

天文と乱流モデル：ダイナモ

Astronomy and Turbulence Model: Dynamo

吉澤 徹, 横井 喜充
東京大学生産技術研究所

Akira Yoshizawa and Nobumitsu Yokoi
Institute of Industrial Science, University of Tokyo

E-mail: yosizawa@iis.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

工学や産業技術に関連して必要となる乱流の解析において、レイノルズ平均にもとづく乱流モデル (RANS モデル) の役割は減少傾向にある。流体運動を散逸スケールまで分解する直接数値計算 (DNS) は幾何学的形状がかなり簡単な場合に限られるが、large eddy simulation (LES) の適用範囲が計算機能力やサブグリッド・スケール (SGS) モデリングの向上によって著しく増加したことに、その理由がある。しかし、非常に大きなレイノルズ数の流れでは、LES は多大の計算時間を必要とするため、RANS モデルは依然乱流解析の有用な手段である。また LES と RANS モデルを組み合わせることによって固体壁近傍での LES の計算負荷を減少させる研究も近年活発化している。

計算負荷を度外視すれば、DNS はもちろん LES が RANS モデルより優れている点は、得られる情報の精度に加え、その多様性にある。流れの非定常性を RANS モデルを用いて解析する試みもあるが、通常は時間依存性の弱い流れがその解析対象である。非定常性を追うことが目的となっている場合は LES が格段に優れている。

乱流現象を理解する視点で DNS、LES を考えてみよう。燃焼に関連する乱れでは、本質的な事象は燃焼面近傍の小さなスケールで生じる。他方、流れによる抗力、流れの中の温度、物質拡散等では、乱れの運動エネルギーの大部分を担う、散逸スケールよりはるかに大きな成分が現象を支配する。このような事象を DNS、LES の結果を用いて理解しようとするとき、レイノルズ平均にもとづく諸方程式 (乱流エネルギー、レイノルズ応力成分、スカラー分散、スカラー・フラックス等の方程式) の助けが必要となる。このことは、散逸スケールよりはるかに大きなスケールの流れの特性を理解するには、レイノルズ平均量を通しての考察が有効であることを物語っている。

固体壁に沿う流れの代表的性質の一つとして、対数速度則がある。これによって表現される流れの性質は、壁乱流のごく一部の性質に過ぎない。壁乱流に関して、DNS、LES より得られる数値データが対数速度則と矛盾しないことは簡単に示せる。しかし、なぜ平均速度が対数速度則に従うかについて数値データだけでは説明できない。一方、RANS モデルを用いれば、対数速度則はいかなる条件下で存在するかを簡単な解析で議論することができる。すな

わち、RANS モデルは定量的には不十分でも、定性的な考察では有用な場合が少なくない。対数速度則で言えば、カルマン定数はモデル定数に依存するが、対数速度分布自体はそれとは独立に議論できる。著者らは、このような視点から RANS モデルは平均量の物理的な理解に大いに役立つと考えている。

気象に関する数値予報では、Mellor–Yamada モデルに代表される RANS モデルが組み込まれている。これは、広汎な予測地域を計算格子に分割するとき、格子内に埋もれるさまざまな物理現象をモデルで補うことが不可欠であるためである。この点は工学における乱流解析と同様である。しかし、計算格子よりも狭い地域の天気に関心をもつ人たちは、計算格子内の現象のモデリングの重要性をより切実に感じるであろう。

天文研究における乱流の扱いはどうであろうか。天文現象においても乱流は重要な要素であるが、気象現象と同様にその他にもさまざまな重要因子が混在している。このため、流体物理、流体工学研究者が乱流という描像をもつ流れに対して、天文研究者は時間変動性が重要な流れという捉え方をするように思われる。流れ以外の因子としては、本特集号の天文ジェットの解説にも述べられている磁場がある。

磁場が関与する天文、地文現象では、磁場がなぜ存在するか、磁場が現象をいかに支配するかを巡ってさまざまな研究が展開されている。たとえば、極地方で見られるオーロラは地磁気のダイポール軸が両極を結ぶ軸（南北軸）にほぼ沿った状態にあることに起因している。オーロラの研究は後者の範疇に入り、ダイポール磁場の発生機構すなわちダイナモを問うときは前者となる。

本解説では、天文、地文現象に関連するダイナモ、磁場が流れにおよぼす影響を乱流モデル、正確には電磁流体乱流モデルの観点から考察する。§2 において、対象とする現象を紹介する。§3 において、電磁流体の基礎方程式を述べ、これらの現象を乱流モデルの視点から考察することの意義を述べる。§4 において、乱流モデルを解説する。§5 において、乱流モデルを用いて §2 で挙げた現象を解析的に議論する。§6 をむすびとする。

2 磁場に関わる興味深い現象

われわれに身近な磁場に関連する自然現象としては、すでに述べた地磁気がある。これに続くものとして、太陽の黒点を挙げることができる。以下に述べるように、黒点は太陽の対流層で発生した磁束管が表面に露出した際に見えるその断面である。黒点の数は太陽活動の活発さと密接しているので、黒点はわれわれの生活に関係の深い磁場と言える。

以下では、地磁気と黒点の重要な性質を述べる。次に、星の成長と関連する天文ジェットについて言及する。

2.1 地磁気と黒点

地球と太陽の内部を大まかに示すと、図 1、図 2 となり、それぞれの半径は約 6300km、700 万 km である。地球はケイ素を主成分とするマントル、熔融鉄の外核、固体鉄の内核の三領域からなっている。地磁気は外核の熔融鉄の運動によって発生している。これが静磁場的な磁石によるものでないことは、極性すなわちダイポール軸の方向（棒磁石に見立てたときの軸

方向) が地球の長い歴史の中で繰り返し反転していることから裏づけられている [1, 2]。外核の熔融鉄の速度は $O(10^{-4})\text{ms}^{-1}$ と推測されている。熔融鉄の動粘性係数として $O(10^{-6})\text{m}^2\text{s}^{-1}$ 、内核の厚みとして $O(10^6)\text{m}$ を用いると、レイノルズ数は $O(10^8)$ となる。すなわち、外核での流れは乱流であり、地磁気の発生は乱流運動と結びついている。流体運動のエネルギー源としては、内核と外核の温度差による熱浮力、外核に含まれるケイ素と鉄との密度差に起因する成分差浮力が挙げられる。

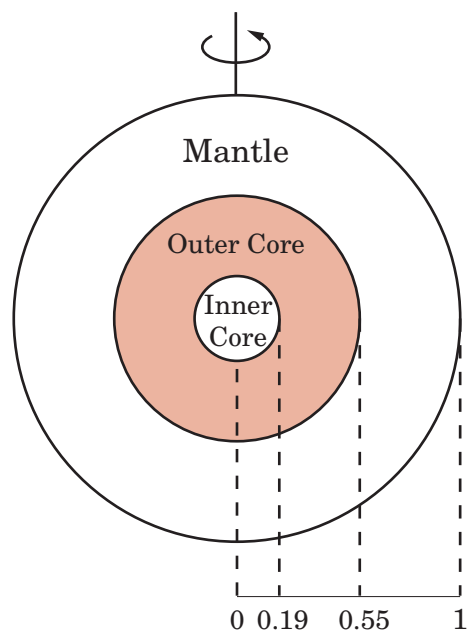


Fig. 1. Interior of the earth

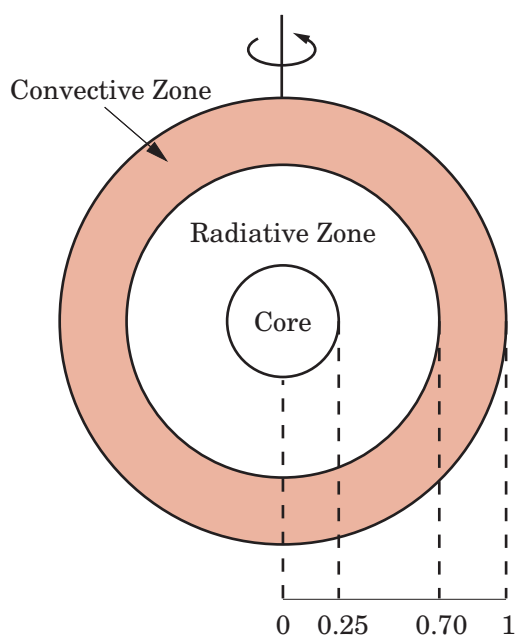


Fig. 2. Interior of the sun

地磁気の典型的な性質は、以下のようにまとめられる。

- (E1) 地表面で観測される地磁気の主成分はダイポール成分であり、その強度は数ガウス (G) ($1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$ [テスラ])、軸は地球の南北軸にほぼ沿っている (現在は、地磁気の S 極はほぼ北極に対応している)。
- (E2) トロイダル磁場 (磁場の経度方向成分) は、非電導性のマントルに阻まれて直接観測することができないが、ダイポール磁場よりかなり大きく、 $0(10) \sim 0(10^2)\text{G}$ と推測されている。
- (E3) 地磁気の極性 (ダイポール軸の方向) は $0(10^5) \sim 0(10^7)$ 年で不規則に反転を繰り返しているが、反転に要する時間は $0(10^4)$ 年以下であり、この期間よりずっと短い。

太陽は核、放射領域、対流層からなる。その組成は地球に比べ簡単であり、90%の水素と10%のヘリウムである。太陽の活動エネルギーは核での熱核融合に由来する。発生した熱エネルギーは中間の放射領域を通過して、最外側の高電離した水素からなる対流層に供給される。対流層の運動は激しい乱流状態にあり、太陽磁場発生の起源となっている。太陽磁場の典型的な事象は黒点である。対流層内でトロイダル磁場が発生し、その磁束管が浮力作用で上昇し、対流層とそれに接する光球を突き破るとき、その断面が図3のように黒点として観測される。このため、黒点は正、負の極性をもつ一対の事象として観測される。大きな黒点の磁場は数 kG に達するが、対流層の底部ではさらに 1 桁大きい磁場が発生していると考えられている。

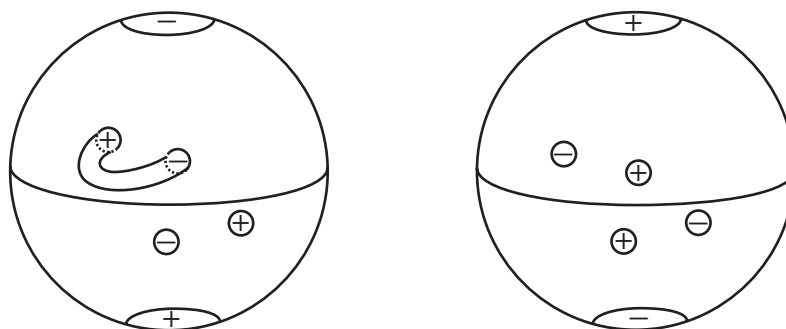


Fig. 3. Sunspot's polarity rule.

黒点の特性は次のようにまとめられる [3, 4]。

- (S1) 黒点は低緯度から中緯度に現れる。その極性は、図3のように左から右 (あるいはその逆) へと約 11 年で反転する。
- (S2) 一対の黒点で、先頭の黒点の極性は図3のように極磁場 (極近くの磁場) の極性と一致する。後者の強さは数 G であり、黒点の磁場に比べてかなり弱い。

地磁気や黒点には上述の特性を含めて興味深い性質が多々あるが、以下にその不思議さを示す例をいくつか挙げよう。

外核の溶融鉄のもつ力学エネルギーと生成された地磁気エネルギーの差について考える。

すでに触れたように、溶融鉄の速度は $O(10^{-4}) \text{ m s}^{-1}$ と推測されている。1G の磁場は、MKS 単位系で鉄の単位体積当りの力学エネルギーに換算すると、 $O(10^{-3}) \text{ m s}^{-1}$ の速度に相当する(この換算については後に説明する)。地表面で観測されるダイポール磁場が数 G であることから、外核では流れの $O(10^2)$ 倍のエネルギーをもつダイポール磁場が作られていることになる。さらに直接観測できないトロイダル磁場を $O(10) \sim O(10^2) \text{ G}$ とすると、外核磁場は流れの $O(10^4) \sim O(10^6)$ 倍のエネルギーをもつことになる。溶融鉄の運動を磁場発生のための発電機と考えると、このように超高効率の発電システムがどのようにして可能となるのだろうか。大変不思議なことである。

この謎を説明する最も単純な候補として、力学エネルギーと磁気エネルギーの拡散率の差が挙げられる。もし、力学エネルギーの拡散率に比べ、磁気エネルギーの拡散率がきわめて小さければ、上の状況が発生し得る。しかし、実際は正反対であり、鉄の動粘性率と鉄中の磁気拡散率の比(磁気プラントル数と呼ばれる)は $O(10^{-6})$ であり、磁気拡散率の方が 100 万倍も大きい。したがって、単純な拡散率の差という説明は全く使えないことがわかる。

地磁気に関しては、上述のエネルギー差以上に $O(10^5) \sim O(10^7)$ 年での不規則な極性反転に大きな関心が払われてきた。一方、球殻内での磁場の発生という点でよく似た太陽においては、約 11 年毎という規則正しい極性の反転が起きている。両者の極性反転の差異を支配する要素は何であろうか。幾何学的要素としては、内核に対する外核の厚み(地球)と放射領域に対する対流層の厚み(太陽)との差を挙げることができる。また、1 日に 1 回転する地球に対して、太陽は約 26 日であり、回転運動にも大きな違いが見られる。これらを含むもろもろの因子が絡み合っ観測される結果となるのだが、どの要素が最も本質的であるかを明らかにすることは挑戦しがたいある課題といえる。

2.2 天文ジェット

§2.1 で述べられた地磁気のダイポール成分、黒点の元となる対流層内のトロイダル磁場は、乱流状態の流れに発生する大規模で高い対称性をもつ磁場構造である(両者とも回転軸に関し、軸対称である)。これとは別に、天文現象において際だった構造をもつ乱れた流れとして、天文ジェットがある。その発生機構を初めとする天文ジェットの研究に関しては、本特集号においても述べられているように、去る 9 月に急逝された内田豊博士や柴田一成博士を中心とするわが国の研究者達によって大きな寄与がなされている。

活動銀河核、中性子星、原始星など高質量の星のまわりでは、ガスが円盤状に分布し回転しながら中心天体に降下している(図 4)。このような円盤状ガスは降着円盤と呼ばれている。

ガスが高質量の中心天体に降着するとき、その重力エネルギーが解放され、星の活動エネルギー源となる。降着円盤に密接した事象として、円盤から垂直二方向に噴射されるジェットがある。これが天文ジェットと呼ばれるものであり、その速度は原始星では $0(10) \sim 0(10^4) \text{ km s}^{-1}$ 、中心天体がブラックホールのようにきわめて高質量の星では光速の数十%となる [5, 6]。

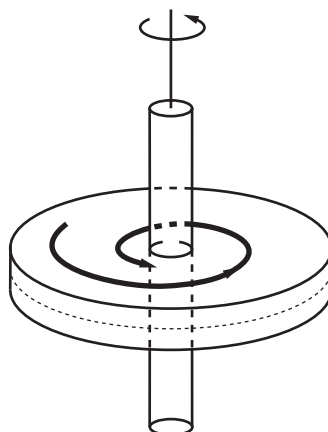


Fig. 4. Accretion disk and bipolar jets.

降着円盤、天文ジェットについて次の興味深い事象がある。

- (J1) ガスが中心天体に降着するためには、それがもっている角運動量を何らかの機構で解放する（失う）必要がある。その一つに、ガスの乱流運動によって角運動量が円盤遠方部に輸送されるとする説がある。他の機構として、降着するガスの一部がジェットとして噴出され、これに角運動量が付随して解放されるとするものである。この説のもとでは、ジェットは旋回ジェットとなる。
- (J2) ジェットは垂直 2 方向にきわめて高い方向性をもって噴射されている。この駆動力が何であるかは、角運動量の解放機構と密接して重要な研究課題となっている。
- (J3) 天文ジェットの際立った幾何学的特徴は高い収束性 (collimation) であり、地上のジェットに比べきわめて小さい成長率で高い直線性を有している。円盤ガスは乱流状態にあると考えられているので、噴出されるジェットも乱流ジェットと考えるのが自然である。それでは、いかなる効果でジェット幅の成長が抑えられているのであろうか。一つは、超音速混合層、超音速ジェットの研究から知られている高マッハ数効果である。他の有力な候補として、円盤ガスが高電離しているときは、電磁力によるガスの閉じ込め効果がある。

3 基礎方程式

3.1 電磁流体方程式

電磁力効果を考察するときでも、地磁気のダイナモを対象とするか、活動銀河核に関わる天文ジェットを考察するかでは、そこに含まれる事象が大きく異なる。後者ではジェットが

光速と比べられるほどになるため、相対論的効果が重要となる。本解説では、電磁力効果という絞られた視点から、§2の現象を考えることにする。換言すると、これらの現象を電磁力効果でどの程度共通に理解できるかを探る試みである。

本論では電磁力効果に焦点を絞り、密度の変化は無視する。磁場を記述する方程式系は、誘導方程式、アンペールの法則、オームの法則からなり、それぞれ、

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{b}) \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 $\mathbf{b}$ は磁場、 $\mathbf{e}$ は電場、 $\mathbf{j}$ は電流密度、 $\mathbf{u}$ は流速、 μ_0 は透磁率、 σ は電気伝導度である。式(1)で $\mathbf{e}$ と $\mathbf{j}$ を消去すると、

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \lambda_m \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2)$$

となる。ここで、

$$\lambda_m = \frac{1}{\sigma \mu_0} \quad (3)$$

は磁気拡散率であるが抵抗とも呼ばれる。

流体密度(ρ)の変化を考慮しないときは、

$$\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\rho \mu_0}} \rightarrow \mathbf{b}, \quad \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{\rho I \mu_0}} \rightarrow \mathbf{j}, \quad \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\rho \mu_0}} \rightarrow \mathbf{e} \quad (4)$$

のような変換を行うと便利である。この変換の利点は、新しい $\mathbf{b}$ が速度の次元をもつことである。これを磁場のアルヴェン速度単位というが、この単位の事例についてはすでに§2でふれた。

式(4)に圧力(p)に関する

$$\frac{p}{\rho} \rightarrow p \quad (5)$$

を加えて流体運動の方程式を書くと、回転角速度 ω_F の回転系では

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_i + 2(\mathbf{u} \times \omega_F)_i - \alpha_T (\theta - \theta_R) g_i, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

となる。ここで、 ν は動粘性率、 α_T は熱体積膨張率、 θ は温度、 $\mathbf{g}$ は重力加速度である。式

(6)の右辺で、第3項はローレンツ力、第4項はコリオリ力、第5項はブジネスク近似による浮力を表わす。浮力に関連して、温度方程式は λ_θ を拡散率として

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{u}) = \lambda_\theta \nabla^2 \theta \quad (8)$$

で与えられる。

3.2 流れを特徴づける無次元量

式(2)と(4)の各項の重要性は考察する対象によって大きく変わる。最も代表的な無次元量はレイノルズ数

$$Re = \frac{\{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\}_{\ell_R, u_R}}{\{\nu \nabla^2 \mathbf{u}\}_{\ell_R, u_R}} = \frac{\ell_R u_R}{\nu} \quad (9)$$

である。ここで、 ℓ_R と u_R は長さ と 速度の基準値であり、 $\{f\}_{\xi, \eta}$ は ξ と η を用いて評価した f の大きさを意味する。

コリオリ力に關係する無次元パラメーターはテイラー数であり、

$$Ta = \left(\frac{\{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_F\}_{u_R}}{\{\nu \nabla^2 \mathbf{u}\}_{\ell_R, u_R}} \right)^2 = \frac{\ell_R^4 \omega_F^2}{\nu^2} \quad (10)$$

で定義される。これは回転速度 $\ell_R \omega_F$ と長さ ℓ_R で定義されたレイノルズ数の 2 乗に対応する。ブジネスク近似による浮力項の大きさを特徴づけるものとして、レイリー数

$$Ra = \left(\frac{\{\alpha_T (\theta - \theta_R) \mathbf{g}\}_{\Delta \theta_R}}{\{\nu \nabla^2 \mathbf{u}\}_{\ell_R, u_R}} \right)^2 Pr \quad (11)$$

がある。ここで、 $\Delta \theta_R = \theta - \theta_R$ は基準値との温度差であり、 Pr はプラントル数

$$Pr = \frac{\nu}{\lambda_\theta} \quad (12)$$

である。基準速度 u_R を慣性項と浮力項の釣り合いより、

$$\{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\}_{\ell_R, u_R} = \{\alpha_T (\theta - \theta_R) \mathbf{g}\}_{\Delta \theta_R} \quad (13)$$

と評価すると、

$$u_R = \sqrt{\alpha_T g \Delta \theta_R \ell_R} \quad (14)$$

を得るので、式 (11) は

$$Ra = \frac{\alpha_T g \Delta \theta_R \ell_R^3}{\nu \lambda_\theta} \quad (15)$$

となる。 $Pr = 0$ (1) の場合は、 Ra はレイノルズ数の 2 乗に相当する。

磁場誘導方程式 (2) において、レイノルズ数に対応するものは磁気レイノルズ数であり、

$$Rm = \frac{\{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b})\}_{\ell_R, u_R}}{\{\lambda_m \nabla^2 \mathbf{b}\}_{\ell_R, u_R}} = \frac{\ell_R u_R}{\lambda_m} = RePrm, \quad Prm = \frac{\nu}{\lambda_m} \quad (16)$$

で定義される。ここで、 Prm は §2 で述べた磁気プラントル数である。

テイラー数 Ta の物理的意味を見るために、式 (6) でローレンツ力と浮力を落とした

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F)) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (17)$$

を考察する。高レイノルズ数の定常的な流れでは、

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F)) = 0 \quad (18)$$

となる。コリオリ力効果が卓越する、すなわち $Ta \gg Re$ となるときは、式 (18) は

$$(\boldsymbol{\omega}_F \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad (19)$$

と近似される。すなわち、流体運動が回転軸方向に変化しないという意味で運動が 2 次元的になる。この結果はテイラー・プラウドマンの定理と呼ばれる。

3.3 無次元量の大きさと計算機実験

地磁気をはじめとするダイナモ関連事象において、上述の無次元量がどの程度の値になるかを見てみよう。地球の外核に対しては、

$$\begin{aligned} \ell_R &= O(10^6) \text{ m}, \nu = O(10^{-6}) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, u_R = O(10^{-4}) \text{ m s}^{-1}, \\ Pr &= O(10^{-6}), Prm = O(10^{-6}), \omega_F = 7 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

となるので、

$$Re = O(10^8), Ta = O(10^{27}), Ra = O(10^{16}), Rm = O(10^2) \quad (21)$$

を得る。

式 (21) より、 Re および Ra の大きさもさることながら Ta がきわめて大きいことが注目される。すなわち、コリオリ力効果が卓越していることが分かり、式 (18) で表わされる効果が地磁気ダイナモと密接していることが理解できる。

非電導性流体において Re が $O(10^4)$ を超える乱流を DNS で調べることの困難さを考えると、現実に近い状況で計算機実験によって地磁気ダイナモを研究することの困難さが直ちに理解されるであろう。ダイナモの計算機実験[7, 12]で現在扱われている Ra と Ta はともに $O(10^{11})$ 以下である。コリオリ力効果を見るためには、 Ra (Re) と Ta の相対的な大きさが重要となる。式 (21) より、外核では $Ta / Re = O(10^{19})$ であるが、現在の計算機実験では高々 $Ta / Re = O(10^6)$ であり、実現現象よりもかなり弱いコリオリ力効果となっている。

太陽の対流層と異なり、地中奥深くの外核での流体運動は直接観測することができないため、他の観測データからの推測に頼ることが少なくない。このため、上のように無次元量に関する制限はあっても、計算機実験によって得られる知見は大変有用なものと言える[7-12]。非電導性流体、電導性流体を問わず、外核のような肉厚の球殻内領域における熱対流の顕著な特徴として、対流柱の発生がある (図 5)。浮力によって流体塊は内部から外部に駆動されるが、テイラー数 Ta の増加とともに回転軸方向に捕捉され、この軸に沿って旋回しながら上昇ないし下降する。すなわち、流体塊は回転軸方向に沿って旋運動を行うことになる。こ

のような棒状の流れを対流柱と言ひ、その数や構造は Ra 、 Ta 、および Ta/Re の大きさによる。対流柱はヘリシティ $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ の存在を意味するが、地磁気ダイナモでヘリシティが重要視されるのは正にこのためである。一方、太陽の対流層の球殻としての厚みは地球の外核より相対的に薄いため、ヘリシティの寄与は外核の場合に比較して小さくなる。この事情が極性反転における両者の差異に深く関係すると考えられる。

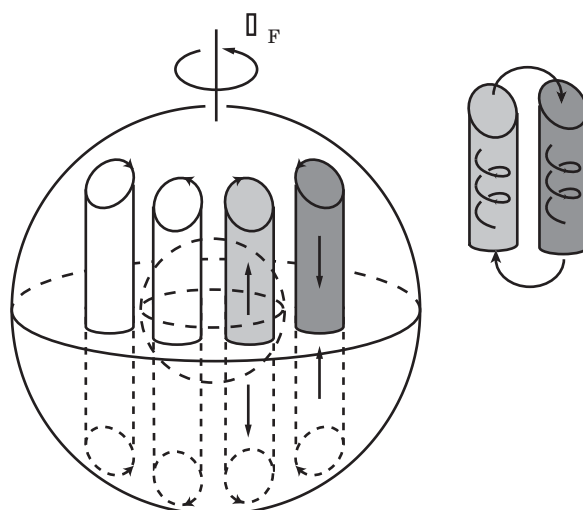


Fig. 5. Convection columns in a spherical-shell region mimicking the earth's outer core.

太陽の対流層では外核での流れに比べて流速が桁違いに大きく、対流層上部と下部（放射領域上部）では、 $O(10^2) \text{ km s}^{-1}$ の速度差がある。また、長さスケールや電気伝導度も外核におけるより遥かに大きい。この結果、 Re も Rm も外核の場合に比べかなり大きくなる。天文ジェットでは、原始星でも速度は $O(10^2) \text{ km s}^{-1}$ であり、長さも $O(10^{-2}) \sim O(1)$ 光年となるため、無次元量は文字通り天文学的大きさとなる。

4 電磁流体乱流モデル：ダイナモモデル

4.1 平均場方程式

§2 で紹介した事象では、流れはいずれも乱れた状態にある。このため、乱流中でいかにして対称性の高い磁場構造が発生し維持されているかを明らかにすることが、ダイナモとこれに関連する研究の眼目となる [13–15]。流れとして乱流を考えることに関しては、さらに重要な理由がある。球状領域内で速度場 $\mathbf{u}$ がある軸に関して軸対称であるとき、軸対称な磁場 $\mathbf{b}$ は式 (2) の定常解とはなり得ないことが証明されている（カウリングの反ダイナモ定理）。この定理は必ずしも流れが乱流であることを要求するものでなく、実際、流れにわずかな非対称性を入れて磁場の発生機構を調べる研究がなされている。しかし、流れのレイノルズ数がきわめて大きいことを併せ考えると、工学現象に見られるような発達した乱流状態にある

かどうかは別にして、かなりの非対称性をもった流れが乱流によって実現されていると考えるが妥当であろう。

物理量 f をアンサンブル平均 F とそのまわりの揺らぎ f' に分け、

$$f = F + f', \quad F = \langle f \rangle \quad (22)$$

と書く。ここで、 f 、 F 、 f' は

$$\begin{aligned} f &= (\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\omega}, \theta, \mathbf{b}, \mathbf{j}, \mathbf{e}), \\ F &= (\mathbf{U}, P, \boldsymbol{\Omega}, \Theta, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{E}), \quad f' = (\mathbf{u}', p', \boldsymbol{\omega}', \theta', \mathbf{b}', \mathbf{j}', \mathbf{e}') \end{aligned} \quad (23)$$

を意味する。球状領域では、 f のアンサンブル平均は回転軸まわりの平均と置き換えてもよい。

式 (2)、(6)、(8) のアンサンブル平均より、

$$\begin{aligned} \frac{DU_i}{Dt} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) U_i = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(P + \left\langle \frac{\mathbf{b}'^2}{2} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-R_{ij}) + \nu \nabla^2 U_i \\ &\quad + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i + 2(\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}_F)_i - \alpha_T (\Theta - \Theta_R) g_i \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \nabla \cdot (-\mathbf{H}_\theta) + \lambda_\theta \nabla^2 \Theta, \quad (25)$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_M) + \lambda_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (26)$$

を得る。ここで、 R_{ij} はレイノルズ応力、 $\mathbf{H}_\theta$ は乱流熱フラックス、 $\mathbf{E}_M$ は乱流起電力であり、それぞれ

$$R_{ij} \equiv \langle u'_i u'_j - b'_i b'_j \rangle, \quad \mathbf{H}_\theta \equiv \langle \mathbf{u}' \theta' \rangle, \quad \mathbf{E}_M \equiv \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \quad (27)$$

で定義される。 R_{ij} は非電導性流体の場合の電導性流体への拡張であり、 $\mathbf{E}_M$ は磁場に対するレイノルズ・「ベクトル」と言える。

$\mathbf{E}_M$ の意味を見るために、式 (1) より平均電流密度 $\mathbf{J}$ の表式を作ると、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\lambda_m} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_M + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (28)$$

となる。乱れによって $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{E}_M$ のように電場が変化したことになるので、 $\mathbf{E}_M$ は乱流起電力と呼ばれているが、電位を減らす方向に作用する場合もある（負の起電力発生）。

4.2 乱流量のモデリング

式 (24) において電磁力効果を除くと、工学乱流で行われるのと同様のモデリングが必要となるのがわかる。工学乱流の場合、レイノルズ応力の最も基本的なモデリングは渦粘性近似であるが、電磁流体乱流の場合にいかなるモデリングが適切かは、乱流モデルに精通し

た研究者でも簡単には分からない。このような場合、非電導性流体における渦粘性モデル（非線型モデルも含めて）を導出し得る統計理論的手法を電磁流体乱流に適用することが、モデリング研究の第一歩となる。ここでは、two-scale direct-interaction approximation (TSDIA) [15、16] を適用した結果にもとづくモデルを記す [16–18]。

A. モデル表現

渦粘性近似に対応する表現は、

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K_R \delta_{ij} - \nu_T S_{ij} + \nu_M M_{ij}, \quad (29)$$

$$H_\theta = -\frac{\nu_T}{\sigma_\theta} \nabla \theta, \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_M \equiv \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F) \quad (31)$$

で与えられる。ここで、 S_{ij} と M_{ij} は平均速度歪み、平均磁場歪みであり、乱流残留エネルギー K_R と合わせて

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad M_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_i}, \quad K_R = \left\langle \frac{|\mathbf{u}'|^2 - |\mathbf{b}'|^2}{2} \right\rangle \quad (32)$$

で定義される。

式 (29) で、 ν_T は非電導性流体における乱流粘性率に対応する。同式で S_{ij} と共に M_{ij} が生じるのは変哲もないように見える。しかし、座標反転に関して R_{ij} 、 S_{ij} の符号は変化しないが、 M_{ij} の符号は変わる。このため、 ν_M は純スカラーである ν_T と異なり、座標反転で符号を変えるスカラー、すなわち擬スカラーでなければならない。同様な事情は式 (31) においても生じ、 β は純スカラーであるが、 α と γ は擬スカラーとなる。 α については、ダイナモ研究の当初から研究されていたが、 ν_M と γ は TSDIA の適用によって初めて指摘された量であり、係数間には、

$$\nu_T = \frac{7}{5} \beta, \quad \nu_M = \frac{7}{5} \gamma, \quad (33)$$

の関係がある。

TSDIA からの示唆にもとづき、各係数は

$$\alpha = C_\alpha \tau_c H, \quad \beta = C_\beta \tau_c K, \quad \gamma = C_\gamma \tau_c W \quad (34)$$

とモデル化される。式 (34) において、 K 、 H 、 W は

$$K = \left\langle \frac{\mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2}{2} \right\rangle, H = \langle -\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, W = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \quad (35)$$

で定義され、それぞれ、電磁流体の乱流エネルギー、乱流残留ヘリシティ、乱流クロス・ヘリシティと呼ばれている。 C_α などは正のモデル定数であり、 τ_c は以下に述べる電磁流体乱流の特性時間である。非電導性乱流でのエネルギー散逸率に対応する量は、

$$\varepsilon = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle + \lambda_m \left\langle \left(\frac{\partial b'_j}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \quad (36)$$

である。

特性時間 τ_c として、乱流特性時間

$$\tau_c = \frac{K}{\varepsilon} \quad (37)$$

を用いると、式 (33) と (34) より ν は工学乱流で用いられるモデルと同形になり、 $\mathbf{b}' \rightarrow 0$ のとき、非電導性乱流でよく知られた乱流粘性表現に帰着する。しかし、§ 3.3 で述べたように、ダイナモを考察するときは自転効果が重要となるため、これに関係する時間スケールも組み入れることが肝要となる。この時間スケールを考慮するために、絶対渦度

$$\boldsymbol{\Omega}_A = \boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F \quad (38)$$

を導入し、自転および回転時間スケールとして Ω_A^{-1} を採用する。時間スケールとして K/ε と

Ω_A^{-1} のいずれが重要になるかはその相対的大きさで決まるので、 C_ω を定数として

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{K/\varepsilon} + \frac{C_\omega}{\Omega_A^{-1}} \quad (39)$$

より τ_c を決めると、

$$\tau_c = \frac{1}{1 + C_\omega r} \frac{K}{\varepsilon}, \quad r = \frac{K}{\varepsilon} \Omega_A \quad (40)$$

を得る。自転（回転）効果が大きいときは、 $\tau_c \propto \Omega_A^{-1}$ となる。

B. モデルの物理的意味

式 (29) と (30) において ν が非電導性乱流の場合の乱流粘性率にあたることは容易に理解できるが、その他の項の物理的意味はこれらの式からは自明でない。磁場の発生は電流の発生に対応するので、式 (28) を用いてモデリングの物理的意味を考えてみよう。

式 (31) を式 (28) に代入すると、平均電流密度 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\beta + \lambda_m} (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} + \gamma \boldsymbol{\Omega}) \quad (41)$$

となる。 λ_m が分子磁気拡散率（動粘性率 ν に対応する）あるいは抵抗であることから、 β は

乱れによって増加する磁気拡散率あるいは抵抗を意味することが分かる。この β は乱流抵抗と呼ばれている。

次に、 α に関係する項を考える。 $\beta + \lambda_m$ が正であるので、同項は α の符号に応じて $\mathbf{B}$ に平行ないし反平行な $\mathbf{J}$ が発生することを意味している。式(1)から分かるように、本来の電流は常に磁場に垂直であるが、平均部分を見るかぎり、乱れの効果によって磁場に沿った方向に電流が発生することになる。アルファ効果と命名されたこの効果は§4.1で述べたカウリングの反ダイナモ定理を克服するものであり、長いダイナモ研究で中心的概念となってきた。

なぜアルファ効果が発生するのであろうか。 α に現れる式(35)の H 中で、 $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ からの寄与を考える。これには理由がある。ダイナモ研究の当初は、速度場を与えてこれによる磁場の発生機構を調べるという運動論的ダイナモが研究の主流であったが、この過程で $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ にもとづくアルファ効果が発見されたのである。高磁気レイノルズ数の場合、分子拡散効果が小さいため、磁場は流体とともに動く傾向がある(凍結という)。式(34)、(35)より $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ が正となることが統計的に多いときは、磁場に反平行な電流を生むことになるが、この機構は図6のように説明される。 $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}'$ からの寄与は、磁力線のヘリシティ効果を表わしている。

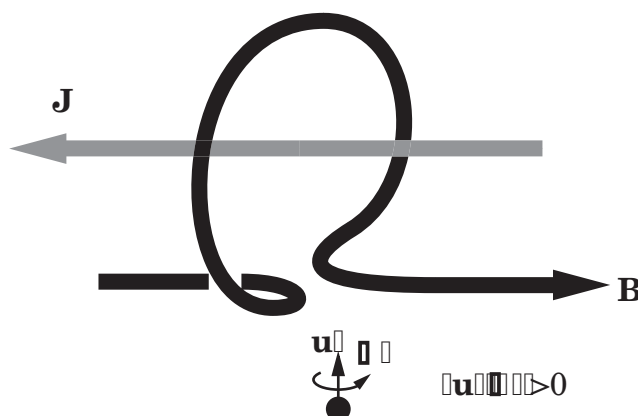


Fig. 6. Alpha dynamo.

γ に関連する項は何を意味するのであろうか。式(34)、(35)より $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}'$ が正に寄与するときは、図7のような電流ないし磁場が流体運動から発生することになる。 $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ は磁場、速度間にどの程度の相関があるかを示す量であるので、図7はこの量の程度に応じて平均磁場と平均速度、平均電流と平均渦度の揃い方が決まることを意味している。この効果が長い間指摘されることがなかったのは、運動論的ダイナモの影響であったように思われる。しかし、ダイナモとは本来、磁場と流れ場の関係であるから、その相互作用の強さの象徴であるクロスヘリシティ $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$ を考えないのは奇妙と言える。

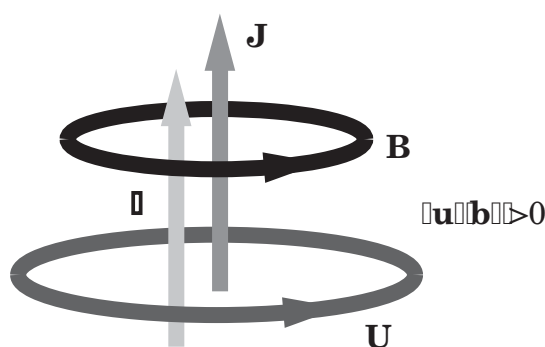


Fig. 7. Cross-helicity dynamo.

4.3 乱流方程式

ダイナモの研究においては、式 (31) の α と β に関連する項の性質はよく知られており、またそれらがどのような乱流量と関係しているかも理解されていた。しかし、非電導性乱流の解析で行われるように乱流量の支配方程式を構成し、磁場発生機構を考察しようとする試みはほとんどなく、 α 、 β 等に適当な数値ないしは函数を与えて考察がなされてきた。工学で乱流解析に接している読者はこの点に違和感を覚えられるかもしれないが、運動論的ダイナモでは平均速度自体を与えるため、係数までセルフ・コンシステントに決めることに意義はないと考えられたためであろう。しかし、乱流量の支配方程式を考えることに大きな意味があることは以下で述べる。

A. エネルギーとクロス・ヘリシティの方程式

乱流エネルギー K と乱流クロス・ヘリシティ W の方程式は、基礎方程式 (2)、(6) より、厳密に

$$\frac{DZ}{Dt} = P_Z - \varepsilon_Z + \nabla \cdot \mathbf{T}_Z \quad (Z = K \text{ or } W) \quad (42)$$

となる。ここで、 P_Z 、 ε_Z 、 $\mathbf{T}_Z$ は

$$P_K = -R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \mathbf{E}_M \cdot \mathbf{J} - \alpha_T \mathbf{H}_\theta \cdot \mathbf{g}, \quad (43)$$

$$\varepsilon_K = \varepsilon, \quad (44)$$

$$\mathbf{T}_K = W \mathbf{B} + \left\langle - \left(\frac{\mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2}{2} + g' \right) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}') \mathbf{b}' \right\rangle + \nu \nabla K, \quad (45)$$

$$P_W = -R_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \mathbf{E}_M \cdot (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F) - \alpha_T \langle \mathbf{b}' \boldsymbol{\theta}' \rangle \cdot \mathbf{g}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_W = (\nu + \lambda_m) \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right\rangle, \quad (47)$$

$$\mathbf{T}_W = K \mathbf{B} + \left\langle -(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}') \mathbf{u}' + \left(\frac{\mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2}{2} - g' \right) \mathbf{b}' \right\rangle + \nu \nabla W \quad (48)$$

で定義される。ただし、 $g' = p + (\mathbf{b}^2/2) - \langle p + (\mathbf{b}^2/2) \rangle$ である。

乱流モデルを知っている読者は、 P_z 、 ε_z 、 $\mathbf{T}_z$ が非電導性流体におけるエネルギー方程式での生成項、散逸項、輸送項に対応していることに気づかれたであろう。式 (42) で $Z = K$ としたものがその電磁流体への拡張版であり、 $Z = K$ と $Z = W$ の場合の差異は磁場と速度の役割が入れ替わっているだけである。この興味深い性質は、全エネルギーと全クロス・ヘリシティ

$$\int \frac{\mathbf{u}^2 + \mathbf{b}^2}{2} dV, \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV \quad (49)$$

が、非粘性 ($\nu = 0$) および非抵抗 ($\lambda_m = 0$) の場合に保存されるという重要な性質から来ている。乱流クロス・ヘリシティを考慮することの重要性は、この事実と表裏一体の関係にある。また、この保存則があるために、式 (42) のような簡明な構造を有する方程式が得られるのである。

式 (42) では、

$$\mathbf{T}_K = W \mathbf{B} + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \nabla K, \quad \varepsilon_W = C_W \frac{K}{\varepsilon} W, \quad \mathbf{T}_W = K \mathbf{B} + \frac{\nu_t}{\sigma_W} \nabla W \quad (50)$$

のようなモデリングが考えられるが、本論ではこれらの詳細は必要としないため、文献 [15, 18] に譲る。

それでは、以前からよく知られたアルファ効果における乱流残留ヘリシティ H はどうだろうか。この場合は、

$$\int (-\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j}) dV \quad (51)$$

が保存量とならないため、これを決める方程式のモデリングが大変困難となる。この点是非電導性乱流でのエネルギー散逸率方程式のモデリングと同様の状況になるが、電磁力効果のため一段と複雑さを増す。アルファ効果に関するこの事情は、乱流方程式を構成してダイナモを議論するという視点が乏しかったため、ほとんど省みられることがなかった。セルフ・コンシステントなダイナモ・モデルを構成する場合、ダイナモ研究でもっとも早くから知られていた部分 (アルファ効果) が障害になっているというのは、皮肉な状況と言える。ヘリシティ H および散逸率 ε の支配方程式についての更なる議論は、文献 [15, 18] に譲る。

5 ダイナモモデルによる 2、3 の考察

§4 で見たように、セルフ・コンシステントなダイナモ・モデルの構成にはまだ幾多の克服すべき課題が残されている。このような状況でダイナモ・モデルを用いても何も言えないのではないと思われる読者も多いと思われる。しかし、この限られた知識の中だけでもいくつかの興味深い磁場生成過程を指摘することができる。これはひとえに、不完全とは言え、

数学的な表式でダイナモが表わされているためである。

以下では、§2 で紹介した事象について本モデルから言及する。その際、

$$\frac{|W|}{K} = \frac{2\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle} \leq 1 \quad (52)$$

という不等式が大変強力な情報となる。さらに、式 (34) 中の定数として

$$C_\alpha \cong 0.02, C_\beta \cong 0.05, C_\gamma \cong 0.04 \quad (53)$$

を参照する。これは一方向だけ非一様性をもつ立方体領域での電磁流体乱流の数値実験より評価されたものであるが [19]、定数の詳細は以下の議論にはほとんど影響しない。

A. なぜ地磁気は流れの力学エネルギーより大きなエネルギーをもち得るのか

式 (31) を式 (26) に代入し、定常状態を考察すると、

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_F)) = 0 \quad (54)$$

を得る (われわれは、地球磁場は長い年月で反転するが、本来は安定なものと考え)。括弧内で、 β に比例する項は乱れによる磁場の拡散を表わしているが、この項が卓越する状態ではダイポール磁場など高い対称性をもつ磁場構造を維持することはできない。外核は太陽の対流層に比べ球殻が肉厚のため、対流柱によるヘリシティ効果が重要となる。この点を考慮し、第 2 項のアルファ効果は第 4 項のクロス・ヘリシティ効果を凌ぐとする。ただし、自転効果の重要性に鑑み、第 4 項では $\boldsymbol{\omega}_F$ の関係する項を残す。すると、式 (54) の特解を与える関係式として、

$$\mathbf{J} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{B} + 2 \frac{\gamma}{\beta} \boldsymbol{\omega}_F \quad (55)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$ を除外したが、この点に関しては以下で言及する。また、式 (34) より、

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{C_\alpha}{C_\beta} \frac{H}{K}, \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{C_\gamma}{C_\beta} \frac{W}{K} \quad (56)$$

と書ける。ここで強調すべきことは、アルファ効果によって乱流拡散効果が相殺されていることである。また、特性時間 τ_c の詳細を一切必要としないことにも注意されたい。

式 (55) を式 (24) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = & -\nabla \left(P + \left\langle \frac{\mathbf{b}'^2}{2} \right\rangle + \frac{2}{3} K_R \right) - \alpha_T (\Theta - \Theta_R) \mathbf{g} \\ & + 2 \left(\mathbf{U} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B} \right) \times \boldsymbol{\omega}_F + \nu_T \nabla^2 \left(\mathbf{U} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

を得る。ここで、議論を簡単にするために ν_T 、 α 等の空間依存性は考慮していない。もし、

$$\mathbf{U} = \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B} \quad (58)$$

に近い状態にあれば、式 (57) の速度場の拡散効果が磁場効果で相殺され、高い対称性をもつ磁場と共存する速度の拡散が抑えられることになる (右辺第 4 項) [20]。さらに、式 (54) で $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0$ が保証され、式 (55) で $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$ を落としたことと矛盾しないことが確認される。

式 (55) は $\mathbf{B}$ を決める式と言えるが、式 (58) より $\mathbf{U}$ を決める式とも言える。 $\mathbf{B}$ あるいは $\mathbf{U}$ を具体的に決めることなく、式 (58) から重要な帰結を導くことができる。式 (58) を用いると、

$$\frac{T_M}{T_K} = \frac{\mathbf{B}^2/2}{\mathbf{U}^2/2} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{C_\beta}{C_\gamma}\right)^2 \left(\frac{K}{W}\right)^2 \quad (59)$$

となり、式 (52) と (53) より

$$\frac{T_M}{T_K} \equiv \left(\frac{K}{W}\right)^2 \geq 1 \quad (60)$$

を得る。すなわち、磁場エネルギーがこれを生成している流体運動のエネルギーより大きくなる。その程度は $|W|/K$ に依存するが、これが $O(10^{-1})$ 程度であれば数百倍になり、 $O(10^{-2})$ であれば数万倍にもなる。溶融鉄では高温の電離ガスに比べ磁場と速度場の相関が小さいと考えられるので、後者のようなエネルギー比が予想される。

§ 2.1 で外核での分子磁気プラントル数は $O(10^{-6})$ であり、磁気拡散効果の方が速度拡散効果よりはるかに大きいと述べた。では、このような状況下でなぜ上述のエネルギー関係が可能なのであろうか。平均場にとって重要であるのは、分子拡散率よりは乱流拡散率である。式 (33) より、乱流磁気プラントル数は

$$Prm_T = \frac{\nu_T}{\beta} = \frac{7}{5} \quad (61)$$

で与えられ、多少ではあるが分子磁気プラントル数の場合と大きさが逆転する。その結果、平均場の視点では分子磁気プラントル数から見たような矛盾は消失する。

B. 太陽磁場はなぜ規則正しく極性を変えるのであろうか

太陽対流層、特に放射領域と重なる部分では回転角速度がかなり変化することが最近の陽震学の研究から知られている [21]。そのため、一様角速度をもつ回転系という記述を止め、

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (62)$$

を用いる。太陽の場合は、球殻の肉厚が地球の外核に比べ相対的にずっと薄いので、ヘリシティ効果がクロス・ヘリシティ効果に比べ弱いと考えられる。このとき、式 (62) の特解は

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U} = \frac{C_\gamma}{C_\beta} \frac{W}{K} \mathbf{U} \quad (63)$$

となる [22]。式 (58) と (63) の大きな違いは、誘起される磁場のエネルギーは流体運動の

エネルギーより大きくなれないことである。式 (63) を ω_F に関連する項を落とした式 (24) に代入すると、速度に対する磁場効果が弱いことが確認できる。

平均場に対する方程式だけを見ているとこれ以上のことは言えないが、この解を用いて式 (46) の W の生産項 P_W を考察すると興味深い性質がわかる。ここでは、結果のみをまとめる [22]。

(W1) 零でない W があると、式 (63) より回転によるトロイダル速度からクロス・ヘリシティ効果でトロイダル磁場が発生する。

(W2) 式 (62) 中のアルファ効果を摂動的に考慮すると、トロイダル磁場からトロイダル電流が生じる。

(W3) この電流はアンペールの法則よりポロイダル磁場、特に回転軸に沿う方向に軸をもつダイポール磁場を作る。

(W4) これらの磁場を用いて P_W を評価すると、ダイポール磁場はトロイダル磁場発生のもととなる W を減少させ、トロイダル磁場が減少する。

上の過程を模式的に示すモデルとして、

$$B_t = \gamma^* U_t, \quad \frac{dB_p}{dt} = \alpha^* B_t, \quad \frac{d\gamma^*}{dt} = -\eta B_p \quad (64)$$

と書いてみよう。ここで、 B_t はトロイダル磁場、 B_p はポロイダル磁場、 γ^* はクロス・ヘリシティに対応する。第 1 式は (W1) に、第 2 式は (W3) に、第 3 式は (W4) に相当する。クロス・ヘリシティの増減だけに注目し、アルファ効果に起因する α^* などの時間変化を無視すると、

$$\frac{d^2 \gamma^*}{dt^2} = -\omega_\gamma^2 \gamma^*, \quad \omega_\gamma = \sqrt{\alpha^* \eta U_t} \quad (65)$$

を得る。式 (65) は極性の周期的変化を与える。このモデルと反転周期との関係は、文献 [22] で議論されている。

C. 天文ジェットはなぜ広がらないのであろうか

§3 において、降着円盤からの天文ジェットが地上でのジェットに比べ成長（ジェット幅の広がり）がきわめて小さいことを述べた。活動銀河核のジェットのようにその速度が光速に匹敵するような場合は相対論的效果が重要となるが、ここでは速度がずっと小さい原始星を念頭において電磁流体効果のみを考える [23]。ジェットの発生に関しては、数値実験が活発に行われており、本特集号の記事および文献 [24, 25] を参照されたい。

式 (62) は

$$\mathbf{J} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{B} + \frac{\gamma}{\beta} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\beta} \mathbf{U} \times \mathbf{B} \quad (66)$$

によって保証される。この式から、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\beta} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (67)$$

となる。 $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ を仮定すると、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (68)$$

を得る。

式 (29)、(68) を分子粘性項、コリオリ力、浮力効果を落とした式 (24) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = & -\nabla \left(P + \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{2}{3} K_R + \left\langle \frac{\mathbf{b}^2}{2} \right\rangle \right) \\ & + \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu_T \nabla^2 \mathbf{U} - \nu_M \nabla^2 \mathbf{B} \end{aligned} \quad (69)$$

を得る。

§3 でジェットは降着ガスの角運動量解放と関係する可能性を述べたが、もしそうであれば旋回ジェットであり、その運動は渦度で特徴づけられる。式 (69) より、平均渦度 $\boldsymbol{\Omega}$ は

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \nabla \times \left(\left(\mathbf{U} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B} \right) \times \boldsymbol{\Omega} + \nu_T \nabla^2 \left(\mathbf{U} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{B} \right) \right) \quad (70)$$

に従う。関係式

$$\nabla \times (\nu_T \nabla^2 \mathbf{U}) = \nu_T \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (71)$$

より、ジェットが成長しない、すなわち渦度の拡散がないとすると、右辺括弧内の第 2 項より、

$$\mathbf{B} = \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{U} \quad (72)$$

が要求される。この関係は括弧内第 1 項が消えること、さらに $\boldsymbol{\Omega}$ の定常性を保証し、式 (68) の前提となる $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ も満たしている。

式 (72) は速度と磁場が揃うことによってジェット幅の成長が抑制されることを示している。では、速度と磁場が揃っている観測事実はあるだろうか。ジェットが旋回ジェットであるということは、流れがら旋運動をしていることを意味する。式 (72) が正しければ、磁場もら旋構造をしているはずである。最近のジェットの観測 [26] から、ジェット中での磁場がらせん構造をしていることが確認されており、式 (72) と矛盾しないことが分かる。

6 むすび

本論では電磁流体乱流モデルを用いていくつかの天文、地文現象での磁場関連事象を考察した。電磁流体乱流モデル自体は未完成であるが、疑義の少ないその一部を用いることによって解析的議論からいくつかの謎に迫ることができる。地磁気を模擬した数値実験が現在活発に行われ、貴重な情報が集積しつつある。その多くが磁気エネルギーが外核の運動エネルギーよりも大きくなると指摘しているが、なぜそのようなことになるかについての説明は著者らの知る限りなされていない。あくまでも計算結果がそうなることを示しているだけである。この事情は、溝乱流の計算機実験で平均速度が対数速度則に従うことを確認できるが、なぜそ

うなるかは数値計算からだけでは明らかにならないのと同様である。反対に、モデルを構成し、解析的議論をする段階で数値実験からの示唆は大変重要となる。この意味で、情報の抽出と整理において乱流モデルと計算機実験は補完的關係にあると言える。

参考文献

- [1] P. Melchior, *The Physics of the Earth's Core* (Pergamon, Oxford, 1986).
- [2] R. T. Merrill, M. W. McElhinny, and P. L. McFaden, *The Magnetic Field of the Earth* (Academic, San Diego, 1986).
- [3] E. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics* (Reidel, Dordrecht, 1982).
- [4] P. Wilson, *Solar and Stellar Activity Cycles* (Cambridge U. P., Cambridge, 1994).
- [5] M. C. Begelman, R. D. Blandford, and M. J. Rees, "Theory of extragalactic radio sources," *Rev. Mod. Phys.* **56**, 255 (1984).
- [6] 柴田一成、福江純、松元亮治、嶺重慎：活動する宇宙（裳華房、1999）。
- [7] G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, "A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal," *Nature* **377**, 203 (1995).
- [8] A. Kageyama and T. Sato, "Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II," *Phys. Plasmas* **2**, 1421 (1995).
- [9] H. Kitauchi and S. Kida, "Intensification of magnetic field by concentrate-and-stretch of magnetic flux lines," *Phys. Fluids* **10**, 457 (1998).
- [10] P. Olson, U. Christensen, and G. A. Glatzmaier, "Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration," *J. Geophys. Res.* **104**, 10383 (1999).
- [11] G. R. Sarson, C. A. Jones, and A. W. Longbottom, "Convection driven geodynamo models of varying Ekman number," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **88**, 225 (1998).
- [12] J. S. Katayama, M. Matsushima, and Y. Honkura, "Some characteristics of magnetic field behavior in a model of MHD dynamo thermally driven in a rotating spherical shell," *Phys. Earth Planet. Inter.* **111**, 141 (1999).
- [13] M. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge U. P., Cambridge, 1978).
- [14] F. Krause and K. -H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon, Oxford, 1980).
- [15] A. Yoshizawa, *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory* (Kluwer, Dordrecht, 1998).
- [16] A. Yoshizawa, "Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation," *Phys. Fluids* **27**, 1377 (1984).
- [17] A. Yoshizawa, "Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields," *Phys. Fluids B* **2**, 1589 (1990).
- [18] A. Yoshizawa, S. -I. Itoh, and K. Itoh, *Plasma and Fluid Turbulence: Theory and*

Modelling (Institute of Physics, Bristol, 2002).

- [19] F. Hamba, “Turbulent dynamo effect and cross helicity in magnetohydrodynamic flows,” *Phys. Fluids A* **4**, 441 (1992).
- [20] A. Yoshizawa, N. Yokoi, and H. Kato, “Turbulent magnetohydrodynamic dynamo based on alpha and cross-helicity effects, with special reference to geomagnetic fields,” *Phys. Plasmas* **6**, 4586 (1999).
- [21] J. Schou et al., “Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the Michelson Doppler imager,” *Astrophys. J.* **505**, 390 (1998).
- [22] A. Yoshizawa, H. Kato, and N. Yokoi, “Mean field theory interpretation of solar polarity reversal,” *Astrophys. J.* **537**, 1039 (2000).
- [23] A. Yoshizawa, N. Yokoi, and H. Kato, “Collimation mechanism of magnetohydrodynamic jets based on helicity and cross-helicity dynamos, with reference to astronomical jets,” *Phys. Plasmas* **7**, 2646 (2000).
- [24] Y. Uchida and K. Shibata, “Magnetodynamical acceleration of CO and optical bipolar flows from the region of star formation,” *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **37**, 515 (1985).
- [25] R. Matsumoto et al., “Radio jets and formation of active galaxies: Accretion avalanches on the torus by the effect of a large-scale magnetic field,” *Astrophys. J.* **461**, 115 (1996).
- [26] K. Asada et al., “A helical magnetic field in the jet of 3C 273,” *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **54**, L39 (2002).