

境界位置を取り込む直交格子差分法による3次元移動境界問題の計算 Computation of the flow field with moving boundary by using Cartesian grid

市川 治, 日本 IBM(株), 〒242-8502 大和市下鶴間 1623-14, E-mail: ICHIKAW@jp.ibm.com
Osamu ICHIKAWA, IBM Japan Ltd. 1623-14 Shimotsuruma, Yamato, Kanagawa, Japan

A finite difference method for the simulation using Cartesian grid is expected to be an alternate solution for the problems where the conventional unstructured or structured grid formulation has been widely used. In this method, we can eliminate the cost for the grid generation, because the distance from the adjacent stencils to the body boundary is integrated into the finite difference formulation. In our previous report, we proposed the scheme with better stability and accuracy for the momentum equation based on the analysis of 1 dimensional advection and dissipation equation. We also proposed the method to determine the pressure at internal stencil that should be consistent to the ones at adjacent stencils. This report shows that the proposed method can be applied for a flow field around a transforming body, where the grid generation was severe over-head for the simulation by the conventional method.

1. 序論

直交格子を使用した流体シミュレーションは、格子生成のためのコストがかからないという利点があるので、適用分野や目的によっては、従来の非構造格子や一般座標の構造格子を使用した方法を代替できるのではないかと期待される。

直交格子計算での物体境界の処理方法としては、カットセルによる方法⁽¹⁾、仮想境界による方法⁽²⁾、物体境界を格子に沿った階段状の境界として近似する方法⁽³⁾⁽⁴⁾、物体内部も統一的に解いてしまうCIP法⁽⁵⁾、そして今回のように、格子点間に位置する物体境界の隣接格子点からの距離を差分スキームに取り込む方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾などがある。

筆者らは、計算コストの観点から境界位置を差分スキームに取り込む方法に注目し、前回の報告⁽⁸⁾では、主に次の2点を新しい知見として報告した。

1. 境界点を含む不等間隔の3点を用いて差分近似を構成する場合に、1次元の移流拡散方程式安定性解析により、安定で誤差が少なくなるような差分スキームを構成した。
2. 圧力方程式の境界を設定するにあたり、法線方向勾配ゼロの条件を境界近傍の内点にコンシステントに与えるために、最小2乗法を組み合わせた方法を構成した。

これにより、形状に見合う格子解像度を与えれば、任意形状の3次元物体まわりの非圧縮粘性流れをコストの低い直交格子差分法で安定に解くことが可能になった。ただし、この方法は、物体内部に格子点が存在することを前提としているため、極端に薄い物体や針のように細長い物体は、扱うことが困難であることに注意が必要である。前報では例題として、構造格子を張るのが簡単ではない球と円柱を組み合わせた物体まわりの流れを、比較的粗い直交格子で計算できることを示した。

しかしながら、格子生成が必要でないという直交格子計算のメリットを十分に引き出すのは、物体が移動・変形する場合や分離・合体する場合である。このような場合、従来の多くの計算手法では、流れ場の計算の時間ステップ毎に格子生成を行う必要があり、大変に非効率的であった。

今回は、筆者らが取り組んでいる手法が、物体が変形する場合にも適用できることを計算例により示す。

なお、計算は非圧縮粘性流体を対象とし、基礎変数表示(u,v,w,p)のNavier-Stokes方程式をProjection Methodにより解いている。時間積分は1次精度の陽解法とした。格子は、直交のコロケート格子である。

2. 計算方法

計算手法は、基本的には前報⁽⁸⁾と変わらない。境界の無い場所では5点を使用し、4階の人工粘性による3次精度の風上差分を構成する。3点しかとれない境界近傍では、対流項に物体境界上の速度を含む1次精度差分と仮想中点を使用した2階の人工粘性項が使用される。このタイプの人工粘性項は、物体境界が格子点に近い時にその働きが弱くなり、精度を向上させると考えられる。対流項の1階差分を準2次精度に高める中心補正項は、今回は使用しなかった。拡散項は、通常の間隔の3点差分で、中心項を陰的に扱うことにより、物体境界が格子点に近い時に非常に厳しくなる拡散数制限を回避している。

前報の物体が移動・変形しないケースでは、格子間に位置する物体境界上での流速がゼロと固定されていたので、Fig.1のように物体境界に隣接した物体内部の格子点にこの値を設定し、各方向からの参照に共通に利用することで、自然な形で差分スキームに境界値を取り込むことができた。しかし、今回は物体境界がそれぞれの速度で移動し、その移動速度が物体境界上の流速となるので、各方向共通の値を与えることができない。そこで、Fig.2のように、境界近傍の内点にはポインタにより構造体を割り当て、各方向から見た物体境界上の流速を格納することとした。

このポインタには、各方向から推定した内点上の圧力も格納される。前報では薄い物体を扱わなかったため、内点上の圧力は、その点まわりの全ての境界セル(格子点を頂点に持つ直方体で境界面によって横切られるもの)で、法線方向の傾きゼロの条件を総合的に最も良く満たすように設定した。この場合最大8セルが計算に算入される。今回は、薄い物体を扱うので、内点に設定された圧力は多価となりうる。例えば、薄い魚体のヒレの表と裏では圧力が異なっており、その間にある物体内点が1点であれば、圧力の境界条件を満たすように推定した内点圧力は2価となる。そこで、Fig.3のようにそれぞれ最大4セルを使用し、各方向別に内点の圧力を推定することとした。前報と比べ、算入するセルを方向ごとに制限するだけで、圧力を推定する式自身には変更がない。推定した圧力は内点に割り当てた構造体に格納し、圧力に関するポアソンの式を解く際に、差分スキームの参照方向に対応した値が使用される。

このように内点圧力の推定を多価処理に変えたことで、Fig.4のようなタイプの前縁や後縁では、物体の薄さとは関係なく前報まで1価であった値が多価となる。しかし、それぞれの値は算入するセルを1~2個共有して計算されているので、ばらばらな値にはならず、物体表面上のCp分布で見たときに滑らかにつながる。

以上見てきたように、前報に引き続き今回の方法は、物体

の内部点の存在を前提としている。これは、すなわち Fig.5 のようなケースである。そのため、薄い物体に対しては厚み方向に格子間隔を非常に細かくとる必要がある。ところが、どんなに格子間隔を細かくとったとしても、エッジのような後縁を持つ物体については、物体が自由に移動・変形しても Fig.6 のような状況にならないということを保証するのは大変難しい。今回の計算例では、尾ひれ部のエッジの移動方向が厚み方向に限定されていたので、魚体長さ方向の格子間隔をある程度長くすることで、Fig.6 のような状況にならないことを保証できる格子間隔と物体初期位置を設定することができた。エッジの方向が限定されないような場合には、全方向の格子間隔を同等に調節すべきだろうと考えられるが、このようなケースでは格子間隔をいくら細かくしてもエッジの先が格子間に入り込む可能性を否定できない。その場合には、次のどちらかの対策が必要であろう。

- (1) 格子解像度以下のエッジは格子間隔程度の厚みに丸めてしまう。
- (2) Fig.7 のように境界近傍の内点に割り当てていた構造体を境界近傍の外点に割り当てる。

後者の方式は、物体内部点の存在を前提にしなくとも計算を遂行できるようにする抜本的な解決策である。しかし、差分スキームの値の参照に仮想点を導入せざるを得なかったり、物体境界の存在判別や法線ベクトル格納に物体内部点を利用できなくなったりするため、処理が複雑になる。このことは、計算が単純に行えるという直交格子のメリットを相殺しかねない。また、計算はできたとしても結果の可視化の際に、物体形状の表示が難しい。境界間に物体内部点が存在すれば、Level Set 関数などを定義して等値面で物体形状を直交格子のまま表示できるが、そうでない場合、おそらく非構造格子のデータに変換し、非構造格子用の可視化ソフトウェアで表示することになり手間がかかる。また、この方式を採用すれば、エッジのように2次元的に鋭い物体での格子解像度の制約が緩和されると考えられるが、たとえそうであっても、例えば昆虫の足のような3次元的な鋭さを持つ物体を扱う場合には、形状に見合う十分な格子解像度を与えなければならないという制約に変わりはない。以上の理由から、今回はこの方式を採用しなかった。

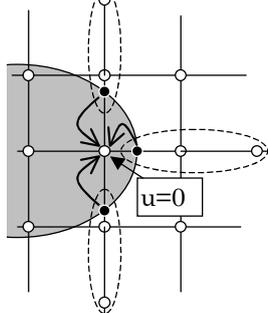


Fig.1 Velocity reference at fixed boundary

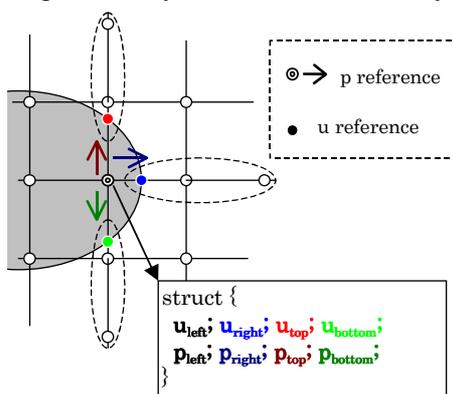


Fig.2 Velocity reference at moving boundary

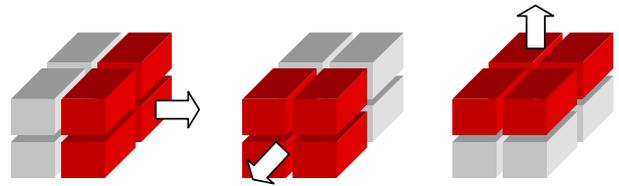


Fig.3 Cells to be used for boundary pressure estimation depending on each direction

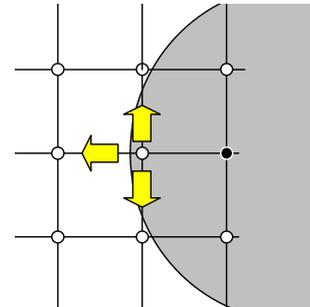


Fig.4 Leading edge having multiple pressure values

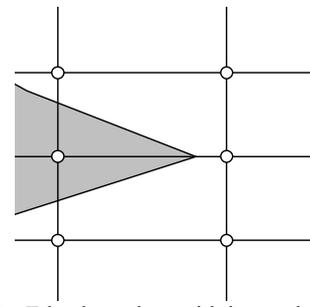


Fig.5 Edge boundary with internal stencils

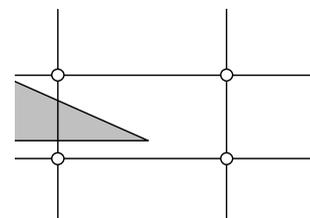


Fig.6 Edge boundary without internal stencils

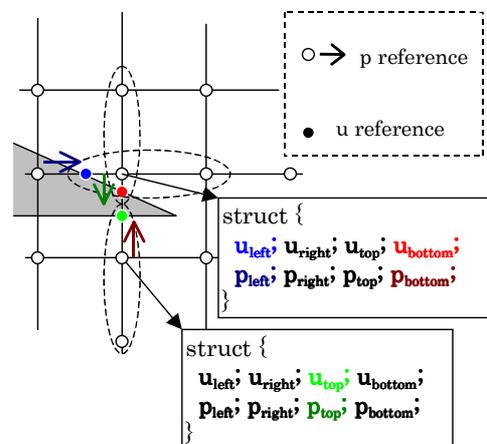


Fig.7 Boundary information structure associated with outside near boundary stencils

3. 差分スキーム

Fig. 8 に示すように、 d, e をそれぞれ正・負の方向の物体境界までの距離とし、物体境界の無いところでは格子間隔の値 (x および $-x$) に設定しておく。 u を流速とし、 u_e, u_d は、物体境界上での流速 (= 物体境界の移動速度) である。これらの値は、物体内部点にポイントで割り当てられた構造体に格納されているので、参照方向に対応した値を適宜読み込んで使用する。

以下、前報との繰り返しになるが、差分スキームを示す。ここで、 $[\]$ は差分による演算を表わしている。

- 対流項およびポアソン式右辺用の 1 階微分 (1 次精度)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_i = \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{(d - e)} \quad (1)$$

- 境界での人工粘性項用の 2 階微分

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_i = 4 \cdot \frac{(u_{i+1} - 2 \cdot u_i + u_{i-1}))}{(d - e)^2} - (flag_right_boundary) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d + e)}{(d - e)^2 \cdot d} \cdot (u_{i+1} - u_i) \right] - (flag_left_boundary) \cdot \left[4 \cdot \frac{(d + e)}{(d - e)^2 \cdot e} \cdot (u_{i-1} - u_i) \right] \quad (2)$$

- ここで、 $flag_right_boundary$ は物体の右側の境界部、 $flag_left_boundary$ は物体の左側の境界部であれば 1 を、そうでなければ、0 を与えるフラグである。

これらを用いて、対流項は次のように構成される。

$$u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \cong u \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_i - \alpha \cdot |u| \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_i \cdot \left(\frac{d - e}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} + (flag_5pt_ok) \cdot \left(u \cdot \frac{-u_{i+2} + 2 \cdot u_{i+1} - 2 \cdot u_{i-1} + u_{i-2}}{12 \cdot \Delta x} + \alpha \cdot |u| \cdot \frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{4 \cdot \Delta x} \right) \quad (3)$$

- ここで、 $flag_5pt_ok$ は物体境界に邪魔されずに 5 点の中心差分を探ることができれば 1 を、そうでなければ、0 を与えるフラグである。

粘性項は次のように構成される。陽解法の場合 u_i は、次の時間ステップの値を使用するために、 u_i^{n+1} として左辺に移動する。

- 粘性項用の 2 階微分

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_i = 2 \cdot \frac{(e \cdot u_{i+1} + (d - e) \cdot u_i - d \cdot u_{i-1})}{d \cdot e \cdot (d - e)} \quad (4)$$

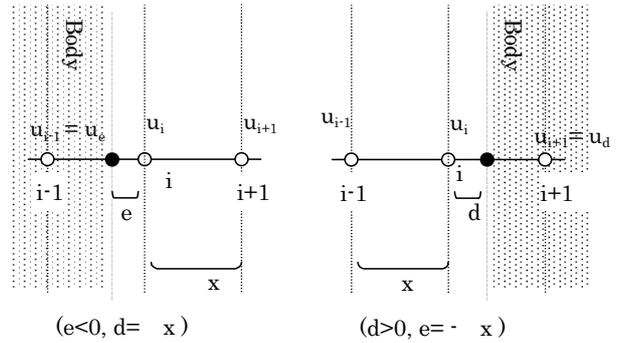


Fig. 8 Boundary of right side and left Side

4. 圧力境界の処理

前報で示したように、境界に隣接する物体内部点の圧力は、次の関数 を最小にするように定められる。

$$\Phi = \sum_{\omega} flag(\omega) \cdot (\nabla p \cdot \vec{n})_{\omega}^2 \quad (5)$$

ここで、 p は圧力、 \vec{n} は法線ベクトルである。 $flag(\)$ は、注目している物体内部点まわりの 8 個のセル に関して、境界を持つ時に 1 を与えるフラグである。また、境界を持つセルとは、注目している物体内部点を原点とするローカルな座標を考えた時にセル辺の x 軸、 y 軸、 z 軸上の格子点のどれかが物体外部点であることである。このとき、フラグは 1 となり、それ以外の場合は 0 となる。ただし、今回は薄い物体を扱うため、前述のように方向ごとに使用するセルを限定して計算する多価処理を行う。すなわち、計算に算入されないセルのフラグは境界の有無にかかわらず 0 とされる。

境界点の圧力 P_0 は、 P_0 に関する変分をゼロにする条件から、次の式で与えられる。

$$P_0 = \frac{\sum_{\omega} flag(\omega) \cdot ((M^{-1} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n})_{\omega} \cdot ((M^{-1} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{n})_{\omega}}{\sum_{\omega} flag(\omega) \cdot ((M^{-1} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n})_{\omega}^2} \quad (6)$$

ここで、

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_i P_i \cdot x_i \\ \sum_i P_i \cdot y_i \\ \sum_i P_i \cdot z_i \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i \\ \sum_i y_i \\ \sum_i z_i \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \sum_i x_i \cdot x_i & \sum_i x_i \cdot y_i & \sum_i x_i \cdot z_i \\ \sum_i y_i \cdot x_i & \sum_i y_i \cdot y_i & \sum_i y_i \cdot z_i \\ \sum_i z_i \cdot x_i & \sum_i z_i \cdot y_i & \sum_i z_i \cdot z_i \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。ただし、 \sum_i は対象セルの頂点で圧力が既知の格子点での総和を表す。 P_i は既知の圧力、 x_i, y_i, z_i はローカルの座標で表した格子位置である。

5. 計算例

例題として、星野らが CIP 法により計算した魚体泳動を追計算した。魚体の初期形状と変形のモデルは彼らの文献⁽⁹⁾を参照されたい。魚体は、受ける圧力や抵抗にかかわらず、同じ推進速度で周期的に一定な変形運動を行う。本来は、魚体泳動は流体計算と魚体の運動方程式との連成問題として捉えるべきであるが、今回は魚体としての厳密なシミュレーションが目的ではなく、流体計算として妥当な計算結果が得

られるかということに興味があるので、泳動モデルの妥当性についての議論は行わない。

計算格子を Fig.9, Fig.10 に示す。レイノルズ数をおよそ 4×10^4 と推定し、魚体の厚み方向には予想される境界層厚さの約 $1/6$ の格子間隔を設定した。また、魚体は端点で大変薄いのので、変形しても物体内部に格子点が1点以上存在するように、魚体の初期位置と格子間隔を調整した。内側格子の領域サイズは、 $2 \times 0.5 \times 0.8$ (魚体長さを1とした無次元表示)、格子数は $60 \times 150 \times 40$ である。背景格子の領域サイズは $8 \times 2 \times 2$ 、格子数は $80 \times 40 \times 50$ である。内側格子に魚体をのせると Fig.11 のような様子となる。もちろん、格子はそのまま魚体は時々刻々変形する。

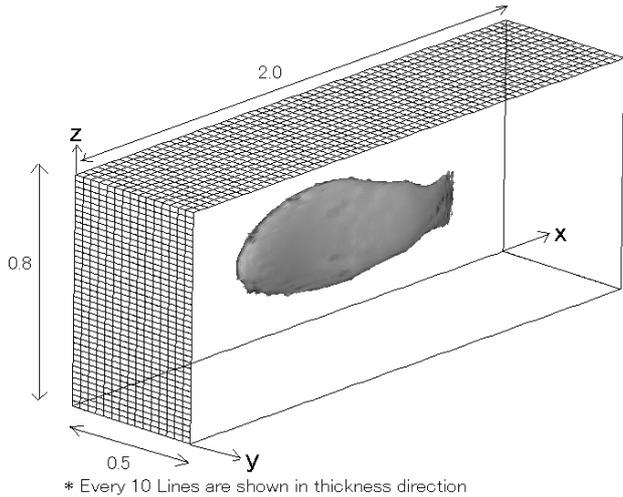


Fig. 9 Cartesian grid system (Inner Grid)

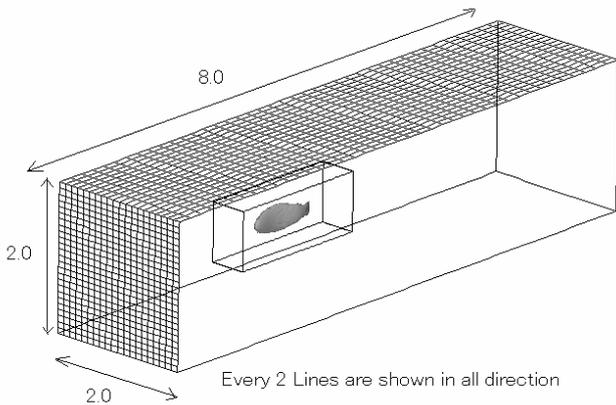


Fig. 10 Cartesian grid system (Background Grid)

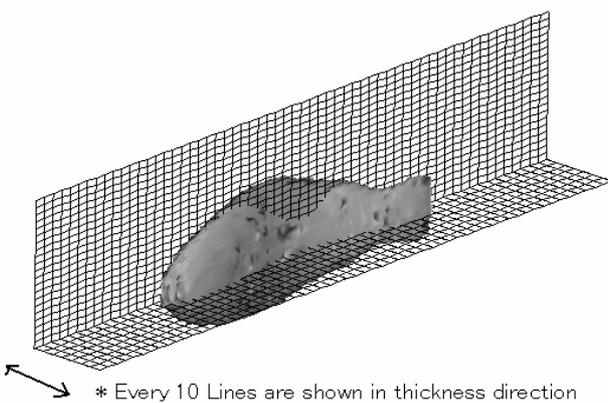


Fig. 11 Cartesian grid system around fish (Time = 30.33)

圧力分布を Fig.12 に示す。図示した方向から見て、前半部では低圧により前方に引っ張る力が、後半部では高圧により前方に押す力が働き、推進力を発生させていることがわかる。

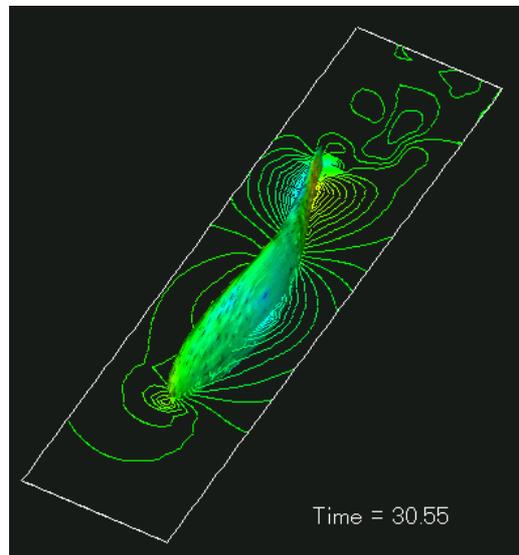
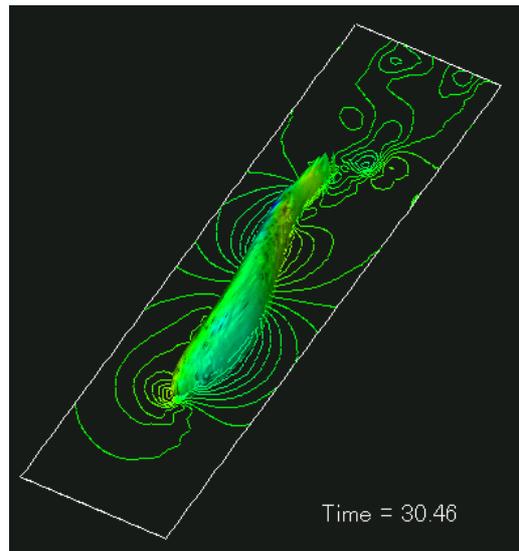


Fig. 12 Pressure contour

Fig.13 に渦度ベクトルの z 軸成分の分布を示す。主流が魚体の側面と接して流れることにより渦度が発生し、魚体の泳動により、尾部から渦が放出されているのがわかる。

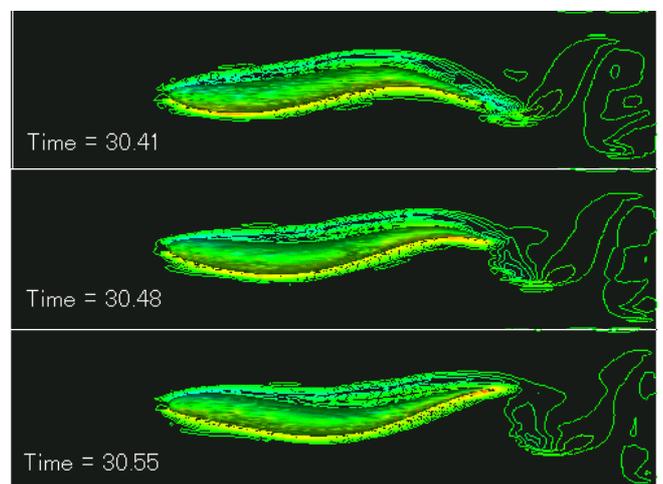


Fig. 13 z-vorticity contour

Fig.14 に渦度ベクトルの x 軸成分の分布を示す。縦渦が、魚体の上下端から発生しているのがわかる。縦渦の極性は周期的に反転し、また、魚体の前半部と後半部では逆になっている。Fig.15 に示すように、発生した縦渦は下流に流れる。そのため、尾部での断面で観察すると、極性が異なる縦渦が並ぶ構造となる。

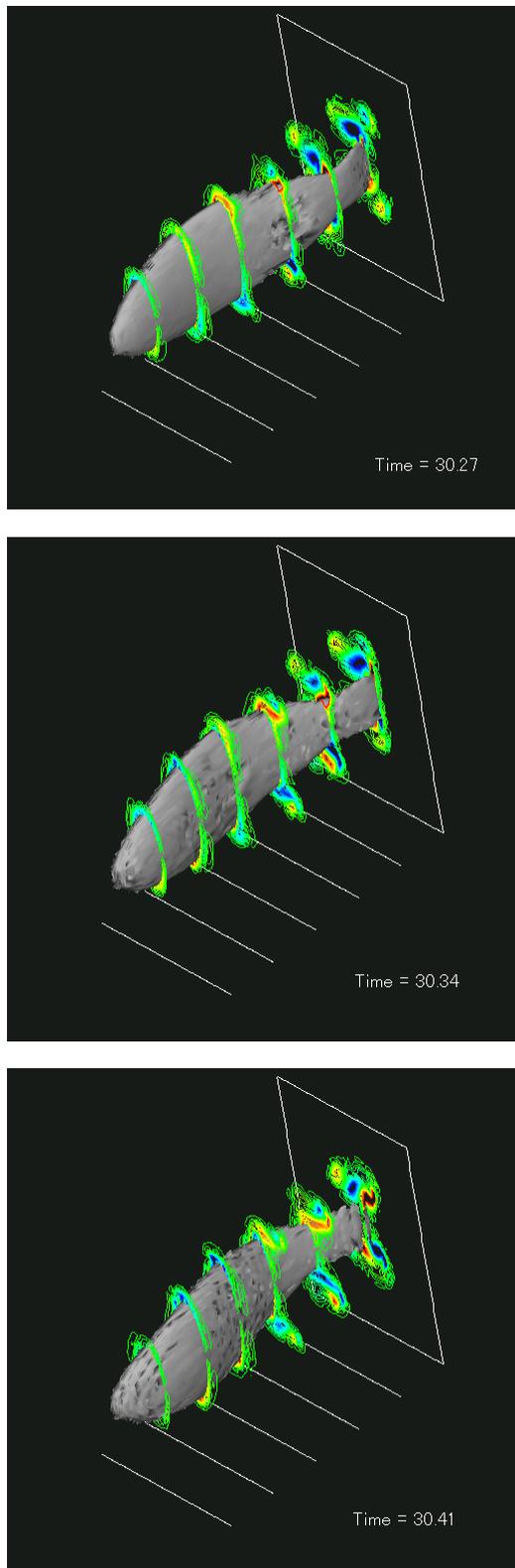


Fig.14 x-vorticity contour (range:-30 ~ +30)

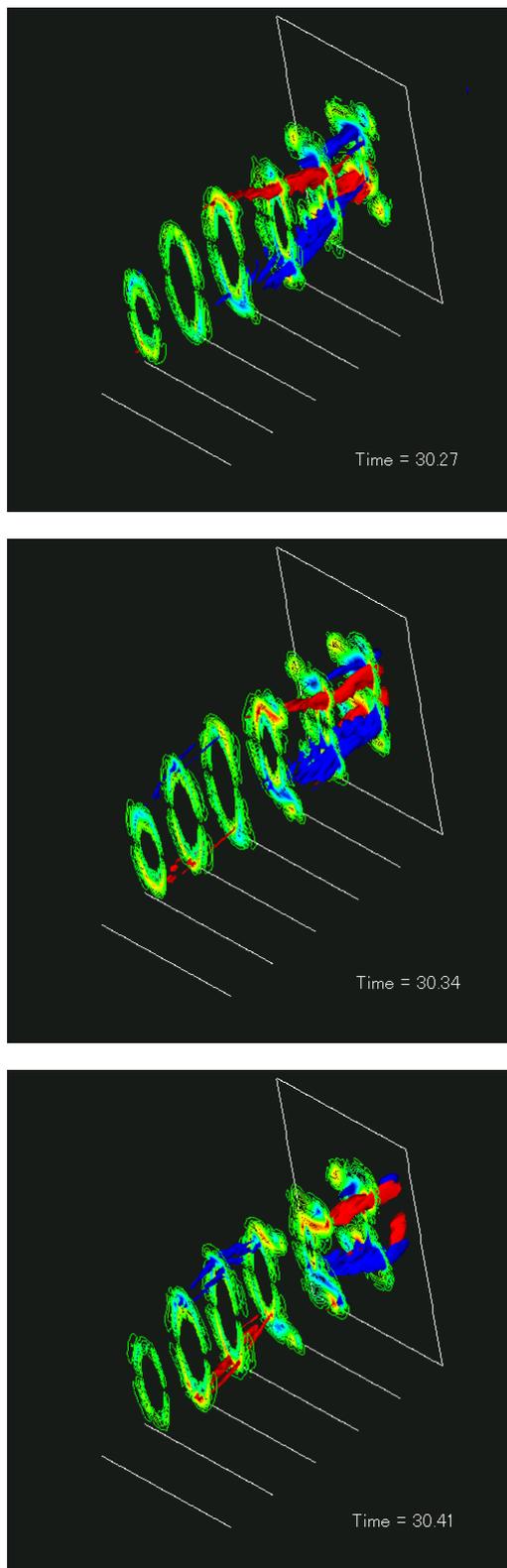


Fig.15 x-vorticity contour and iso-surface (-30, +30)

Fig.16 に C_D 値、 C_L 値の時間履歴を示す。 C_D の平均値は負の値で、推進力となっていることがわかる。

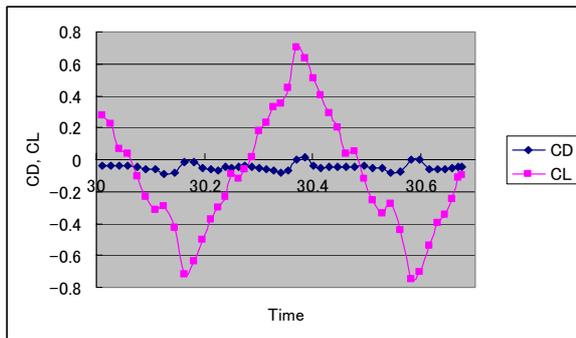


Fig.16 C_D and C_L (Time = 30.0 ~ 30.7)

6. 結論

- ◇ 提案法は、物体境界が移動する場合にも有効である。この時、格子生成が必要でないという提案法のメリットが生きてくる。
- ◇ 薄いエッジを持つ物体が自由な方向に移動するケースは、提案法のままでは扱いにくい。内部点の存在を前提としない方式に改良するか、または、方式はこのままでエッジを格子間隔程度の厚みに丸めてしまう近似が必要となる。

謝辞

計算結果の可視化には、宇宙科学研究所 藤井研究室が開発したソフトウェア「ポストくん」を使用させていただきました。ここに深謝いたします。

参考文献

- (1) T.Ye, R.Mittal, H.S. Udaykumar and W.Shvy, "A Cartesian Grid Method For Viscous Incompressible Flows With Complex Immersed Boundaries", AIAA-99-3312, pp. 547-557.
- (2) Saiki, E.M., Biringen, S., "Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method," J. Comput. Phys. 123, pp.450-465,(1996).
- (3) Tsuboi, K., Miyakoshi, K., Kuwahara, K., "Incompressible Flow Simulations with Solid Models in Rectangular Grid System," Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields, Arcilla, A.S., et.al., editors, Elsevier Science, North-Holland, pp. 379-390,(1991).
- (4) Kenji ONO, Katsuro FUJITANI, Hideki FUJITA, "Applications of CFD Using Voxel Modeling to Vehicle Development," Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference July 18-23, San Francisco, California, FEDSM99-7323,(1999).
- (5) 矢部, 肖, "固体・液体・気体の統一解法とCIP法", 日本数値流体力学会誌 第7巻 第2号~第4号, (1999)
- (6) Miyata, H., "Finite-Difference Simulation of Breaking Waves," J. Comput. Phys. 65, pp.179-214, (1986)
- (7) 中野, 下村, 里深, "デカルト格子系による任意形状物体周りの圧縮性粘性流計算", 日本機械学会論文集(B編), 61巻 592号, pp. 87-94, (1995)
- (8) 市川, 藤井, "直交格子を使用した3次元の任意形状物体まわりの流体シミュレーション", 第14回数値流体力学講演論文集, (2000)
(日本機械学会論文集 投稿中 No.01-0186)
- (9) 星野, 矢部, "3次元魚体泳動のシミュレーション", 第13回数値流体力学講演論文集, (1999)