

キャビテーション気泡の力学に関する数値解法

A Numerical Method for the Dynamics of Cavitation Bubbles

高比良裕之*

*大阪府立大学工学部

Hiroyuki Takahira

* Osaka Prefecture University

E-mail: takahira@energy.osakafu-u.ac.jp

1 はじめに

界面を追跡する手法には、大きく分けて、Lagrange 的なものと、Euler 的なものがある。このうち、界面のトポロジーをあまり気にすることなく解析を行えるのは、界面を陰的に扱う Euler 的な手法であり、VOF 法、Level Set 法など多くの気液二相流の数値解法で Euler 的な手法が用いられている。しかし、Euler 的な手法を、キャビテーション気泡の崩壊のように気相の体積変化が非常に大きな問題に適用する場合は、気泡が小さくなった際の格子解像度が問題となる。原理的には、体積変化に応じたマルチグリッドを用いれば、Euler 的な手法で気泡の崩壊現象を扱うことができるが、煩雑さは否めない。そのため、キャビテーション気泡の力学を扱う際には、Lagrange 的な手法がよく用いられてきた[1]。Lagrange 的な手法の問題点は、Lagrange 的に界面を追跡した結果生じる格子点の不均一による数値不安定にある。また、トポロジーの変化に対応することも厄介である。このように、それぞれの界面追跡法に、メリット、デメリットがあるが、本稿では、キャビテーション気泡の解析に使われることが多い境界要素法を用いた Lagrange 的な解析手法を紹介する。

2 解析手法

2.1 境界積分方程式

キャビテーション気泡の崩壊挙動は、主として液体の慣性力に支配され、また、半径 10 μm から 1 mm 程度の気泡の場合、液体の粘性による気泡振動の減衰効果は、内部気体の熱移動による減衰効果に比べて小さい。そのため、流れ場に関しては、ポテンシャル近似がよく用いられる。非圧縮・非粘性流体の速度ポテンシャル φ_l が満たす境界積分方程式は

$$\Theta(\bar{Q})\varphi_l(\bar{Q}) = \int_S \left\{ \frac{1}{|\bar{Q} - \bar{Q}'|} \frac{\partial \varphi_l(\bar{Q}')}{\partial n'_l} - \varphi_l(\bar{Q}') \frac{\partial}{\partial n'_l} \left(\frac{1}{|\bar{Q} - \bar{Q}'|} \right) \right\} dS' \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 S は気泡表面、 Q および Q' は気泡表面の点、 Θ は節点(関数値を代表させる点)での立体角を、添え字 l は液体を表している。また、 $\partial/\partial n'_l$ は法線微分を表しており、液体から外向きの方向を正に定めている。 z 軸を対称軸とする軸対称問題の場合には、式(1)は次のように変換される。

原稿受理 2003 年 8 月 29 日

$$\frac{\Theta}{2\pi} \varphi_l(r, z) = \int_{\Gamma} \left\{ G \frac{\partial \varphi_l(r', z')}{\partial n'_l} - H \varphi_l(r', z') \right\} d\Gamma' \quad (2)$$

ここで,

$$G = \frac{2r'}{\pi} \frac{K(k)}{\sqrt{d}}, \quad H = \frac{2r'}{\pi} \frac{\partial}{\partial n'_l} \left(\frac{K(k)}{\sqrt{d}} \right)$$

$$k = \sqrt{\frac{4rr'}{d}}, \quad d = (r+r')^2 + (z-z')^2, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

また, $K(k)$ は第一種完全楕円積分, Γ は z 軸を含む半平面における気泡表面上の境界要素の切り口である. 式(2)から界面での法線速度を, φ_l の分布から接線速度を求めることにより, 界面での速度分布を得ることができる. そして, φ_l ならびに界面の位置を, 以下の式で Lagrange 的に時間発展させることにより気泡の挙動を追うことができる.

$$\frac{d\varphi_l}{dt} = \frac{1}{2} |\nabla \varphi_l|^2 + \frac{1}{\rho} (p_{\infty} - p_v - p_g + 2\sigma\xi) \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \nabla \varphi_l \quad (4)$$

ここで, p_{∞} は無限遠方圧力, p_v は蒸気圧, p_g は非凝縮性気体の圧力, σ は表面張力, ξ は平均曲率を表している. なお, 以下では軸対称問題に絞って論述する.

2.2 トロイダル気泡

後述する壁面近傍での気泡の崩壊のように, 気泡表面を液体マイクロジェットが貫通すると, 気泡はドーナツ状になる. このような気泡をトロイダル気泡と呼ぶ. トロイダル気泡周りの解析領域は二重連結であるから, 式(2)の境界積分方程式は, このままでは使えない. そこで, Best はジェット貫通後の領域を単連結にするために, 図 1 のようなカット面 τ を導入し, カットの表と裏でポテンシャルの跳び ($\Delta\varphi = \varphi_{l+} - \varphi_{l-}$) が, ジェット貫通時の値で保存されるとしてトロイダル気泡の力学を扱った[2]. このことは, ジェットの貫通後, 循環が保存されることを意味している. ジェット貫通後の境界積分方程式は次のように書ける.

$$\frac{\Theta}{2\pi} \varphi_l = \int_{\Gamma} \left\{ G \frac{\partial \varphi_l(r', z')}{\partial n'_l} - H \varphi_l(r', z') \right\} d\Gamma' - \int_{\Gamma_{\tau}} H_{\pm} \Delta\varphi_l d\Gamma' \quad (5)$$

ここで, Γ_{τ} は z 軸を含む半平面におけるカット面の切り口であり, H_{\pm} は, H において \vec{n}_{\pm} 方向の微分をとることを表している. なお, カット面を Lagrange 的に動かしていくと, 他の気泡や剛体壁とカット面との距離が短くなりすぎて, 解が数值的に発散することがある. このような場合は, カット面の位置を剛体壁等とぶつからないように再配置してやればよい. カット面を再配置する場合は, 要素上の φ_l の分布を決め直す必要があるが, その詳細は, 文献 [3, 4] を参照されたい.

2.3 内部気体の取り扱い

気泡の運動を追跡するには, 式(3)の気泡内部の圧力を決定する必要がある. 蒸気の凝縮速度が気泡の収縮速度に比べて十分速い場合は, 蒸気圧 p_v は一定と近似できる. 一方,

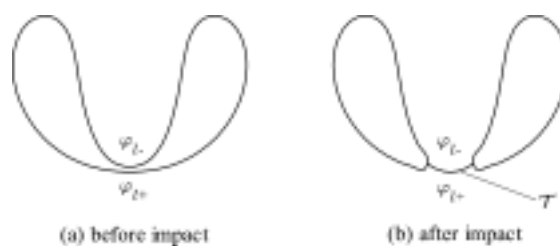


Fig. 1 Impact of liquid microjet

非凝縮性気体圧力の決め方にはいくつかの方法が考えられる．最も単純にはポリトロップ変化を仮定して気体圧力を決定できるが，その場合，内部気体の熱移動による振動の減衰効果が考慮されないことが問題となる．いま，気泡内部の圧力が空間的に一様で，内部気体が理想気体の状態方程式に従うと仮定すると，その支配方程式は，次のように表される[4-6]．

$$\nabla^2 \phi_g = \frac{\kappa - 1}{\kappa p_g} \nabla \cdot (\lambda_g \nabla T_g) - \frac{\dot{p}_g}{\kappa p_g} \tag{6}$$

$$\frac{dT_g}{dt} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T_g}{p_g} \{ \nabla \cdot (\lambda_g \nabla T_g) + \dot{p}_g \} \tag{7}$$

$$\dot{p}_g = -\frac{2\pi\kappa p_g}{V_b} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi_g}{\partial n_g} - \frac{\kappa - 1}{\kappa p_g} \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial n_g} \right) rd\Gamma \tag{8}$$

ここで，ドットは時間微分， κ は比熱比， λ は熱伝導率， T は温度，添字 g は気体を表している．なお，式(6), (7)の境界条件や解法は，文献[4, 6]を参照されたい．以上の 3 式を，式(2), (3), (4)と連立して解くことにより，内部気体の熱移動を考慮した気泡の運動が決定される．

2.4 平滑化と格子の再構成

前述したように，Lagrange 的な手法の問題点は，要素の不均一や歪による数値的な不安定にある．このうち，界面に関しては，境界要素の均一化と平滑化が有効である[2]．ただし，平滑化をやりすぎると，高周波の表面振動が消滅してしまうので注意する必要がある．また，気泡内部格子に関しては，格子の歪に応じて格子を再構成する必要がある[4, 6]．その際，柔軟に格子の増減に対応可能な非構造格子の利用が有効である．図 2 に，内部格子の一例を示す[6]．

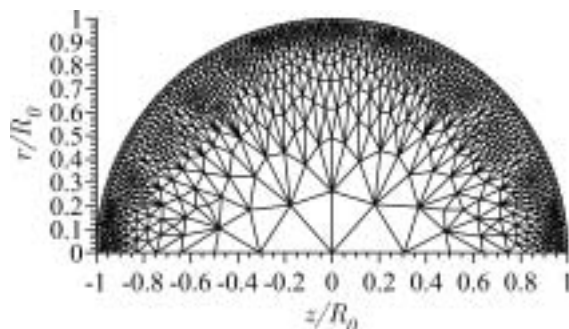


Fig. 2 Unstructured grids

格子はデローニー三角分割法により生成されており，温度境界層を解析するために，格子を界面近傍に集中させている．気泡内部は 1768 要素，気泡表面は 128 要素に分割されている．

3 計算例

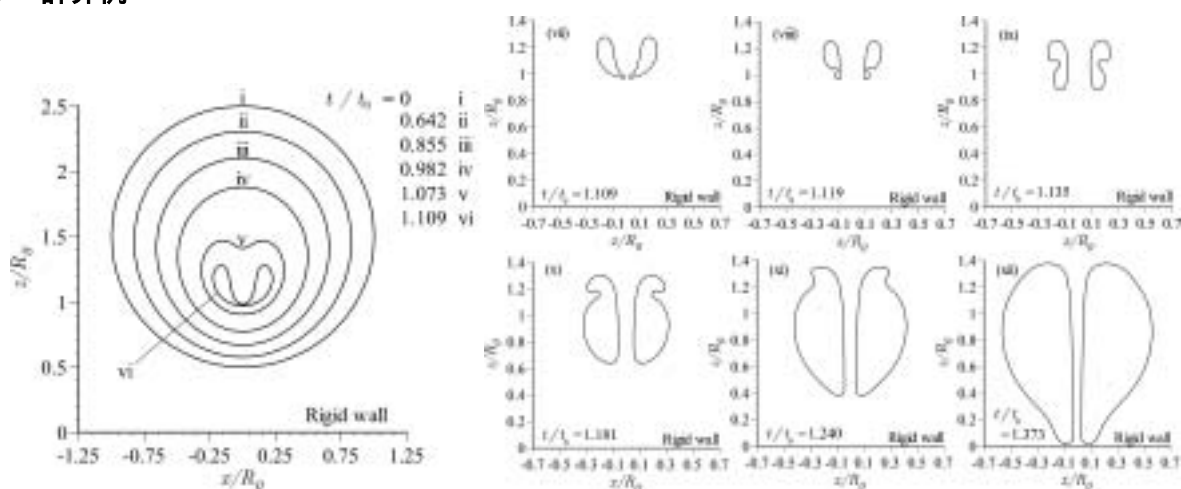


Fig. 3 Bubble profile before and after the microjet impact

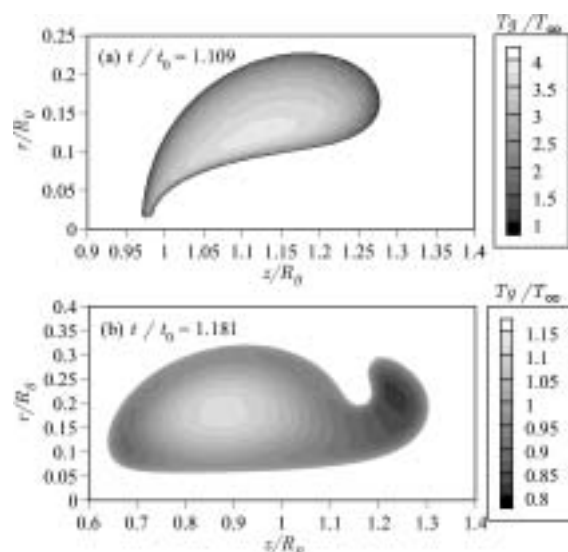
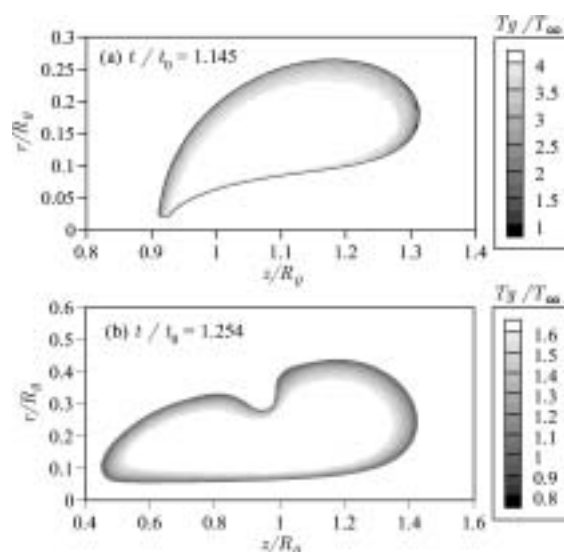
Fig. 4 Temperature distributions ($R_0 = 50\mu\text{m}$)Fig. 5 Temperature distributions ($R_0 = 500\mu\text{m}$)

図 3 に、剛体壁近傍における気泡周囲の液体圧力が、ある瞬間にステップ状に上昇した後の気泡の収縮・再膨張の様子を示す[4]。気泡の初期半径は $R_0 = 50\mu\text{m}$ ，初期気泡中心と剛体壁 ($z = 0$ 面) と距離は $1.5R_0$ である。気泡は、初期状態(i)から収縮を開始し、壁の方向に近づきながら変形する。そして、(vi)で液体マイクロジェットが対向する気泡表面に衝突し、トロイダル気泡になる(vii)。気泡は、ジェット貫通後もしばらく収縮し、(viii)で最小体積になる。その後、気泡は膨張に転じ、ジェット貫通部近傍の気泡表面にくぼみが生じる。このくぼみは、時間が経つにつれて後方に移動し最終的には消滅する。そして、気泡は、(xii)でほぼ最大になり剛体壁に非常に接近する。図 3 におけるジェット貫通後の気泡内温度分布を図 4 に示す。比較のため、図 5 に初期半径 $R_0 = 500\mu\text{m}$ の時の気泡内温度分布を示す。図 4, 5 からわかるように、気泡の初期半径が大きい場合は、温度境界層が気泡表面近傍に限られるのに対し、初期半径が小さくなると、温度境界層は気泡内部深くまで発達する。また、図 4(b)では、ジェットが貫通した気泡先端部ならびに後方のくびれた部分の温度が局所的に低下している。

4 おわりに

境界要素法を用いたキャビテーション気泡の崩壊問題の数値解析手法を紹介した。現在、気泡の崩壊問題における興味の一つは、気泡が変形を伴いながら非常に高速に崩壊する際の、超高温・高圧場の解明である。この解析では、非平衡蒸発・凝縮や内部気体の実在気体効果等も考慮する必要があるため、数値解析の役割もいっそう重要になってくるであろう。

参考文献

- [1] Blake, J. R. and Gibson, D. C., "Cavitation Bubbles near Boundaries", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 19, (1987), 99-123.
- [2] Best, J. P., "The Formation of Toroidal Bubbles upon the Collapse of Transient Cavities", *J. Fluid Mech.*, Vol. 251, (1993), 79-107.
- [3] Best, J. P., "The Rebound of Toroidal Bubbles", *Proc. IUTAM Symp. on Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, (1994), 405-412, Kluwer Academic Publishers.
- [4] 安田・高比良, "内部気体の熱移動を考慮したトロイダル気泡の力学に関する数値解析",

- 日本機械学会論文集(B 編), 68 巻, 672 号, (2002), 2178-2185.
- [5] Yuan, H. and Prosperetti, A., “Gas-Liquid Heat Transfer in a Bubble Collapsing near a Wall”, *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 1, (1997), 127-142.
- [6] 安田・高比良, “非構造格子を用いた非球形気泡崩壊時の内部温度場に関する数値解析”, 日本機械学会論文集(B 編), 67 巻, 658 号, (2001), 1384-1391.