

格子ボルツマン法を用いた二相流数値シミュレーション

Numerical Simulation of Two-Phase Flow Using Lattice Boltzmann Method

高田 尚樹*

*独立行政法人 産業技術総合研究所

Naoki Takada

*National Institute of Advanced Industrial Science and Technology

E-mail: naoki-takada@aist.go.jp

1 格子ボルツマン法 (LBM)

1.1 概要

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) [1][2] は, 統計力学に基づく数値流体シミュレーション法であり, 連続体である流体をメソスケールの仮想的な粒子の集合体と仮定し, 粒子が繰り返す衝突と並進を通してマクロスケールでの流動現象を創発的に再現する. 格子気体セルオートマトン法[3]から発展した本手法は, 非圧縮性流れ解析の並列計算による効率良い高速化, 複雑な形状を有する固体表面の境界条件の容易な実施, 粒子間相互作用による多相流体界面の自己組織的な再現, 等の利点を持ち, 多様な時間・空間スケールで起こる複数の現象が互いに影響し合う複雑な系のモデル化と効率的な計算に適している [4][5]. 多相流体流れに関して, LBM では, Volume of Fluid (VOF) 法[6]や Level Set 法[7] など Navier-Stokes 方程式に基づく従来の界面追跡法[8]と異なり, 微視的な粒子運動の結果, 表面張力が CSF モデル[9]を用いずに圧力場に反映され, Donor-Acceptor, TVD, MARS, CIP 等のアルゴリズムを利用した界面の輸送計算なしに多相流体の移動と変形を捕らえることができる [5]. 以上の特徴から, LBM は, 気泡や液滴の合体や分裂のような界面の大変形が繰り返す混相流現象の数値解析に適した手法と考えられる.

LBM は, 希薄気体流れの解析 [10] に類似して, 等方的で有限な離散速度 e_a (a は速度の種類を示す) と単位質量を持つ粒子の数密度 (実数値) の速度分布 f_a の集合を主要変数として扱い, 巨視的な流れ場の支配方程式の代わりに, 関数 f_a の時間発展を記述する格子ボルツマン方程式 (LBE) を用いる. 単相流体モデルの標準的な LBE は, 次の形式で書かれる.

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{e}_a \cdot \nabla f_a = -\frac{1}{\tau} [f_a - f_a^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

右辺の項は, 座標 \mathbf{x} 上の時刻 t における速度分布 f_a が緩和時間 τ の後に瞬時局所の平衡状態 f_a^{eq} に達するという BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 近似 [11] に基づく衝突演算子であり, 衝突時の質量や運動量等の局所的な保存を簡潔に満たす. 上式を解く際には, Lagrange 的な離散化スキーム以外に, 他の Euler 型計算法と同様, 任意の形状の格子で空間を離散化し, 各種の有限差分・有限体積スキームも利用できる [1]. 流速, 圧力, 温度等の巨視的変数は, f_a

または f_a^{eq} の粒子速度モーメントの和から定義され、低 Mach 数の条件で Maxwell 分布を Taylor 展開して得られる平衡分布関数を採用する場合、非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式が S 展開[10][12]または Chapman-Enskog 展開[1][2]により式(1)から導出される。

1.2 多相流体のモデル化

LBM の多相流体モデル[1]は、局所の粒子数密度とその勾配に応じて非等方な粒子間相互作用を粒子運動に導入することにより、非均一な粒子数密度分布を流れ場に発生させる。ここでは、各相が数密度の異なる流体領域に相当し、相の間にある界面は、流体の物性が粒子密度とともに数格子点に渡って連続的かつ急激に変化する空間として現われる。相互作用による粒子速度分布の変化の与え方は、BGK 衝突とは別の項を式(1)に追加する形式と、平衡分布関数に非等方なテンソルを加えて BGK 衝突を計算する形式に大別される。前者の形式に従う初期のモデル[13]は、各相を代表する成分の粒子に対する複数の分布関数と LBE を取り扱い、局所的な全粒子の質量と運動量を保存しながら各成分の運動量と数密度勾配の方向を一致させるように粒子を各速度方向に再配分する。この操作は、異種粒子間に斥力を加えることに相当し、同成分粒子の集合に伴う相分離と界面形状の維持をもたらす。その後発展してきた一連の自由エネルギーモデル[14]-[21]は、van der Waals-Cahn-Hilliard 理論に基づき、表面張力を界面での粒子密度勾配に起因するエネルギー寄与により定義し、熱力学に適合した二相流体の共存を模擬できる。本モデルでは、系の自由エネルギーを最小にするように相分離が臨界点以下の温度で自発的に発生し、初期モデルにはない物理的合理性が粒子間相互作用に与えられている。LBM と同様に自由エネルギーを利用する数値解法で、Navier-Stokes 方程式を直接解くものは、Phase-Field Model [22]、Second Gradient Method[23]等と呼ばれる。

2 二相流体格子ボルツマンモデル

2.1 自由エネルギー理論

LBM の二相流モデルの一つである Binary Fluid Model [15] (BFM) は、A・B 二成分の粒子で構成される流体を想定し、各相を二成分の粒子数密度 n_A 、 n_B の一方が相対的に多い領域として識別する。その二相の共存は、van-der-Waals-Cahn-Hilliard 理論に基づき、自由エネルギー Ψ を用いて統計熱力学的に再現される。 Ψ の最も簡潔なモデルは次の形式で表される。

$$\Psi = \int d\mathbf{x} \left\{ \psi(n, \Delta n, T) + \frac{\kappa}{2} |\nabla \Delta n|^2 \right\} \quad (2)$$

右辺第 1 項の ψ は、単位体積あたりの流体の自由エネルギーであり、BFM では、次式[15]、

$$\psi = \frac{T_c(n + \Delta n)(n - \Delta n)}{2n} + T \left[\frac{n + \Delta n}{2} \ln \left(\frac{n + \Delta n}{2} \right) + \frac{n - \Delta n}{2} \ln \left(\frac{n - \Delta n}{2} \right) - n \right] \quad (3)$$

で与えられる。 n および Δn は成分 A, B の粒子密度の和 $n_A + n_B$ と差 $n_A - n_B$ 、 T は系の温度(一定)、 T_c は臨界温度である。一方、右辺第 2 項は、界面における密度勾配に起因するエネルギー増分に相当し、比例定数 κ は表面張力と界面の厚さに関係している。A-B 二成分の混合流体は、 T_c より低い温度 T において Ψ が最小になるように二相に自動的に分離する。

流れ場の圧力テンソル $P_{\alpha\beta}$ および化学ポテンシャル差 $\Delta\mu$ は、上式(2)と(3)から導出される。

$$P_{\alpha\beta} = \left(nT - \kappa \Delta n \nabla^2 \Delta n + \frac{\kappa}{2} |\nabla \Delta n|^2 \right) \delta_{\alpha\beta} + \kappa \frac{\partial \Delta n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Delta n}{\partial x_\beta} \quad (4)$$

$$\Delta \mu = -T_c \frac{\Delta n}{n} + \frac{T}{2} \ln \left(\frac{1 + \Delta n/n}{1 - \Delta n/n} \right) - \kappa \nabla^2 (\Delta n) \quad (5)$$

下付添字のギリシャ文字はデカルト座標系の指標を示す．表面張力 σ は，平坦な界面に対する Bukker の式と式(4)を用いると次式で与えられる．

$$\sigma = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \Delta n}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6)$$

ここで， x 軸は界面の法線方向に沿う． $\Delta n(x)$ は，ある正の値 Δn_0 から負の値 $-\Delta n_0$ まで界面近傍の二相中で数格子点に渡って連続的に変化し，化学ポテンシャルに関する平衡条件，

$$\Delta \mu(n, \Delta n, T, \kappa) = constant \quad (7)$$

を満たす．尚，臨界温度 T_c は，温度 T ，平均密度 n_0 および Δn_0 と次の関係を持つ．

$$\Delta \mu(n_0, \Delta n_0, T) = 0, \quad for \quad \nabla(\Delta n) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Fig.1 は，式(7)より得られる平坦な界面の厚さ形状 $\Delta n(x)$ の理論解を示す．図のように，界面は密度変数 Δn の連続的な遷移領域に相当し，その幅は係数 κ の値とともに増加する．後述のシミュレーションでは，Fig.1 と同じ $T_c=0.533$ ， $T=0.5$ ， $n_0=1$ ， $\Delta n_0=0.42$ および $\kappa=0.01$ を用いた結果，単位長さの空間格子で離散化された流れ場において界面は 2~3 格子点分の幅で現われる．Table 1 は， κ の値に対する Δn の最大勾配，式(5)の積分値，および表面張力 σ を示す． κ (界面厚さ)の増加につれて積分値と勾配は減少するが， σ は増加する傾向にある．

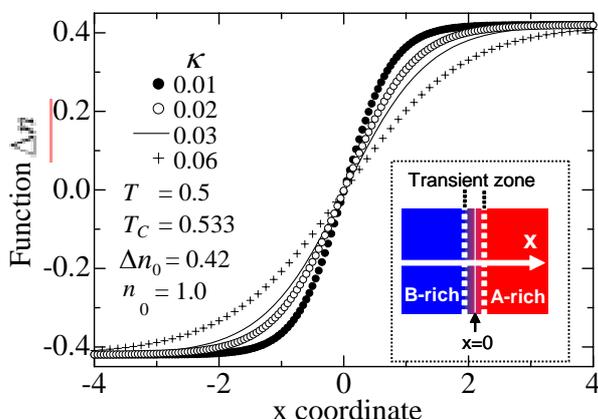


Table 1 Surface tension σ for κ .

| κ | $Max. \nabla \Delta n $ | $\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \Delta n ^2 dx$ | $\sigma (\times 10^{-3})$ |
|----------|--------------------------|---|---------------------------|
| 0.01 | 0.550 | 0.310 | 3.10 |
| 0.02 | 0.389 | 0.219 | 4.38 |
| 0.03 | 0.317 | 0.179 | 5.37 |
| 0.06 | 0.222 | 0.125 | 7.50 |

Fig.1 Example of Δn across a flat interface.

2.2 Binary Fluid Model

LBM で近年開発されてきた一連の二相流体モデル[14]-[21]は，上述の自由エネルギー理論に基づく自律的相分離を，界面の複雑な変形を伴う流体の挙動と同時に再現する．ここでは，それらの中で代表的な，Swift らが提案した Binary Fluid Model [15] (BFM) の概要を述べる．

BFM では，巨視的な変数である密度 n ， Δn および流速 \mathbf{u} が，粒子速度 \mathbf{e}_a に対する速度分布関数 f_a および g_a を用いて次のように定義される (a :速度ベクトルの識別子， eq :平衡状態)．

$$n \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \sum_a f_a \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_a \end{pmatrix} = \sum_a f_a^{eq} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_a \end{pmatrix} \quad (9), (10)$$

$$\Delta n = \sum_a g_a = \sum_a g_a^{eq} \quad (11)$$

$$\Delta n \mathbf{u} = \sum_a g_a^{eq} \mathbf{e}_a \quad (12)$$

時刻 t にデカルト座標 \mathbf{x} 上の関数 f_a および g_a の時間発展は、以下の LBE によって記述される。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{e}_a \cdot \nabla f_a = -\frac{1}{\tau_1} [f_a - f_a^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (13)$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial t} + \mathbf{e}_a \cdot \nabla g_a^{eq} = -\frac{1}{\tau_2} [g_a - g_a^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (14)$$

ここで式(13)の移流項では、界面の拡散を抑えられるよう関数 g_a が g_a^{eq} に置き換えられている [17]。上式右辺の BGK 近似の衝突項において、 τ_1 および τ_2 は平衡緩和時間であり、巨視的な輸送係数に関する。また、瞬時局所の平衡分布関数 f_a^{eq} および g_a^{eq} には、式(4)および式(5)が次の式を通して組み込まれる。式(16)中の係数 Γ は易動度である。

$$P_{\alpha\beta} = \sum_a f_a^{eq} (e_{a\alpha} - u_\alpha)(e_{a\beta} - u_\beta) \quad (15)$$

$$\Gamma \Delta \mu \delta_{\alpha\beta} = \sum_a g_a^{eq} (e_{a\alpha} - u_\alpha)(e_{a\beta} - u_\beta) \quad (16)$$

BFM は、次のような、等温場における質量密度比 1 の二相流体運動の支配方程式をもたらす。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_\beta}{\partial x_\beta} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial n u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial n u_\alpha u_\beta}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\nu \left(\frac{\partial n u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial n u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\lambda \frac{\partial n u_\beta}{\partial x_\beta} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} + \frac{\partial \Delta n u_\beta}{\partial x_\beta} = C \quad (19)$$

連続の式(17)と運動方程式(18)は LBE(13)より導出され、界面形状を表す Δn の移流拡散方程式(19)はもう一方の LBE(14)から得られる。式(17)の動粘性係数 ν は次式で表される [16]。

$$\nu = \frac{1}{4} \tau_1 \quad (2 \text{次元}), \quad \nu = \frac{2}{3} \tau_1 \quad (3 \text{次元}) \quad (20), (21)$$

式(19)右辺の項 C は、化学ポテンシャル差 $\Delta \mu$ (5) による流束を含むが、平衡状態では消える。

後述のシミュレーションでは、式(13)と(14)を解く際、数値安定性の向上が容易な有限差分型 LBM [24] に基づき、2 次精度 Runge-Kutta と 3 次精度風上差分スキームを用いた [17]。

2.3 表面張力の検証

Fig.2 は、2 次元の平衡静止液中に浮かぶ液滴内外の圧力差 ΔP に関する、BFM による計算結果を示す。本計算では界面の代表位置を $\Delta n = 0$ の等高面と仮定し、外部の圧力を $P_0 = n_0 T = 0.5$ とした。尚、以降のシミュレーションでは、式(4)と(5)に共通する係数 κ をそれぞれ独立な κ_1 と κ_2 に置き換え、表面張力 σ と界面厚さを従来より柔軟に決定した [17]。この方法では、 κ_2 、 T_C 、 T 、 n_0 、 Δn_0 の値を最初に与えて、式(7)から求めた Δn を式(6)に代入し、所定の σ の値から κ_1 の値が決める。図に示されるように、BFM は、半径 R と係数 κ_2 ($\Delta \mu$ 式(5)の κ に該当)の各値に対して、Laplace 則 $\Delta P = \sigma / R$ からの予測値(実線)と良く一致する圧力増加を与えている。

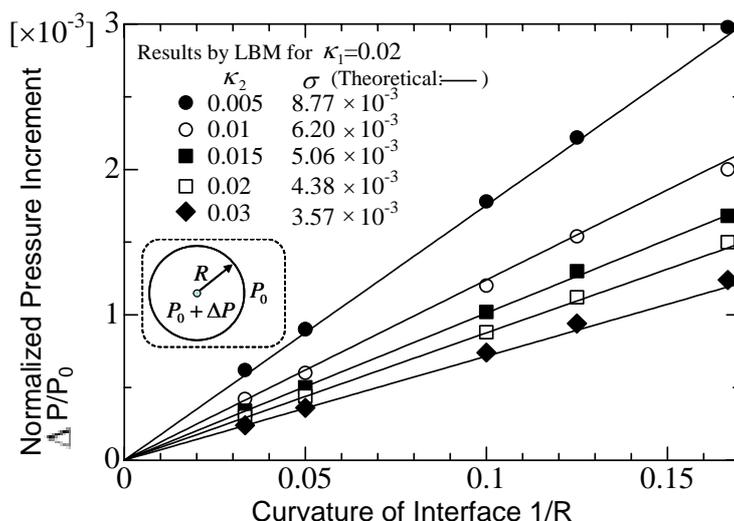


Fig.2 Pressure jump for single two-dimensional drops with various radii R.

3 LBM を用いた液滴挙動数値シミュレーション

著者らはこれまで重力下における二相流数値解析への LBM の適用の妥当性を確認してきた [16]が，以下では解析例として，BFM を用いて行った，非混和二成分系二相流体のせん断流中における液滴の変形・分裂挙動の結果[17]を紹介する．

3.1 計算対象と初期・境界条件

対象の流れ場(Fig.3)は，幅 H で離れた 2 枚の平行平板に挟まれ， x, y 方向に関して長さ L_x および L_y の空間周期性を持つ．平板は，一定速度 U_w で相互に逆方向へ水平移動し，ひずみ速度 $\dot{\gamma}=2U_w/H$ のせん断流を発生させる．初期条件では，幅 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1$ で一様に離散化された計算領域中央に，直径 $d_D=16$ の円形または球形の液滴が同じ質量密度と粘性を持つ液相中に浮遊している．平板上の格子点には，関数 f_a と g_a に対して外挿法の境界条件[25]が適用される．シミュレーションは，Reynolds 数 Re および Capillary 数 Ca を変えて実施された．

$$Re = \left(\frac{d_D}{2}\right)^2 \frac{\dot{\gamma}}{\nu}, \quad Ca = \frac{d_D \dot{\gamma} \nu}{2\sigma} \quad (22), (23)$$

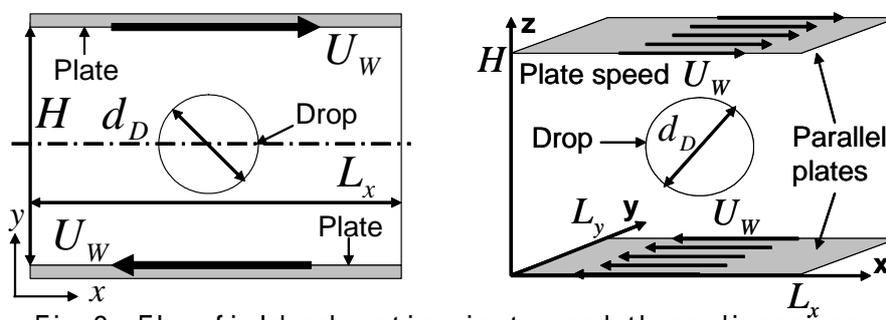


Fig.3 Flow field schematics in two and three dimensions discretized with mesh width $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1$

3.2 液滴の変形の測定

最初に，BFM の妥当性を検証するため，液滴の変形および分裂に関する結果を微小変形の理論解[25]および VOF 法による数値解[26]と比較した．定常状態の液滴の変形量を，Fig.4

に示される Taylor Deformation Parameter $D = (L - B) / (L + B)$ および Orientation Angle θ を用いて測定する．初期状態では， $H = 128$ ， $L_x = 64$ ， $L_y = 32$ の領域内で液滴と連続相は静止しており，平板が突然移動し始めることにより，時間依存のせん断速度場が形成される．Reynolds 数は，2 次元，3 次元においてそれぞれ 0.333，0.0625 に固定し， Ca のみを変化させた．

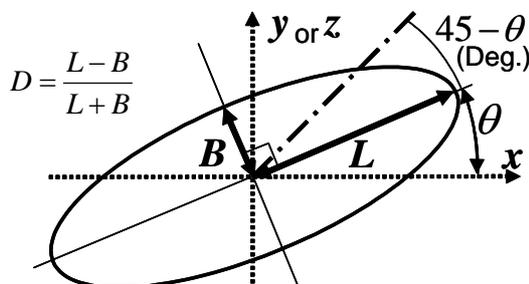


Fig.4 Measures of deformation and orientation of drop

Fig.5 および Fig.6 に，液滴の変形パラメータ D および θ の計算結果を従来の数値解および理論解とともに示す． D に関しては，3 次元の結果は Ca に対する増加傾向の点で理論解および VOF 法の解と一致した．一方，角度 θ に関する BFM の 3 次元の結果は，VOF 法による数値解と良く一致しており， Ca の増加とともに変形がより進むと理論値から離れる傾向が現われている．

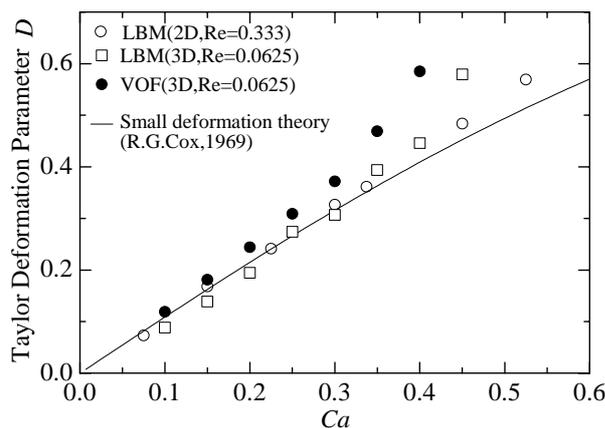


Fig.5 Taylor deformation parameter D

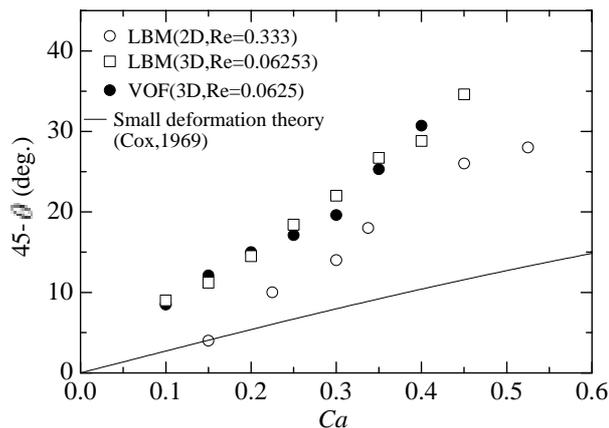


Fig.6 Drop orientation angle θ

3.3 液滴の分裂

次に，上述と同じ直径の液滴の分裂に関するシミュレーションを $H = L_x = 64$ ， $L_y = 32$ の 3 次元の計算領域内で実施した．ただし，初期条件では，連続液相側にせん断速度分布が既に形成されている．Fig.7 は， $Ca = 0.3$ および $Re = 0.1, 0.5, 0.6$ における，液滴の中心を通る $y = 16$ の $x-z$ 断面での界面形状と流速分布の結果を示す．Reynolds 数の増加に伴い，液滴はより大きく変形していくが分裂せずに定常状態に達する．一方，Fig.8 に示される $Re = 0.75$ の場合は，液滴の形状は楕円体からダンベル形状へ変化し，分裂が生じている．Fig.9 には，各 $Re \cdot Ca$ における液滴の分裂あり・なしの結果がそれぞれ記号 \circ ， \times で示されている．鎖線は，VOF 法の結果から予測される分裂の臨界条件を表し，この線より下の $Ca \cdot Re$ では分裂は発生していない． $Ca = 0.3$ における LBM と VOF 法との Taylor Deformation Parameter D の比較表からもわかるように，LBM-BFM の結果は VOF 法による予測と一致し，LBM が変形だけでなく，続いて生じる分裂も VOF 法とほぼ同じ精度で予測できることが確認される．

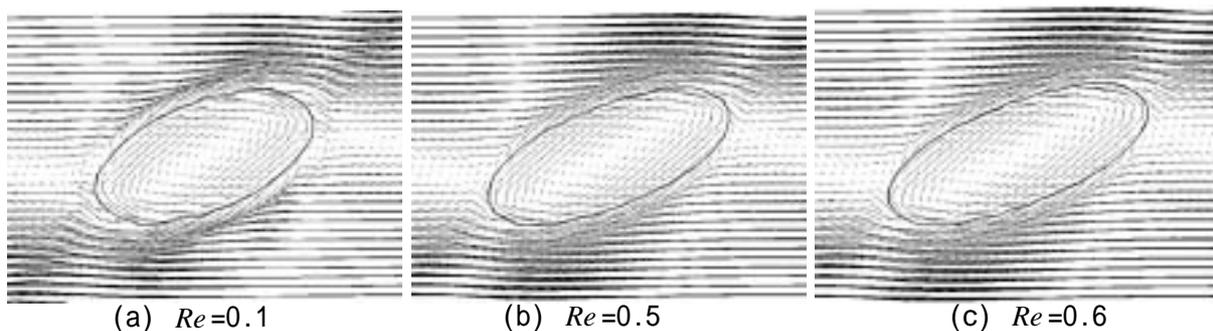


Fig.7 Steady-state interfacial profiles and flow velocities on a x-z cross section through the center of the drop at $Ca=0.3$

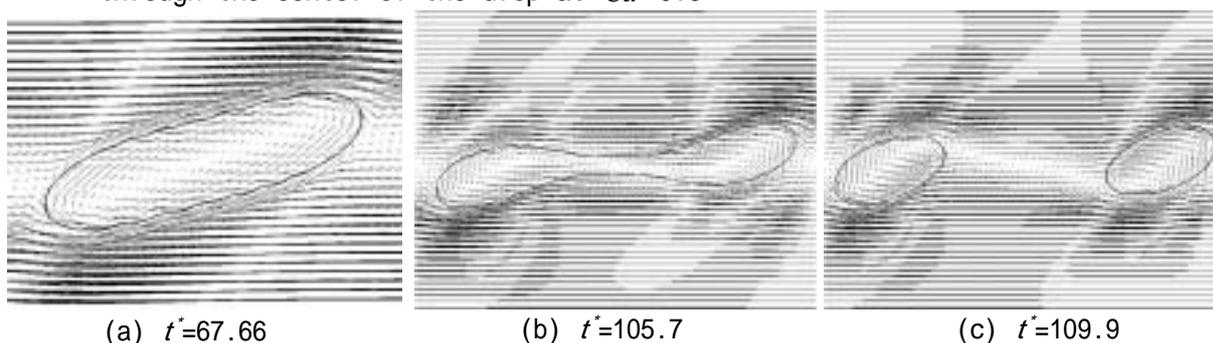


Fig.8 Snapshots of 3D drop for $Ca=0.3$ and $Re=0.75$ at $t^*=t \times 2U_w/H$.

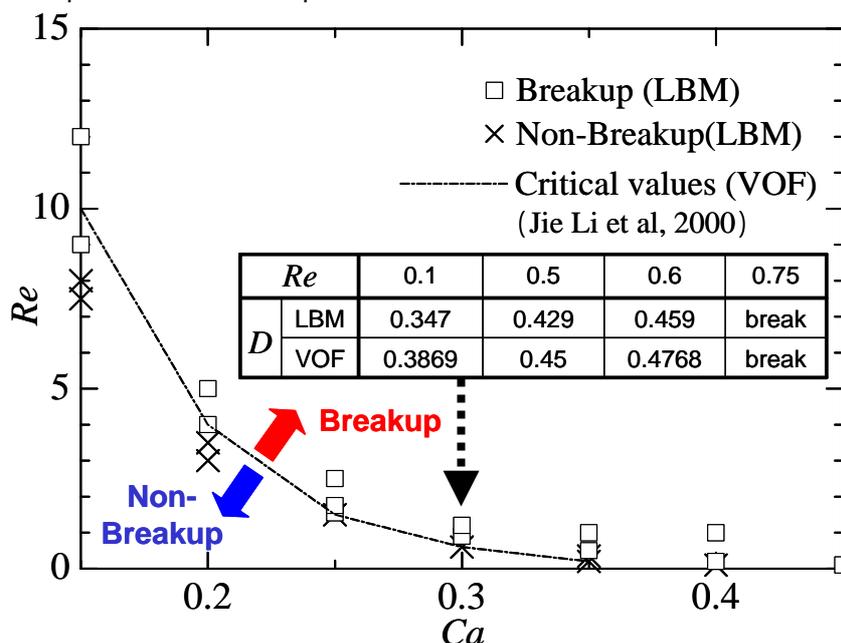


Fig.9 Diagram of drop breakup in terms of the capillary and Reynolds numbers.

3.4 変形・分裂に対する液滴間相互作用

最後に、変形と分裂に対する液滴間相互作用を調べるため、液滴の数密度と初期位置を前節から変化させて、 $Ca=0.3$ および $Re=1.0$ の条件（3.3 節の流れ場では分裂が生じ得る値）でシミュレーションを実施した。計算領域と液滴径 d_b は前節の場合と同じであるが、計算領域には 2 つの液滴を浮かべて液滴数密度を前節の倍とした。計算結果では、Fig. 10 に示されるように 2 つの球形状の液滴が流路中間の $x-y$ 平面上に初期配置される Case(a) においては、分裂は起こらず楕円体状の界面が定常状態で現れた。それに対して、流路の中間 $x-y$ 平面が

ら距離 d_D 離れた異なる高さに配置された液滴は，すれ違って移動しながら無次元時間 $t^*=35.16$ 以降に 2 つに分裂した(同図 Case(b)). 以上の結果は，多数の液滴の変形・分裂が，せん断の強さ，粘性，表面張力，液滴の数密度(空間の周期性)だけでなくそれらの初期位置にも依存することを示唆しており，様々な工学分野で利用される微細な気泡や液滴の効率的な生成には，せん断方向に対する液滴の相対位置の制御が必要であることが推測できる．

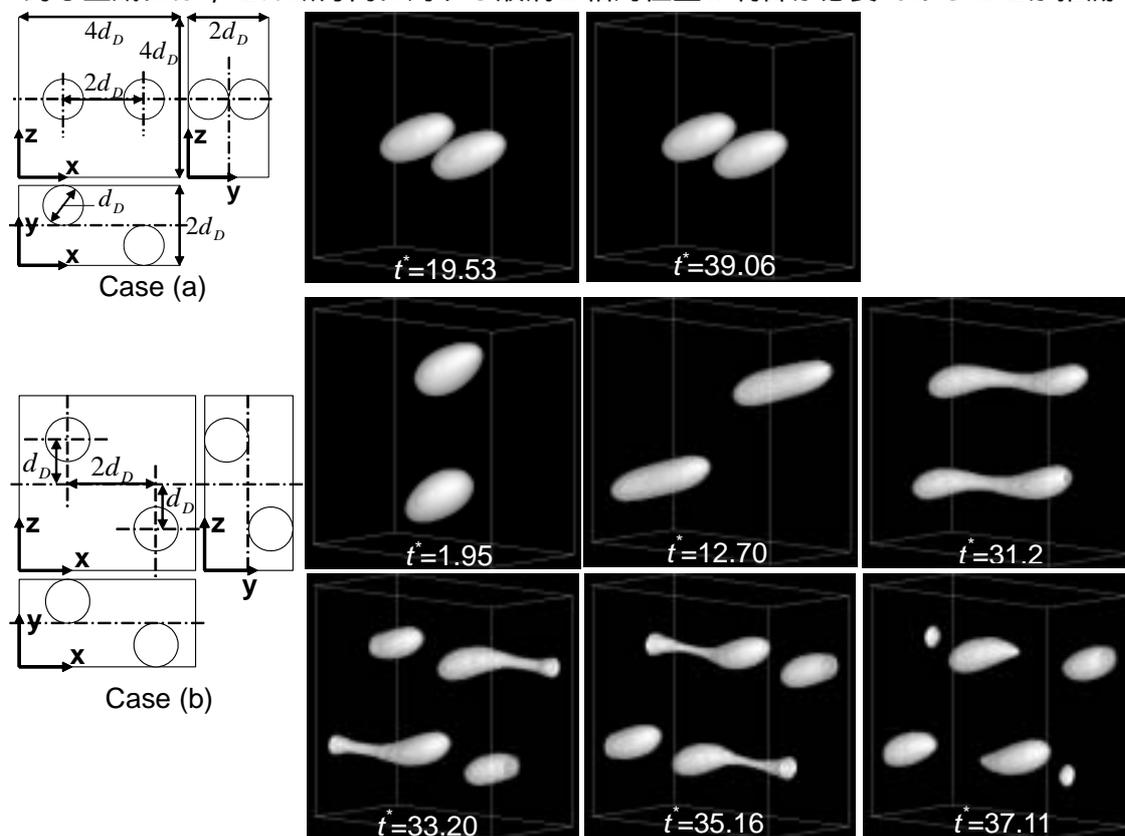


Fig.10 Initial conditions and snapshots of two-drop interaction for $Ca=0.3$ and $Re=1$ at $t^* = t \times 2U_w / H$.

4 おわりに

LBM では，上記で述べた Binary Fluid Model による計算の他に，自由エネルギー理論に基づく二相流体モデルの開発と各種計算スキームの適用が現在も国内外で進められており，数値解析への LBM の実用は今後一層進むと考えられる [27]. Chen ら [5] は，LBE の離散化に人工的な圧縮性を加味した TVD/AC スキームを用いることで，質量密度比 100 までの計算で数値拡散を抑えて高精度に安定して界面を捕らえることができることを示した．一方，稲室らによるモデル [19] は，圧力場を Projection 法により Poisson 方程式から求めるため別の分布関数と LBE を導入した結果，水-空気のようなより高い密度比の計算を安定に実行することが可能であり，実験結果に合致した単一気泡の上昇運動や管内二相流動様式の遷移を再現している．また，瀬田らが開発した熱流体モデル [20][21] については，熱の移動を伴う気泡の上昇運動とプール沸騰の計算結果においてその適用可能性が示された．以上のように，格子ボルツマン法は，相変化を伴う界面の複雑な挙動を有する気液二相流動の解析とマルチスケールでの熱物質輸送メカニズムの理解に役立つ手法として更なる発展が期待されている．

参考文献

- [1] Chen, S. and Doolen, G.D., " Lattice Boltzmann method for fluid flows " , *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, (1998), 329-364.
- [2] Succi, S., " The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond " (2001), Oxford at the Clarendon Press.
- [3] Frisch, U., Hasslacher, B. and Pomeau, Y., " Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation " , *Phys. Rev. Lett.*, **56**, (1986), 1505-1508.
- [4] 大橋弘忠, 「新しい熱流動シミュレーションの現状と展開」, *日本原子力学会誌*, **40-6**, (1998), 442-449.
- [5] Chen, Y., Teng, S. and Ohashi, H., " On the lattice Boltzmann modeling of multi-phase flows " , *Proc. 3rd Organized Multiphase Flow Forum ' 99*, Yokohama, Japan, Dec. 2-3, (1999), 58-64.
- [6] Hirt, C.W. and Nichols, B.D., " Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries " , *J. Comput. Phys.*, **39**, (1981), 201-225.
- [7] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., " A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, " *J. Comput. Phys.*, **114**, (1994), 146-159.
- [8] 秋山守, 有富正憲, 「新しい気液二相流数値解析-多次元流動解析-」(2002), 150-177, コロナ社.
- [9] Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C., " A continuum method for modeling surface tension " , *J. Comput. Phys.*, **100**, (1992), 335-354.
- [10] 曾根良夫, 青木一生, 「分子気体力学」(1994), 朝倉書店.
- [11] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M., " A model for collision processes in gases. . Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems " , *Phys. Rev.*, **94**, (1954), 511-525.
- [12] Sone, Y., " Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary " , *Rarefied Gas Dynamics*, ed. by D.Dini, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, (1971), 737-749.
- [13] Grunau, D., Chen, S. and Eggert, K., " A lattice Boltzmann model for multiphase fluid flows " , *Phys. Fluids, A* **5**, (1993), 2557-2562.
- [14] Swift, M.R., Osborn, W.R. and Yeomans, J.M., " Lattice Boltzmann simulation of nonideal fluids " , *Phys. Rev. Lett.*, **75**, (1995), 830-833.
- [15] Swift, M. R., Orlandini, E., Osborn W. R. and Yeomans, J. M. , " Lattice Boltzmann simulations of liquid-gas and binary fluid systems " , *Phys. Rev.*, **E 54**, (1996), 5041-5052.
- [16] Takada, N., Misawa, M., Tomiyama, A. and Hosokawa, S., " Simulation of bubble motion under gravity by lattice Boltzmann method " , *J. Nucl. Sci. Technol.*, **38**, (2001), 330-341.

- [17] Takada, N., Tomiyama, A. and Hosokawa, S., “ Lattice Boltzmann simulation of drops in a shear flow ”, Proc. 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conf., Honolulu, Hawaii, USA, July 6-11, (2003).
- [18] Inamuro, T., Tomita, R. and Ogino, F., “ Lattice Boltzmann simulations of drop deformation and breakup in shear flows ”, Int. J. Modern Phys. B **17**, (2003), 21-26.
- [19] 稲室隆二, 尾形雄司, 荻野文丸, 「二相系格子ボルツマン法による 3 次元気泡流の数値解析」, 第 16 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (2002), 論文番号 PD12-1.
- [20] 瀬田剛, 高橋亮一, 奥井健一, 竹越栄俊, 「二相流に対する熱流動格子ボルツマンモデルの提案」, 機論 B, **68**-672, (2002), 2186-2194.
- [21] Seta, T., Kono, K. and Chen, S., “ Lattice Boltzmann method for two-phase flows ”, Int. J. Modern Phys., B **17**, (2003), 169-172.
- [22] Jacqmin, D., “ Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling ”, J. Comput. Phys., **155**, (1999), 96-127.
- [23] Jamet, D., Lebaigue, O., Coutris, N. and Delhay, J.M., “ The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change ”, J. Comput. Phys., **169**, (2001), 624-651.
- [24] Cao, N., Chen, S., Jin, S. and Martinez, D., “ Physical symmetry and lattice symmetry in lattice Boltzmann method ”, Phys. Rev. E **55**, (1997), 21-24.
- [25] Cox, R.G., “ The deformation of a drop in a general time-dependent fluid flow ”, J. Fluid Mech., **37**, (1969), 601-623.
- [26] Li, J., Renardy, Y.Y. and Renardy, M., “ Numerical simulation of breakup of a viscous drop in simple shear flow through a volume-of-fluid method ”, Phys. Fluids, **12**, (2000), 269-282.
- [27] 小林敏雄・編, 「数値流体力学ハンドブック」(2003), 丸善.