体に対し、次の式によって表される x 軸

方向と z 軸方向の初速度を与える.

$$u = +\psi k_z \sin(k_x x) \cos(k_z z)$$

$$w = -\psi k_x \cos(k_x x) \sin(k_z z)$$

ここで, $\psi = 5.0 \times 10^{-2}$, $k_x = k_z = 2\pi$ である.

また, 固体と流体に関する物性値は次の Tab. 2 に
いて示す無次元量を与える.

Tab. 2: Oscillating disk surrounded by fluid: Material properties

Solid: incompressible viscoelastic solid	
Mass density ρ_s	1.0
Shear elastic modulus G	1.0
Viscosity μ	0.001
Fluid: incompressible Newtonian fluid	
Mass density ρ_f	1.0
Viscosity μ	0.001

解析領域壁面における境界条件として, x 方向・ z 方向それぞれに周期境界条件を適用した. また, 本研究においては解析領域を 128×128 , 512×512 分割 (均一に分割) した 2 種類の直交メッシュを用いて, 無次元時間 $t = 1.0$ までの計算を行った. その際, 時間刻み (Δt) については, 128×128 分割においては $\Delta t = 7.8125 \times 10^{-4}$, 512×512 分割においては $\Delta t = 1.953125 \times 10^{-4}$ をそれぞれ用いた.

以上において示した条件のもと, 提案手法を用いて得られた結果と参照解 (Zhao ら⁽¹⁾) と西口ら⁽⁷⁾ の結果との間で, 解析を行った系におけるエネルギーの時刻歴について比較を行う. なお, Zhao らは固体領域を三角形メッシュ (ラグランジュメッシュ) で表現し, その背景には固定された直交メッシュが存在し, それら 2 種類のメッシュを同時に用いて計算を行っている. また, 西口らは本研究と同じ支配方程式を用いているが, 固体の体積率や固体物理量に対しては移流方程式を用いて計算しており, 解析領域を均一に分割した直交メッシュを用いて計算を行っている.

今回, 解析を行った系において考慮しなければならないエネルギーは, 固体と流体の運動エネルギー E_k , 固体のひずみエネルギー E_s , 粘性による散逸エネルギー E_{disp} と, それらの総和である系全体のエネルギー E_{total} (以降は「総エネルギー」と記述する) の 4 種類のエネルギーである. これら 4 種類のエネルギーは以下の式によって求めることができる.

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{mix} \mathbf{v}_{mix}^2 dS \quad (47)$$

$$E_s = \int_{\Omega_{solid}} \frac{G}{2} (\text{tr} \mathbf{B} - 2) dS \quad (48)$$

$$\dot{E}_{disp} = \int_{\Omega} \mu \mathbf{L} : \mathbf{L} dS \quad (49)$$

$$E_{total}(t) = E_k(t) + E_s(t) + \int_0^t \dot{E}_{disp}(s) ds. \quad (50)$$

ここで, Ω は解析領域を表す. また, 本研究においては 2 次元問題に対する解析を行っているため, 体積の微小要素ではなく面積の微小要素 dS に対して積分を行う. 実際に各々のエネルギーを計算する際は, 計算セル中心にお

いて求められた各物理量に対してセルの大きさをかけた値を全セルに対して足し合わせていくことで求めている.

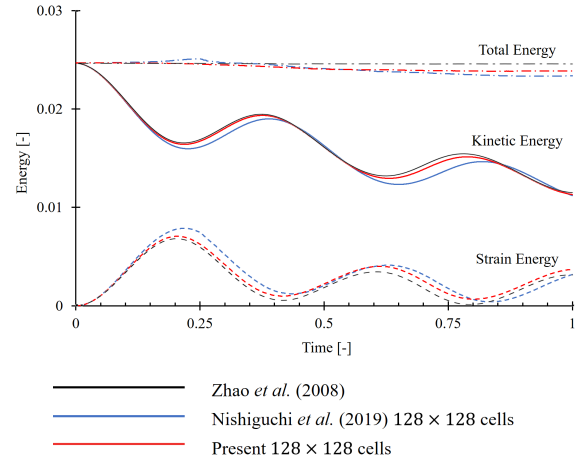


Fig. 5: Oscillating disk surrounded by fluid: comparison of time history of the total, kinetic and strain energy between the method of Zhao *et al.*, the method of Nishiguchi *et al.* (128×128 cells) and the proposed method (128×128 cells)

Fig. 5 は提案手法を用いて得られた結果 (128×128 分割のメッシュ) と参照解 (Zhao ら) と西口ら (128×128 分割のメッシュ) の結果との間で総エネルギー・運動エネルギー・ひずみエネルギーの時刻歴に関して比較を行った図である. この図より, 提案手法を用いることで, 西口らの手法において同解像度のメッシュを用いた場合と比較して, 参照解により近い結果が得られていることが確認できる.

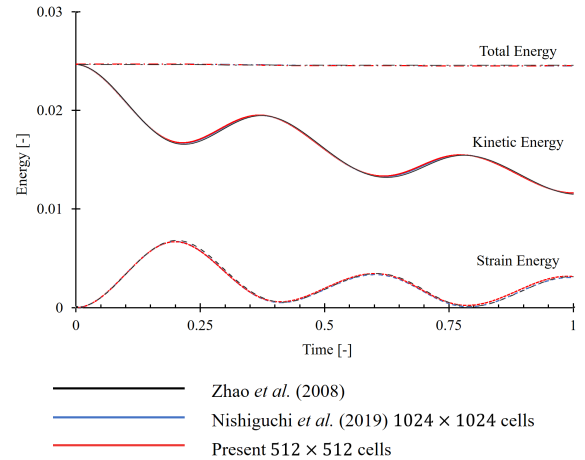


Fig. 6: Oscillating disk surrounded by fluid: comparison of time history of the total, kinetic and strain energy between the method of Zhao *et al.*, the method of Nishiguchi *et al.* (1024×1024 cells) and the proposed method (512×512 cells)

Fig. 6 は提案手法を用いて得られた結果 (512×512 分割のメッシュ) と参照解 (Zhao ら) と西口ら (1024×1024 分割のメッシュ) の結果との間で総エネルギー・運動エネルギー・ひずみエネルギーの時刻歴に関して比較を行った図である. この図より, 提案手法において 512×512 分割のメッシュを用いることで, 西口らの手法においてより高解像度 (1024×1024 分割) のメッシュを用いた場合と同様に, 特に総エネルギーやひずみエネルギーに関して参照解とほぼ同等の結果が得られていることが確認できる.

これらの結果より, 同解像度のメッシュを利用する場合, 提案手法を用いることで, 西口らの手法と比較する

と解析精度自体は向上しているが、エネルギーについて十分に精度の良い解を得るためには解像度の高いメッシュを必要とすることがいえる。その理由として、提案手法においては、エネルギーの計算を計算メッシュ上の各セルにおける各物理量を用いて行っているため、エネルギーに関して精度の良い解を得るためには、エネルギーの詳細な空間分布を得ることが必要、つまり、メッシュ解像度を高くすることで物理量の空間的な分布をより詳細に表現することが必要となっていると考えられる。

5. 結言

本研究においては、西口らによる有限体積法に基づく完全オイラー型固体-流体連成解析手法⁽⁶⁾⁽⁷⁾において、固体体積率や固体に関する物理量の移流方程式を扱うことに伴う数値拡散による解析精度の悪化を防ぐために、固体領域を陽的に表すラグランジュマーカー粒子を導入し、固体体積率や固体に関する物理量をラグランジュマーカー粒子の情報を利用して計算する手法(以降、「提案手法」と表す)を提案した。

提案手法が計算精度向上のために有効であるか確認を行うために、提案手法を用いて、西口らが扱ったベンチマーク問題⁽¹⁾に対する解析を行い、西口らの結果⁽⁷⁾と比較を行った。その結論を以下に示す。

- 固体の移動・変形について、提案手法を用いることで、メッシュ解像度を低下させた場合であっても西口らの手法と同等の精度の解が得られることが確認できた。
- エネルギーについて、提案手法を用いることで、西口らの手法と比較すると解析精度は向上しているが、十分に精度の良い解を得るためには西口らの手法の場合と同様に解像度の高いメッシュを必要とすることが確認された。

以上の点より、提案手法を用いることによって、既存の手法⁽⁶⁾⁽⁷⁾が抱えていた数値拡散による解析精度の悪化という問題が解決されており、解析精度が向上することが確認できた。つまり、提案手法の有効性が確認できた。

今後の課題として、以下のような内容のものが現在のところ挙げることができる。まず、提案手法が強連成的な定式化を用いていることや、大規模な問題であっても高い並列化性能を有するCUBE⁽¹⁷⁾のフレームワーク上で動作している、といった利点を用い、流体-構造間の相互作用の影響が大きい、現実的な問題に対する大規模解析を行うことが挙げられる。さらに、固体と流体の間の密度差を考慮可能な定式化を行っているため、固体と流体の密度が異なる条件における流体-構造連成問題に対する解析を行うことが挙げられる。

参考文献

- (1) Zhao, H., Freund, J. B. and Moser, R. D., “A fixed-mesh method for incompressible flow-structure systems with finite solid deformations,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 6 (2008), pp. 3114–3140.
- (2) Liu, J., “A second-order changing-connectivity ALE scheme and its application to FSI with large convection of fluids and near contact of structures,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 304, (2016), pp. 380–423.
- (3) Tezduyar, T. E., Sathe, S., Keedy, R. and Stein, K., “Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 195, No. 17-18 (2006), pp. 2002–2027.
- (4) 岡澤, 中尾, 西口, 田中, “平均化統一解法による Euler 型固体流体連成解析手法,” 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 76, No. 772 (2010), pp. 1533–1540.

- (5) Sugiyama, K., Ii, S., Takeuchi, S., Takagi, S. and Matsumoto, Y., “A full Eulerian finite difference approach for solving fluid-structure coupling problems,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 3 (2011), pp. 596–627.
- (6) 西口, 岡澤, 坪倉, “大規模並列計算に適した階層型直交メッシュ法による完全オイラー型固体-流体連成解析,” 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 73, No. 2 (2017), pp. 153–163.
- (7) Nishiguchi, K., Bale, R., Okazawa, S. and Tsubokura, M., “Full Eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 117, No. 2 (2019), pp. 221–248.
- (8) Nishiguchi, K., Okazawa, S. and Tsubokura, M., “Multimaterial Eulerian finite element formulation for pressure-sensitive adhesives,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 114, No. 13 (2018), pp. 1368–1388.
- (9) Sugiyama, K., Nagano, N., Takeuchi, S., Ii, S., Takagi, S. and Matsumoto, Y., “Particle-in-cell method for fluid-structure interaction simulations of neo-Hookean tube flows,” *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 59, (2011), pp. 245–256.
- (10) Nakahashi, K., “Building-cube method for flow problems with broadband characteristic length,” In *Computational fluid dynamics 2002*, Springer, pp. 77–81 (2003)
- (11) Kim, J. and Moin, P., “Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations,” *Journal of computational physics*, Vol. 59, No. 2 (1985), pp. 308–323.
- (12) Ii, S., Sugiyama, K., Takeuchi, S., Takagi, S. and Matsumoto, Y., “An implicit full Eulerian method for the fluid-structure interaction problem,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 65, No. 1-3 (2011), pp. 150–165.
- (13) Yavneh, I., “On red-black SOR smoothing in multigrid,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 17, No. 1 (1996), pp. 180–192.
- (14) Rhie, C. and Chow, W. L., “Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation,” *AIAA journal*, Vol. 21, No. 11 (1983), pp. 1525–1532.
- (15) Yang, X., Zhang, X., Li, Z. and He, G.-W., “A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 20 (2009), pp. 7821–7836.
- (16) Lundquist, K. A., Chow, F. K. and Lundquist, J. K., “An immersed boundary method enabling large-eddy simulations of flow over complex terrain in the WRF model,” *Monthly Weather Review*, Vol. 140, No. 12 (2012), pp. 3936–3955.
- (17) Jansson, N., Bale, R., Onishi, K. and Tsubokura, M., “CUBE: A scalable framework for large-scale industrial simulations,” *The International Journal of High Performance Computing Applications*, Vol. 33, No. 4 (2019), pp. 678–698.