

直交格子を使用した 3 次元の任意形状物体まわりの流体シミュレーション

Computation of the Flow Field around Arbitrary Three-Dimensional Body Geometry Using Cartesian Grid

市川 治, 日本 IBM(株), 〒242-8502 大和市下鶴間 1623-14, E-mail: ICHIKAW@jp.ibm.com
 藤井 孝藏, 宇宙科学研究所, 〒229-8510 相模原市由野台 3-1-1, E-mail: fujii@flab.eng.isas.ac.jp
 Osamu ICHIKAWA, IBM Japan Ltd. 1623-14 Shimotsuruma, Yamato, Kanagawa, Japan
 Kozo FUJII, The Institute of Space and Astronautical Science, 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan

A finite difference method for the simulation using Cartesian grid is developed. As the body boundary is not necessarily located on the grid points, finite difference formulation near the boundary is critically important. The distance from the adjacent stencils to the body boundary is integrated into the finite difference formulation to satisfy the body boundary conditions. From the stability analysis, it is proved that the mid-term in the dissipation term should be treated implicitly to avoid the severe diffusion number condition. The artificial dissipation term based on the reconstruction that uses a virtual center point gives the most accurate solution near the body boundary. As for the pressure boundary condition, the internal pressure is defined by the least squares method to satisfy all the differential calculus along the normal vector to the body boundary should be zero as much as possible around the stencil.

1. 序論

任意形状の物体まわりの流れを単純な直交格子を使用して解こうという試みが近年いくつか提案されている。物体境界の処理方法としては、セルが物体境界によって横切られる全てのケースを評価する方法や、物体境界を格子に沿った階段状の境界として近似する方法などがある。前者ではカットセルによる方法⁽¹⁾や仮想境界⁽²⁾による方法などにより物体境界が厳密に扱われるが、その分計算処理が複雑である。後者では計算コストは低いが、階段状近似に由来する精度不足が懸念される。

直交格子を使用した計算では、その精度がしばしば議論の対象となる。現在のところ、境界層の遷移まで正確に計算するまでには至っていない。それでもなお、直交格子を使用するメリットは、境界適合型格子を生成するコストがかからないという点にあり、自動車のエンジン・ルーム内の流れ⁽³⁾⁽⁴⁾や電子機器の内部流などの実用問題で有用となる。

格子生成が不要であっても、物体境界の処理に多大な計算コストがかかってしまえば、メリットが生きてこない。そこで、ある程度の精度と安定性を有しながら境界処理にコストがあまりかからない計算スキームを考える。

ここで紹介する方法は、格子点間に位置する物体境界までの距離のみを差分スキームに取り込む。カットセルのような有限体積評価をしないので、処理が低コストである。安定性については、対流項、拡散項のスキームを注意深く選択することによって、それが改善されることが示される。圧力の境界条件については、3次元における物体法線方向の傾きゼロの条件のシンプルな与え方を提案する。

なお、ここではスキームの単純化のために、格子間隔以下で入り込んでくる薄い物体のケースを考えない。

2. 記号

ここでは以下の記号を使用する。

- c = 移流速度
- d, e = 隣接セルから境界までの距離
- u = 流速
- f = 隣接セルから仮想中点までの距離
- P = 圧力
- Rc = セル・レイノルズ数
- t = 時間
- Re = レイノルズ数
- x, y, z = 座標
- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ = 格子間隔
- $I = \sqrt{-1}$
- ν = 人工粘性の係数

- $\mu = d / \Delta x$ = 粘性係数
- u = 流速を想定した関数
- P = 圧力の境界条件の 2 乗残差合計
- P_c = セル内境界プロファイルの 2 乗残差合計
- P_i = セル内圧力プロファイルの 2 乗残差合計
- n = 境界点隣接セル番号
- a_i = 圧力プロファイルを与える係数
- k_i = 境界プロファイルを与える係数
- \vec{n} = 法線ベクトル \vec{u} = 流速ベクトル
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, M$: 圧力境界条件の設定で使用
- 1, 0, C, B, i : 添え字または点名で使用
- ν, G, D, A, B : Von Neumann の安定解析で使用

3. 差分スキーム

3.1. 境界までの距離を含む差分スキーム

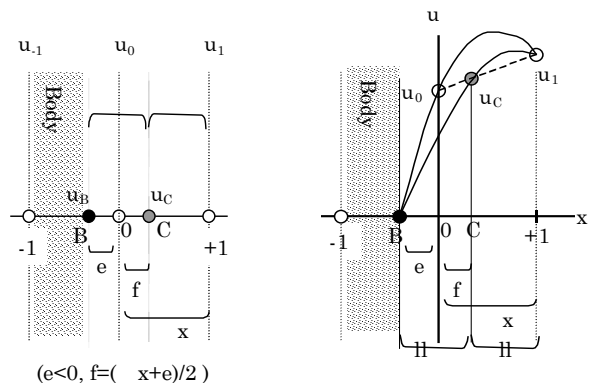


Fig. 1 Right side boundary

ここでは、物体右側の境界における x 方向の微分を考える。Fig. 1 に示すように境界上の点 B と点(+1)との間に仮想的な中点 C を考える。点 C での値 u_c は、それを挟む 2 つの格子点 u_1, u_0 の線形内挿により推定する。点(0)から物体境界までの距離を e (ただし $e < 0$) とすると点(0)から点 C までの距離 f は、 $f = (-x + e) / 2$ で表される。

3.1.1. 2 階の差分スキーム

まず、テイラー展開の定義に忠実に点 B、点(0)、点(+1)の

3点を使用して2階微分を求めると次のスキームを得る。

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \cong 2 \cdot \frac{(e \cdot u_1 + (\Delta x - e) \cdot u_0 - \Delta x \cdot u_B)}{\Delta x \cdot e \cdot (\Delta x - e)} \quad \text{--- (1)}$$

これは2次精度のスキームである。

一方で、文献5にあるように、仮想的な中点C、点B、点(+1)の3点を使用して2階微分を求めると次のスキームを得る。

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_c \cong 4 \cdot \frac{u_1 - 2 \cdot u_c + u_B}{(\Delta x - e)^2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{ただし、} u_B = 0, \quad u_c = \frac{f \cdot u_1 + (\Delta x - f) \cdot u_0}{\Delta x} \quad \text{--- (3)}$$

これは、点(0)での2階微分として使用した場合、 $e \approx -\Delta x$ の時に2次精度を有するが、その他の時は内挿によって精度が落ちるので、ここでは疑似2次精度のスキームと呼ぶことにする。

3.1.2. 1階の差分スキーム

点(0)での1階の微分項については、次のように中点Cでの微分項に、点(0)が中点からずれていることへの補正項を加えたものと理解することができる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_c \cdot (-f)}_{\text{中心補正項}} \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{ここでは、} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c \cong \frac{u_1 - u_B}{\Delta x - e} \quad \text{--- (5)} \text{ と差分化される。}$$

これは、中心補正項を加えない時に1次精度、中心補正項として式(1)を使用した時に2次精度、式(2)を使用した時に疑似2次精度の差分となる。

また、対流項の場合、3点しかとれない境界部では、差分化の際、次のように2次的人工粘性項が追加される。(以下、[] は差分による演算を表わす。)

$$c \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \cong c \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c}_{\text{1次精度部分}} - c \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_c \cdot f}_{\text{中心補正項}} - \alpha \cdot |c| \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_c \cdot \left(\frac{\Delta x - e}{2}\right)}_{\text{人工粘性項}} \quad \text{--- (6)}$$

ただし、境界の無い場所では5点を使用し、4次的人工粘性性による3次精度の風上差分を構成する。

3.2. 対流項のスキームの選択

ここでは、対流項について、式(6)の中心補正項と人工粘性項にどの精度のスキームを使用すべきかを検討する。

1次元定常移流拡散方程式の安定性解析の手法を、以下のように格子間に境界がある場合に拡張し、それぞれの精度のスキームを使用して適性を検査する。

Fig. 2のように物体の左側境界が点(+1)と点(0)の間にある場合、に関する1次元の定常移流拡散方程式

$$c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{--- (7)}$$

の解析解は、

$$\frac{\phi_0 - \phi_{-1}}{\phi_B - \phi_{-1}} = \frac{\exp(Rc) - 1}{\exp(Rc \cdot (1 + \frac{d}{\Delta x})) - 1} \quad \text{--- (8)}$$

と与えられる。ここで Rc はセル・レイノルズ数

$$Rc = \frac{c \cdot \Delta x}{\nu} \quad \text{--- (9)}$$

である。 $\nu_B=0$, $\nu_{-1}=1$ として、この解析解を、点(0)から物体境界点 B までの距離 d を横軸に、その時の ϕ_0 の値を縦軸にプロットしたものを Fig. 3 に示す。

次に、この定常移流拡散方程式を差分化する。

$$\begin{aligned} & c \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_c}_{\text{1次精度部分}} + c \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right]_c \cdot \frac{\Delta x - d}{2}}_{\text{中心補正項}} - \alpha \cdot |c| \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right]_c \cdot \left(\frac{\Delta x + d}{2}\right)}_{\text{人工粘性項}} \\ & = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right]_c \quad \text{--- (10)} \end{aligned}$$

のように、対流項を分解し、差分化に関して Table 1 に示すケース ~ を考える。どのケースも右辺の拡散項には、2次精度のスキームを使用する。

$c < 0$ の場合には中心補正項がスキームを風上化し、安定性が増大してしまうと予想されるので、より厳しいケースである $c > 0$ の場合のみを考える。人工粘性の係数 α を 0.5 にとり、ケース ~ について差分式によって得られる ϕ_0 の値をプロットしたものを Fig. 4 に示す。

ケース I の結果は、中程度以上の d の領域で、セル・レイノルズ数が 2 を越える場合に、 ϕ_0 が非物理的な値をとりうることを示している。これは、この領域では何らかの人工粘性性が必須であることを表わしている。一方で注目すべきは、d が小さい(境界までの距離が近い)領域では、セル・レイノルズ数にかかわらず、人工粘性なしでも解析解に近い妥当な値を示していることである。これは、人工粘性としては d が小さい時には効果が小さくなるようなものを選択すべきであることを示唆している。ところで、疑似2次精度の2階の差分スキームは、次のように d によりスケールされていると見ることができるので、d が小さい時には効果が自動的に小さくなるのが期待できる。したがって、この差分スキームは、今回の目的に適していると予想される。

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_c \cong 4 \cdot \frac{\phi_B - 2 \cdot \phi_c + \phi_{-1}}{(\Delta x + d)^2} = 4 \cdot \frac{d \cdot \left(\frac{\phi_B - \phi_0}{d} - \frac{\phi_0 - \phi_{-1}}{\Delta x}\right)}{(\Delta x + d)^2} \quad \text{--- (11)}$$

検証のため、ケース I と、およびケース II と を比較すると、人工粘性として疑似2次精度のスキームを使用した方が、2次精度スキームを使用するよりも、特に d が小さい領域で解析解の傾向をより良く表わしていることがわかる。

中心補正項については、ケース I の結果より、2次精度スキームは適していないことがわかる。

以上より、人工粘性項については疑似2次精度スキームを、中心補正項については疑似2次精度スキームまたは補正項なしを選択すべきであることがわかった。これはケース III またはケース IV である。今回は、解析解との一致の度合いがより良いケース III を採用した。ケース III は、グラフを見る限りにおいては、セル・レイノルズ数が大きい時に中程度の d の領域でオーバーシュートする可能性を含んでいる。しかし、境界部では流速が低くセル・レイノルズ数はあまり大きくはならないこと、また、多少のオーバーシュートは連続の式を満たすように決まる圧力のポアソン方程式により抑え込まれることが期待できるため、大丈夫と判断した。実際にこれを用いて計算させると、かなり粗い格子でもオーバーシュートすることなく、きれいな解が得られている。

Table 1 Cases of Scheme Selection

Case	Center Corrective Term	Artificial Dissipation Term
	None	None
	None	2 nd order
	None	Pseudo 2 nd order
	2 nd order	2 nd order
	Pseudo 2 nd order	Pseudo 2 nd order
	Pseudo 2 nd order	2 nd order

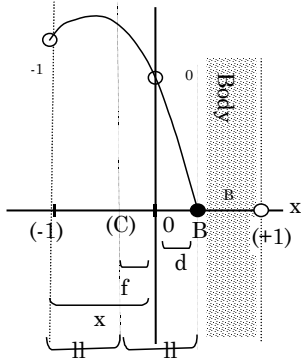


Fig. 2 Left side boundary

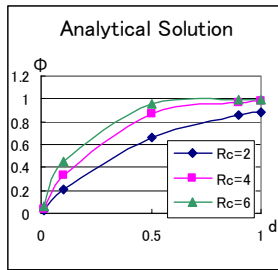


Fig. 3 Analytical Solution

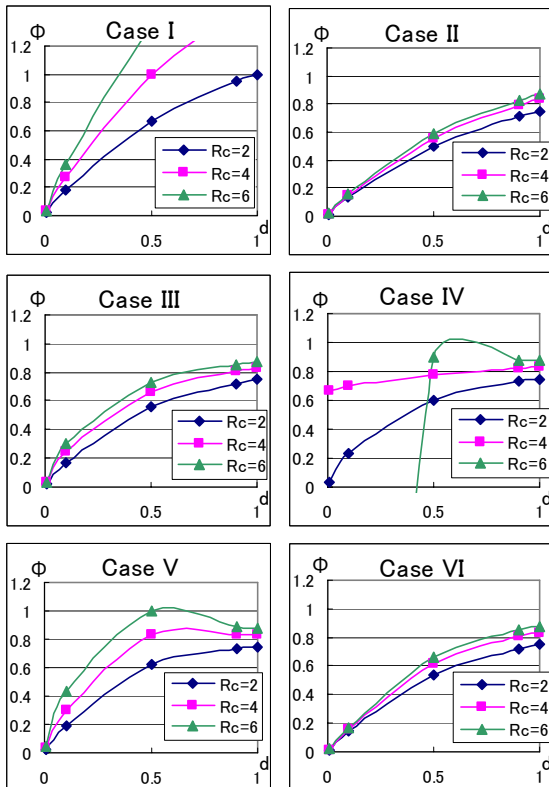


Fig. 4 Case ~

3.3. 拡散項のスキームの選択

前項の議論により、疑似2次精度の差分スキームは、境界までの距離が近い時には効果が小さく目に見えることがわかっているため、拡散項には、2次精度の差分スキームを使用すべきである。ただし、2次精度の差分スキームを陽解法で使用した時には、以下に述べるように拡散数の制限が非常に厳しくなることがあるので、対策が必要である。

Fig. 5 のように物体の左側境界が点(+1)と点(0)の間にある場合、 に関する次の1次元拡散方程式を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{--- (12)}$$

2次精度の差分スキームを使用し、時間方向には陽解法を適用すると、次の差分式を得る。

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \frac{2}{d \cdot (d + \Delta x)} \{ \phi_{i-d}^n - (1 + \beta) \cdot \phi_i^n + \beta \cdot \phi_{i-1}^n \} = 0 \quad \text{--- (13)}$$

ここでは、 $\beta = \frac{d}{\Delta x}$ --- (14) である。

この差分式について Von Neumann の安定性解析を行う。

$$\phi_i^n = V^n \cdot e^{I \cdot i \cdot \theta} \quad \text{--- (15)}$$

$$\phi_{i-d}^n = V^n \cdot e^{I \cdot (i-\theta + \theta \cdot \beta)}$$

$$\phi_{i-1}^n = V^n \cdot e^{I \cdot (i-\theta)}$$

ここでは、I は純虚数である。

これらを式(13)に代入すると次式を得る。

$$V^{n+1} = G \cdot V^n \quad \text{--- (18)}$$

ここで、 $G = 1 - D \cdot (1 + \beta - e^{I \cdot i \cdot \beta} - \beta \cdot e^{-I \cdot \theta})$ --- (19)

$$D = \frac{2 \cdot \Delta t}{d \cdot (d + \Delta x)} \quad \text{--- (20)}$$

増幅係数は、

$$|G^2| = (1 - D \cdot A)^2 - (D \cdot B)^2 \quad \text{--- (21)}$$

ここで、 $A = (1 + \beta) - \cos(\theta \cdot \beta) - \beta \cdot \cos(\theta)$ --- (22)

$$B = \sin(\theta \cdot \beta) - \beta \cdot \sin(\theta) \quad \text{--- (23)}$$

$|G^2| \leq 1$ となることが安定条件であるので、

$$D \cdot (A^2 - B^2) \leq 2 \cdot A \quad \text{--- (24)}$$

であれば安定である。

A, B のとりうる値の範囲は、

$$0 \leq A \leq 2 \cdot (1 + \beta) \quad \text{--- (25)}$$

$$0 \leq B^2 \leq (1 + \beta)^2 \quad \text{--- (26)}$$

であるので、 $A^2 \leq B^2$ の時、式(24)は常に成立する。

$A^2 \geq B^2$ の時は、

$$D \leq \frac{2}{A - \frac{B^2}{A}} \quad \text{--- (27)}$$

となり、この条件は、 $B = 0$ かつ $A = 2 \cdot (1 + \beta)$ の時に最も厳しい。よって、

$$D \leq \frac{1}{1 + \beta} \quad \text{--- (28)}$$

であれば十分である。

式(20)と式(28)より、次式が得られる。

$$\frac{\Delta t}{d \cdot \Delta x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{--- (29)}$$

通常知られている拡散数制限は、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{--- (30)}$$

であるので、式(29)は式(30)を格子間に物体境界がある場合のために修正されたものと見ることができる。ここでは、式(29)を修正拡散数制限と呼ぶことにする。

一般に高レイノルズ数流体計算の場合にはクーラン数の制限が厳しくなり、拡散数の制限は問題になることは少ないが、この修正拡散数制限は、格子点が物体境界に近い場合にクーラン数の制限よりもはるかに厳しい条件となる。このままでは、時間刻み t を実用的でないほど小さくとらなくてはならないので、式(13)を次のように変更する。

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \frac{2}{d \cdot (d + \Delta x)} \{ \phi_{i-d}^n - (1 + \beta) \cdot \phi_i^{n+1} + \beta \cdot \phi_{i-1}^n \} = 0 \quad \text{--- (31)}$$

ここでは、拡散項の中心項を陰的に扱っている。
この差分式について Von Neumann の安定性解析を行うと、次の増幅係数を得る。

$$|G^2| = \frac{(1 + D \cdot A)^2 - (D \cdot B)^2}{(1 + D \cdot C)^2} \quad \text{--- (32)}$$

$$\text{ここで、 } A = \cos(\theta \cdot \beta) + \beta \cdot \cos(\theta) \quad \text{--- (33)}$$

$$B = \sin(\theta \cdot \beta) - \beta \cdot \sin(\theta) \quad \text{--- (34)}$$

$$C = 1 + \beta \quad \text{--- (35)}$$

$|G^2| \leq 1$ となるのが安定条件であるので、

$$D \cdot (A^2 - B^2 - C^2) \leq 2 \cdot (C - A) \quad \text{--- (36)}$$

であれば安定である。D は式(20)より正である。

A のとりうる値の範囲は、

$$-(1 + \beta) \leq A \leq (1 + \beta) \quad \text{--- (37)}$$

であるので、

$$C - A \geq 0 \quad \text{--- (38)}$$

$$C + A \geq 0 \quad \text{--- (39)}$$

よって、

$$A^2 - B^2 - C^2 = -(C + A) \cdot (C - A) - B^2 \leq 0 \quad \text{--- (40)}$$

式(38)、式(40)より、式(36)は常に成立する。よってこのスキームは無条件安定である。修正拡散数の制限を受けない。

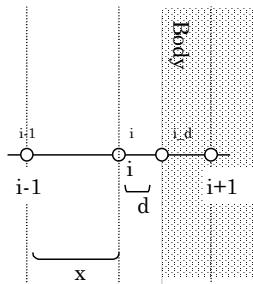


Fig. 5 Left side boundary

3.4. 圧力ポアソン式

圧力は、Fig. 6 の $P(i,j)$ のような物体境界に隣接した物体内部の格子点で値を持つ。以下、これらの点を境界点と呼ぶこととする。ただし、いくら物体境界に隣接していても、Fig. 6 (c) のように斜め方向で隣接する点は差分で使用されないの境界点に含まれない。

境界点での圧力は複数の方向からの計算に共有されることがある。例えば、Fig. 6 の $P(i,j)$ は、 $P(i,j+1)$ 中心の差分計算のために (a) 方向で使用され、 $P(i-1,j)$ 中心の差分計算のために (b) 方向で使用される。このように境界点の圧力を定めることにより、圧力のポアソン式の左辺（圧力に関する差分）は、境界部でも通常の中心差分で計算することができる。

また、物体内部で定義した仮想的な圧力を複数方向で共有することは、物体表面上で計算される C_p 分布を滑らかにする効果がある。

境界点の圧力は、物体境界での境界条件により決められる。詳しくは次章で説明する。

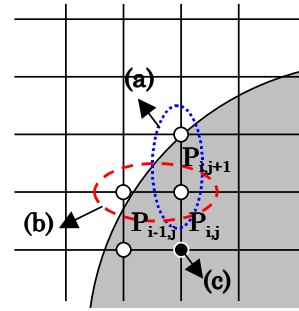


Fig. 6 Pressure at boundary point

3.5. 差分スキームのまとめ

以上の議論から、今回使用する差分スキームをまとめる。スキームの単純化のため、フラグを用いて境界の有無・方向に関わらず共通に使用できるように構成する。ただし、Fig. 7 に示すように、予め物体内部点での流速をゼロに設定しておくことと、物体境界までの距離 d, e を物体境界の無いところでは格子間隔の値に設定しておくことを前提とする。

- 対流項およびポアソン式右辺用の 1 階微分 (1 次精度部分)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{c-i} = \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{(d - e)} \quad \text{--- (41)}$$

- 境界での人工粘性項および中心補正項用の 2 階微分

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{c-i} &= 4 \cdot \frac{(u_{i+1} - 2 \cdot u_i + u_{i-1})}{(d - e)^2} \\ &\quad - (flag_right_boundary) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d + e)}{(d - e)^2 \cdot d} \cdot (u_{i+1} - u_i) \right] \\ &\quad - (flag_left_boundary) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d + e)}{(d - e)^2 \cdot e} \cdot (u_{i-1} - u_i) \right] \end{aligned} \quad \text{--- (42)}$$

- ここで、 $flag_right_boundary$ は物体の右側の境界部、 $flag_left_boundary$ は物体の左側の境界部であれば 1 を、そうでなければ、0 を与えるフラグである。

これらを用いて、対流項は次のように構成される。

$$\begin{aligned} u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i &\cong u \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{c-i} - u \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{c-i} \cdot \frac{d + e}{2} \\ &\quad - \alpha \cdot |u| \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{c-i} \cdot \left(\frac{d - e}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \\ &\quad + (flag_5pt_ok) \cdot \left(u \cdot \frac{-u_{i+2} + 2 \cdot u_{i+1} - 2 \cdot u_{i-1} + u_{i-2}}{12 \cdot \Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot |u| \cdot \frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{4 \cdot \Delta x} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (43)}$$

- ここで、 $flag_5pt_ok$ は物体境界に邪魔されずに 5 点の中心差分を採用することができれば 1 を、そうでなければ、0 を与えるフラグである。

粘性項は次のように構成される。陽解法の場合 u_i は、次の時間ステップの値を使用するために、 u_i^{n+1} として左辺に移動する。

- 粘性項用の 2 階微分

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_i = 2 \cdot \frac{(e \cdot u_{i+1} + (d-e) \cdot u_i - d \cdot u_{i-1})}{d \cdot e \cdot (d-e)} \quad \text{--- (44)}$$

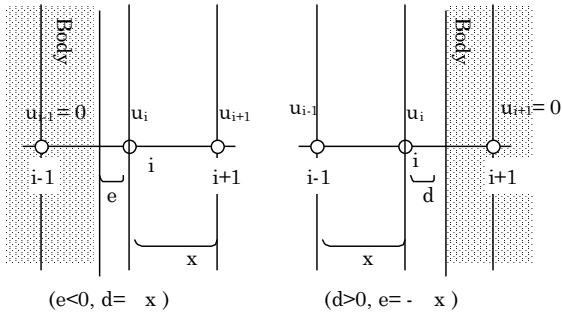


Fig. 7 Boundary of right side and left Side

4. 物体境界での境界条件

物体境界での流速の境界条件については、差分スキームに取り込まれている。ここでは、圧力の境界条件について述べる。

4.1. 圧力境界条件

物体境界上での圧力の境界条件は、 \vec{n} を法線ベクトルとして、次式で与えられる。

$$\nabla p \cdot \vec{n} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u} \cdot \vec{n} \quad \text{--- (45)}$$

ここで、レイノルズ数が極めて小さい場合を除き、実用上は右辺をゼロと置いて問題ないと言われている。

$$\nabla p \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{--- (46)}$$

これを満たすように境界点の圧力を設定するのが、基本的な考え方である。

ところが、Fig. 8 を例にとると、セル ω において、法線ベクトル \vec{n} と $P_{i+1,j+1}$, $P_{i,j+1}$ を使用して、式(46)が満たされるように $P_{i,j}$ を決めたととしても、それが、セル ω で式(46)を良く満たすとは限らない。境界点での圧力を設定する際には、それが共有されるすべての境界セルで、式(46)が総合的になるべく良く満たされることを考えなければならない。

2次元の場合には Fig. 9 のように最大で4セルが、3次元の場合には Fig. 10 のように最大で8セルが、圧力の境界条件の下に境界点を共有するセルとなりうる。ここで、セルとは、格子点を中心とするコントロール・ボリュームではなく、格子点を頂点に持つ四角形(直方体)のことである。それらのセルは、物体境界線(面)と交差した時に、それぞれのセルを代表する法線ベクトルを持つ。それらは、圧力の境界条件の計算に先立ち、予め計算して用意しておくこととする。

以下、3次元の場合を考える。flag()は、 ω から ω' のセルに関して、境界を持つ時に1を、持たない時に0を与えるフラグであるとする。セル ω を例にとれば、Fig. 11 で点(x,0,0)、点(0,y,0)、点(0,0,z)のどれかが物体外部点であれば、図中のローカルなx軸、y軸、z軸上のどれかに物体境界線が刻まれる。このとき、flag()は1となり、それ以外の場合は0となる。

境界点の圧力 P_0 は、式(46)を満たさねばならない全てのセルでの式(46)の最小2乗法により求められる。すなわち、次の関数を最小にするように定められる。

$$\Phi = \sum_{\omega} \text{flag}(\omega) \cdot (\nabla p \cdot \vec{n})_{\omega}^2 \quad \text{--- (47)}$$

式(47)を最小にする P_0 を求めるため、 P_0 で微分し0とおく。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_0} = \sum_{\omega} 2 \cdot \text{flag}(\omega) \cdot \left(\frac{\partial \nabla p \cdot \vec{n}}{\partial P_0} \right)_{\omega} \cdot (\nabla p \cdot \vec{n})_{\omega} = 0 \quad \text{--- (48)}$$

セルごとの法線ベクトル \vec{n}_{ω} は既知である。あとは、セルごとの圧力勾配ベクトル $(\nabla p)_{\omega}$ を、セル内の既知の圧力と P_0 を使用して記述すれば、式(48)を解くことができる。

1つのセルに注目した時に、圧力の分布を次式のように仮定する。ここでは、Fig. 11 のように、注目する境界点を中心にしてローカルなx、y、z座標を設定している。

$$p(x,y,z) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + P_0 \quad \text{--- (49)}$$

セル内の3点で既知の圧力があれば、式(49)の a_1 , a_2 , a_3 を求めることができる。そのような点とは、外部点(物体外の点)と境界点(物体内であるが圧力を持つ点)である。これらの圧力は1ステップ前の値を使用することになるが、ポアソン式の反復解法の中で正しい値に収束する。

セル内にはローカルの原点以外に格子点が7点あるので、既知の圧力が最大で7点与えられる場合がある。また、最低3点は常に利用可能なので、条件過多に備え、最小2乗法を使用する。既知の圧力を P_i 、その圧力を与える点の座標を (x_i, y_i, z_i) とし、次の式を最小にする a_1, a_2, a_3 を求める。

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_i (p(x_i, y_i, z_i) - P_i)^2 \\ &= \sum_i (a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot y_i + a_3 \cdot z_i + P_0 - P_i)^2 \quad \text{--- (50)} \end{aligned}$$

これを a_1 で微分して、それを0とおく。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_1} = \sum_i 2 \cdot x_i (a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot y_i + a_3 \cdot z_i + P_0 - P_i) = 0 \quad \text{--- (51)}$$

a_2, a_3 についても同様に行い、次のようにまとめる。

$$\mathbf{M} \cdot \vec{a} = \vec{b} - P_0 \cdot \vec{c} \quad \text{--- (52)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_i P_i \cdot x_i \\ \sum_i P_i \cdot y_i \\ \sum_i P_i \cdot z_i \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i \\ \sum_i y_i \\ \sum_i z_i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \sum_i x_i \cdot x_i & \sum_i x_i \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot z_i \\ \sum_i y_i \cdot x_i & \sum_i y_i \cdot y_i & \sum_i y_i \cdot z_i \\ \sum_i z_i \cdot x_i & \sum_i z_i \cdot y_i & \sum_i z_i \cdot z_i \end{pmatrix} \quad \text{--- (53)} \end{aligned}$$

である。

これにより、 a_1, a_2, a_3 が求まる。

$$\vec{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{b} - P_0 \cdot \vec{c}) \quad \text{--- (54)}$$

また、式(49)より、

$$\nabla p = \vec{a} \quad \text{--- (55)}$$

なので、

$$\frac{\partial \nabla p}{\partial P_0} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial P_0} = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \vec{c} \quad \text{--- (56)}$$

式(54),(55),(56)を、式(48)に代入する。

$$\sum_{\omega} 2 \cdot \text{flag}(\omega) \cdot \left(-(\mathbf{M}^{-1} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n} \right)_{\omega} \cdot \left((\mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{b} - P_0 \cdot \vec{c})) \cdot \vec{n} \right)_{\omega} = 0 \quad \text{--- (57)}$$

これを、 P_0 について解く。

$$P_0 = \frac{\sum_{\omega} \text{flag}(\omega) \cdot \left((\mathbf{M}^{-1} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n} \right)_{\omega} \cdot \left((\mathbf{M}^{-1} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{n} \right)_{\omega}}{\sum_{\omega} \text{flag}(\omega) \cdot \left((\mathbf{M}^{-1} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n} \right)_{\omega}^2} \quad \text{--- (58)}$$

これが、境界点における圧力値を与える式である。2次元の場合も、ほぼ同様に求まる。

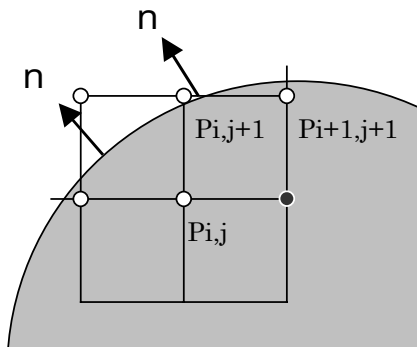


Fig. 8 Pressure boundary condition

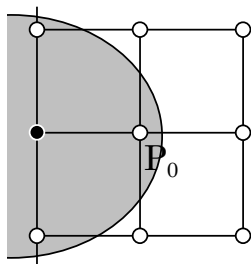


Fig. 9 Boundary cells in 2D case

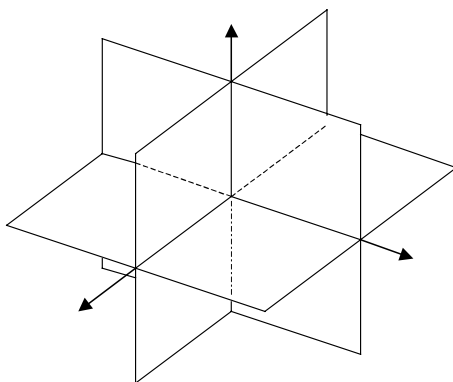


Fig. 10 Boundary cells in 3D case

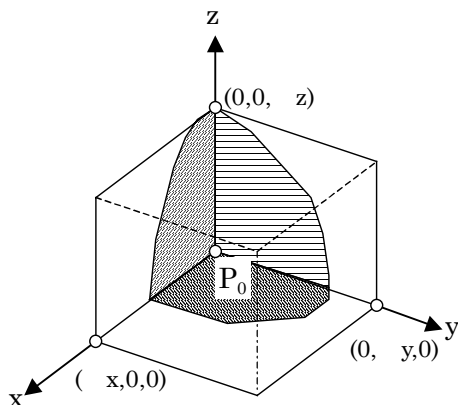


Fig. 11 Boundary cell No.1 in 3D case

4.2. 薄い物体の場合の2価処理

2次元で考えると、4つのセルが境界を持つセルであっても、Fig. 9のように同じ空間に開いている場合には、問題ない。このケースは薄い物体だけでなく、厚い物体の端点でもしばしば表れる。しかし、Fig. 12のように、上下(または左右)2つの異なる空間に対して開いている場合には、境界点の圧力を2つの方向で共有するのは適切ではない。この場合、1つの境界点について2つの値を持たせるような例外処理が必要である。

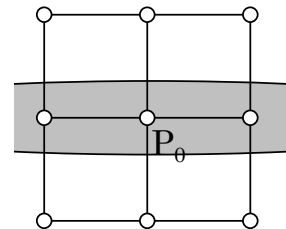


Fig. 12 Exceptional Case

4.3. 法線ベクトル

今回の方法では、境界を含むセルごとに法線ベクトルを用意する必要がある。これを求めるのは一見煩雑そうであるが、実は、それぞれのセルについてグリッドと物体境界の交点がわかれば、次のように容易に算出することができる。

Fig. 11のようにセルごとにローカルな座標軸を用意し、次のポテンシャル関数を考える。

$$\phi(x, y, z) = k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + k_3 \cdot z - 1 \quad \text{--- (59)}$$

これは、ローカルの原点で -1 の値を与える。そして、グリッドと物体境界の交点で 0 を与えるように、 k_1, k_2, k_3 を決める。グリッドと物体境界の交点が3点以上利用可能ならばそれは求められる。境界を含むセルなら、通常は交点が3点以上あるはずだが、まれに交点が格子点の真上に来た場合に、複数の交点が1点に集まったような形になり、3点の利用ができないことがある。この場合には、微少な値だけ、交点をずらし、複数の交点に戻す例外処理を行う。そうすることで、常に3点以上の交点を利用可能となり、以下を使用できる。

グリッドと物体境界の交点(i)の座標を (x_i, y_i, z_i) とし、次の式を最小にする k_1, k_2, k_3 を求める。(i=1 ~ $i_{\max}, i_{\max} - 3$)

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_i (\phi(x_i, y_i, z_i))^2 \\ &= \sum_i (k_1 \cdot x_i + k_2 \cdot y_i + k_3 \cdot z_i - 1)^2 \quad \text{--- (60)} \end{aligned}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial k_2} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial k_3} = 0$ より、次式が求まる。

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i \cdot x_i & \sum_i x_i \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot z_i \\ \sum_i y_i \cdot x_i & \sum_i y_i \cdot y_i & \sum_i y_i \cdot z_i \\ \sum_i z_i \cdot x_i & \sum_i z_i \cdot y_i & \sum_i z_i \cdot z_i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_i x_i \\ \sum_i y_i \\ \sum_i z_i \end{pmatrix} \quad \text{--- (61)}$$

これを用いて、法線ベクトル \vec{n} は次のように求められる。

$$\vec{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \text{--- (62)}$$

5. 有効性の評価

5.1. 翼型 (NACA0012) まわりの流れ (2次元)

迎角 0 度の NACA0012 まわりの流れを、今回の直交座標による方法と従来の物体境界適合座標による方法とで計算を行った。Fig. 13 に NACA0012 を配置した直交格子を、Fig. 14 に物体境界適合格子を示す。両者の最小格子間隔は、ほぼ同じに取っている。レイノルズ数は 1000 である。

Fig. 15, 16 に両者の等圧線分布を示す。Fig. 17 に直交格子計算での流速ベクトルを示す。概ね妥当な計算結果が得られている。

Fig. 18 に C_p 分布を示すが、両者は前縁で少し異なっている。この部分は格子点にして数点しかないにもかかわらず、流れが大きく変化するので、物体形状を計算の中にどう取り込むかの違いが結果に大きく表れる。 C_d 値を Table 2 に示す。Fig. 18 と Table 2 には、比較のために、物体から離れる方向への格子間隔を半分にした物体境界適合格子の計算結果を合わせて表示した。 C_p 分布や C_d 値の相違は、物体境界適合格子の解像度が上がるにしたがって、小さくなっている。これは、通常の物体境界適合格子を使用した計算の場合、Fig. 19 に示すように、法線方向の勾配ゼロという圧力の境界条件が、物体境界上ではなく、物体から半格子離れた点で満たされるため、法線方向の解像度が精度に大きく影響することを示唆している。Fig. 20 に直交格子計算による前縁圧力分布を示す。結果的に、同程度の格子間隔で比較した場合、今回の直交格子計算の方がより良い C_p 分布が得られている。

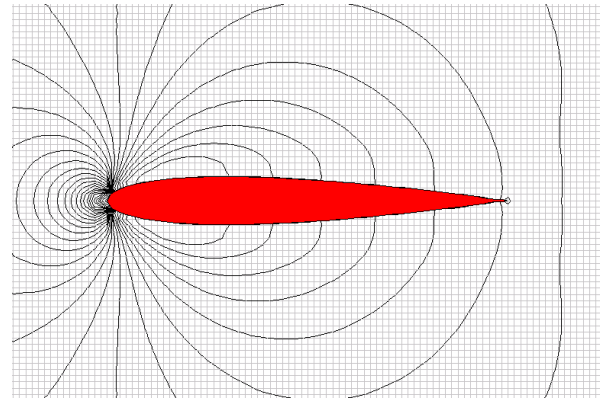


Fig. 15 Pressure contour around NACA0012 (Cartesian grid system)

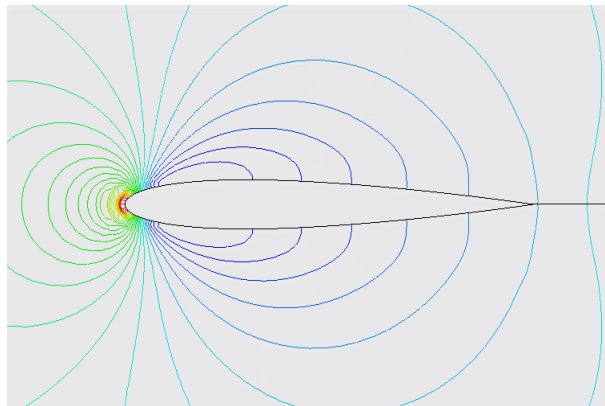


Fig. 16 Pressure contour around NACA0012 (boundary fitted coordinate grid system)

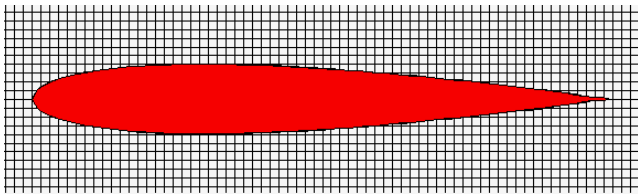


Fig. 13 Cartesian grid system around NACA0012

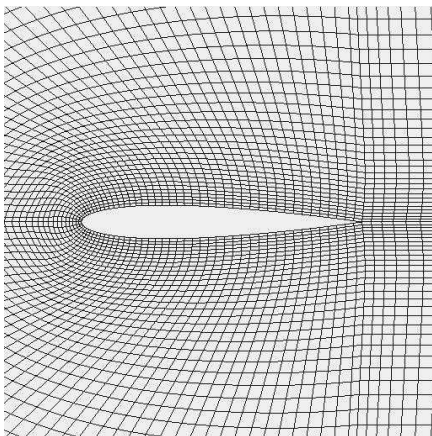


Fig. 14 Boundary fitted coordinate grid system around NACA0012

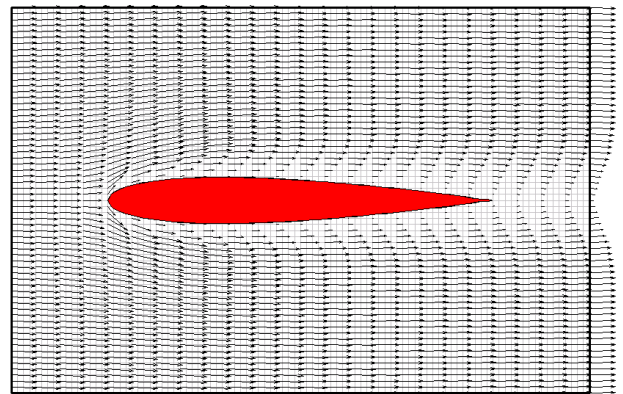
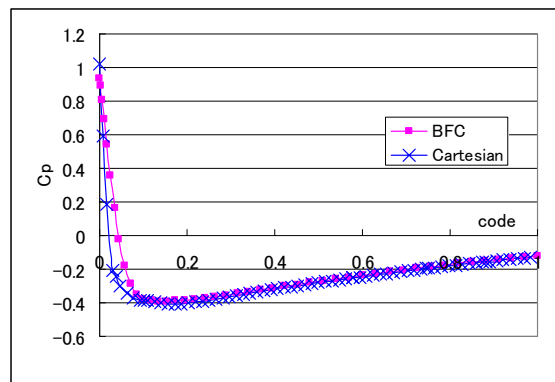


Fig. 17 Velocity vector plot around NACA0012 (Cartesian grid system)



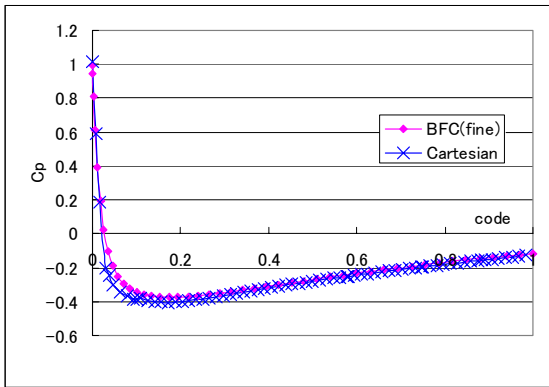


Fig. 18 Cp distribution around NACA0012

Table 2 Cd around NACA0012

	Cd	Cdv	Cdp
Boundary fitted coordinate grid	0.1262	0.0760	0.0502
Boundary fitted coordinate grid (fine mesh case)	0.1161	0.0795	0.0366
Cartesian grid (current)	0.0968	0.0625	0.0343

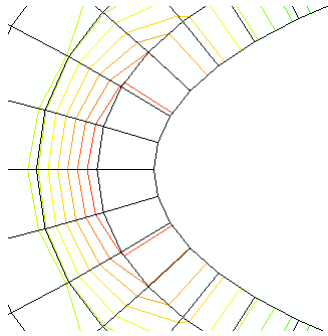


Fig. 19 Pressure contour near leading edge (boundary fitted coordinate grid system)

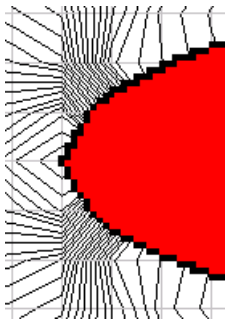


Fig. 20 Pressure contour near leading edge (Cartesian grid system)

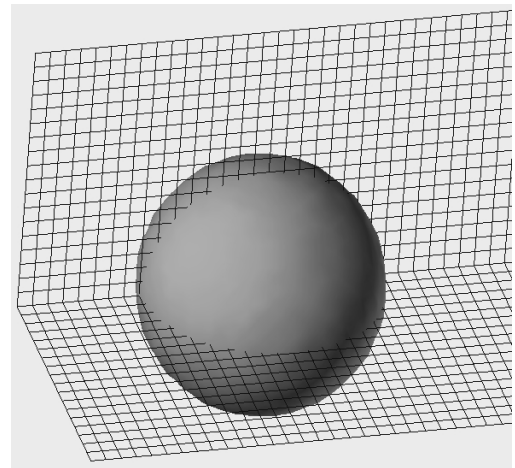


Fig. 21 3D Cartesian grid system around sphere

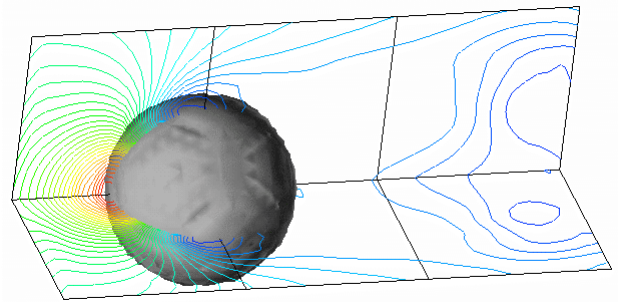


Fig. 22 Pressure contour around sphere

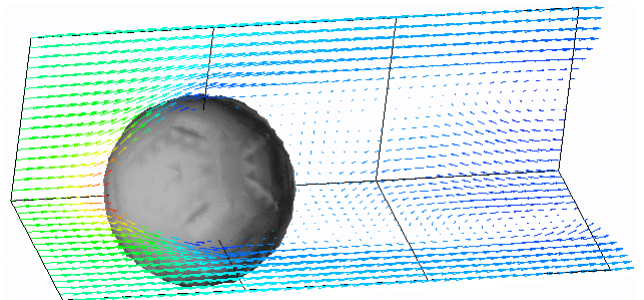


Fig. 23 Velocity vector plot around sphere

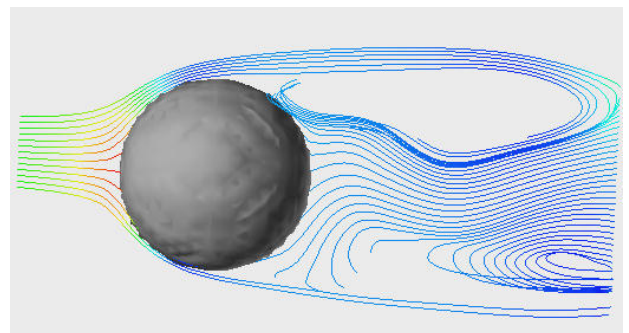


Fig. 24 Stream line plot around sphere (Side view)

5.2. 球まわりの流れ (3次元)

Fig. 21 に球を配置した直交格子を示す。球の直径に対して、格子はわずかに 16 点しかとっていないが、Fig. 22,23 に示すように滑らかな計算結果が得られている。レイノルズ数は 1000 である。Fig. 24,25 に $T=80$ の時の流線を示す。後流は、3 次元的な渦構造になっていることがわかる。Fig. 26 に Cd 値について今回直交格子により計算された値と他の計算による値および実験による値を比較した。今回は粗い格子を使用したにもかかわらず、10%程度の誤差に収まっている。

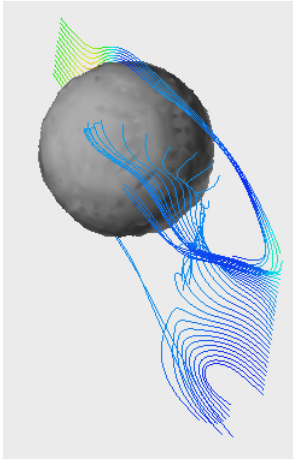


Fig. 25 Stream line plot around sphere (Back view)

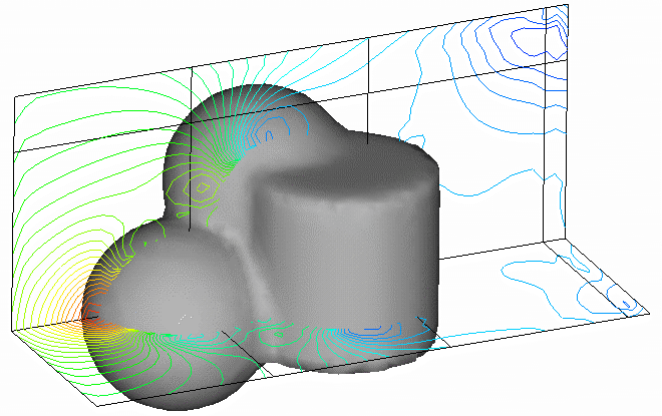


Fig. 28 Pressure contour around the complicated object

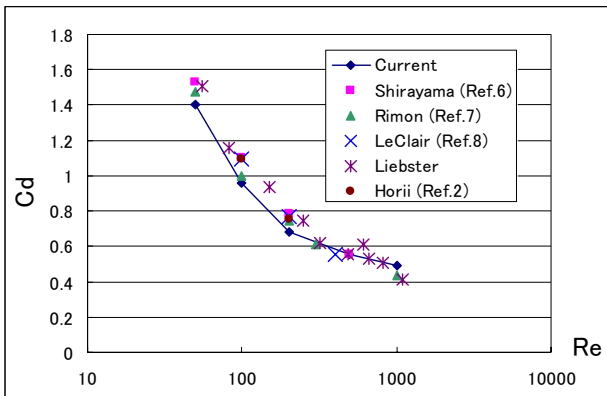


Fig. 26 Cd plot around sphere

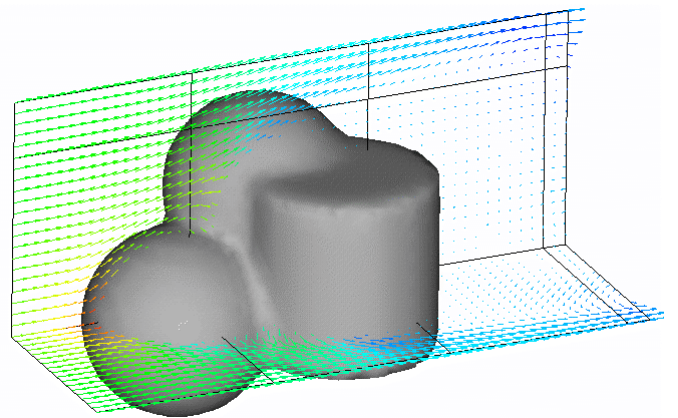


Fig. 29 Velocity vector plot around the complicated object

5.3. 複雑形状まわりの流れ (3次元)

Fig. 27 に示す複雑形状まわりの流れを計算した。レイノルズ数は 1000 である。部品である球の直径に対して、格子はわずかに 16 点しかとっていない。Fig. 28 に圧力分布を、Fig. 29 に速度ベクトルを、Fig. 30,31,32 に流線を示す。格子が粗いにもかかわらず、形状を良く反映した滑らかな流れが得られている。

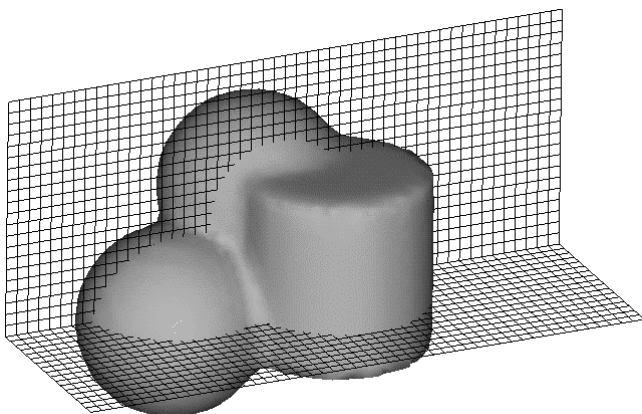


Fig. 27 3D Cartesian grid system around the complicated object

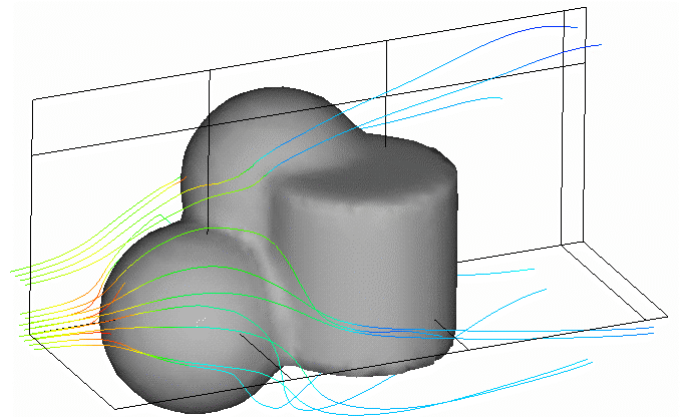


Fig. 30 Stream line plot around the complicated object

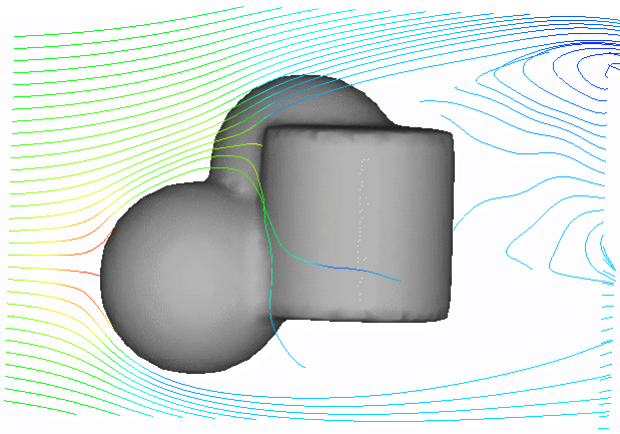


Fig. 31 Stream line plot around the complicated object (Side view)

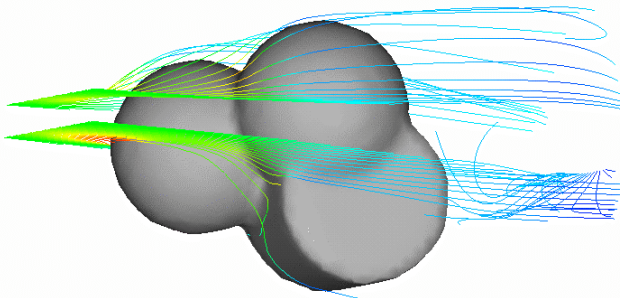


Fig. 32 Stream line plot around the complicated object (Top view)

5.4. 物体境界適合座標計算との計算負荷の比較

従来の物体境界適合格子を使用した計算と今回の直交格子を使用した計算とでCPUの消費時間を計測した。Table 3に結果を示す。値は1ステップあたりの時間を、計算に使用した格子点の数で除したものである。計測に使用したCPUは、Intel Pentium II 450MHzである。両者のコンパイラが異なるため厳密な比較はできないが、圧力のポアソン式の反復では、直交格子計算の方が約2倍速くなっている。これは、メトリックが無いためと考えられる。一方で、Navier-Stokesの運動量式の方は、直交格子計算の方が若干遅いという結果になった。これは、式(41),(42),(43)で見られるように、境界までの距離を差分に取り込むために、スキーム自身が長くなっているためと推定される。計算全体としては、両者の計算負荷はおおよそ同じと見積もることができる。

Table 3 CPU time per stencil per step (sec.)

	Poisson equation	Momentum equation	Compiler
Boundary fitted coordinate grid	1.08×10^{-6}	3.78×10^{-6}	Visual Fortran
Cartesian grid (current)	4.61×10^{-7}	4.68×10^{-6}	Visual C++

6. 結論

- ◇ 境界部での人工粘性項については疑似2次精度スキームを、中心補正項については疑似2次精度スキームまたは補正項なし(1次精度)を選択すべきである。
- ◇ 境界部での拡散項には、2次精度スキームを使用し、その中心項は陰的に扱うべきである。
- ◇ 今回の方法は、計算を単純に行えるという直交格子のメリットを損なわずに、3次元物体の境界を処理できる。

- ◇ 今回の方法は、実用的な精度と安定性を有しながら境界処理にコストがあまりかからない計算方法となっている。

7. 参考文献

- (1) T.Ye, R.Mittal, H.S. Udaykumar and W.Shvy, "A Cartesian Grid Method For Viscous Incompressible Flows With Complex Immersed Boundaries", AIAA-99-3312, pp. 547-557.
- (2) 堀井, 西田, 里深, "仮想境界デカルト格子法による物体まわりの非圧縮性DNS", 第13回数値流体力学シンポジウム(1999)
- (3) 小野, 姫野, 富田, 藤谷, "車のエンジンルーム内の実用的な流れ解析手法の開発", 第11回数値流体力学シンポジウム(1997)
- (4) 橋口, 桑原, "複雑形状をすぎる非定常流の数値計算", 第10回数値流体力学シンポジウム(1996)
- (5) 市川, 藤井, "直交格子を利用して任意物体形状まわりの流れを解く場合の境界処理", 第13回数値流体力学シンポジウム(1999)
- (6) S.Shirayama, "Flow Past a Sphere: Topological Transitions of the Vorticity Field", AIAA Journal Vol.30, No.2, pp. 349-358 (1982)
- (7) Y.Rimon, S.I.Cheng, "Numerical Solution of a Uniform Flow over a Sphere at Intermediate Reynolds Numbers", Physics of Fluids, Vol.12, No.5, pp. 949-959 (1969)
- (8) B.P.Le Clair, A.E.Hamielec, "A Numerical Study of the Drag on a Sphere at Low and Intermediate Reynolds Numbers", Journal of the Atmospheric Sciences, Vol.27, pp. 308-315 (1970)