

新しい堅牢な Weighted Compact Nonlinear Scheme

A new and robust formulation of weighted compact nonlinear scheme

- 野々村拓, 宇宙機構宇宙研, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, nonomura@flab.isas.jaxa.jp
藤井孝藏, 宇宙機構宇宙研, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, fujii@flab.isas.jaxa.jp
Taku Nonomura, ISAS/JAXA, 3-1-1Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan
Kozo Fujii, ISAS/JAXA, 3-1-1Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan

In this study, a new weighted compact nonlinear scheme is presented. In WCNS procedure, linear difference scheme is modified to be using flux on the computational nodes together with flux on mid points. This modification makes the scheme more robust, but more dissipative. The truncation error analysis is conducted and the reasons why this modification makes scheme robust and dissipative are discussed. The standard shock problems are solved with original and modified WCNS, and the results show that discontinuity thickness of modified WCNS becomes thicker and over/undershoots at the discontinuities are suppressed better. Also, the stiff shock tube problems, which the original WCNS can not solve because of negative pressure, can be solved using modified WCNS without blow up. Series of numerical tests show the robustness of modified WCNS.

1. 緒言

衝撃波を含む流れ場を解析する手法の一つとして Weighted Compact Nonlinear Scheme(WCNS)^{1,3}がある。WCNS はコンパクトスキーム⁴と WENO⁵を組み合わせた差分法であり、オリジナルの有限差分 WENO⁵に比べ、1)解像度が高い^{1,3}, 2)様々な流束評価法が使える¹, 3)曲線座標系で一様流保持ができる⁶, といった利点があり、これらの多くは WCNS が差分法でありながら変数補間が可能であることに起因する。(有限差分 WENO⁵は流束を補間せねばならないことに注意されたい。)

この WCNS のアルゴリズムは、i)非線形補間、ii)近似リーマン解法による流束評価、iii)線形差分となっており、従来の圧縮性の流体解析で良く用いられてきた有限体積の MUSCL⁷法と非常に似通っており、構造格子上で書かれた MUSCL 法からの拡張が容易である。

前述のように WCNS は、その WENO に対する様々な利点からこれまでに圧縮性乱流や空力音響問題に適用されてきた。しかしながら、これまでの我々の経験では計算が破綻しやすいという欠点が存在する。我々の経験上、アルゴリズム中で計算が破綻する部分は、

- 1) 非線形補間をした際に圧力もしくは密度が負となって計算が破綻する。
- 2) 線形差分をした後、保存量を更新すると更新した保存量に対応する圧力もしくは密度が負になる。

という 2 点である。

1)に関しては、WCNS 以外の高次精度スキームでも観察される問題であり、これは、補間した圧力もしくは密度が負の場合、1 次精度補間に落とすことで計算を安定にすることができる⁷。一方 2)の問題は例えば、以下を初期条件とする 1 次元衝撃波問題でも生ずる。

$$U(x, t=0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 0.5) \\ U_R & (x > 0.5) \end{cases} \quad (1)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 10)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (1, 0, 0.1)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

この問題では、オリジナルの WCNS では 1 ステップ目のルンゲクッタ 1 段階が終了する時点で圧力が負となり、計算が破綻してしまう。この問題に対して、負の圧力に対する同様の処理として、高次精度差分を行った際に圧力が負になる場所を探し出してきて、

その部分だけ、2 次精度中心差分を使うなどの手法が考えられる。この方法では線形差分をした後、時間更新をして圧力が負かどうかを判定しなければならず計算コストが大幅に増加する。特に陰解法との相性は悪いように思われる。また WCNS は線形差分を用いることで保存量の総量を保存しているが、負圧になる部分を 2 次精度などの低次精度の差分に落とす非線形差分を行うと、保存量の総量が保存できなくなる。この問題は衝撃波の近傍で生ずるため不用意にこの処理を行うと衝撃波の捕獲の際、正しい解に収束しないなどの悪影響を及ぼす可能性がある。

以上より、2)の問題に対して、線形差分の枠内で改良を加えて計算が破綻しにくいスキームを構築することでこれを解決することが望まれる。本論文では、アルゴリズムの最後の部分の線形差分の形を一部変形することでより堅牢なスキームが構成できることを示す。

2. 計算手法

本節ではオリジナルの WCNS と改良した WCNS を説明する。スキームの説明に以下の 1 次元 Euler 方程式を考える。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $Q = (\rho, \rho u, \rho e)^T$, $E = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho e + p)u)^T$ である。また状態方程式より

$$\rho e = \frac{1}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (3)$$

である。

2. 1 オリジナルの WCNS

まずはオリジナルの WCNS のアルゴリズムを説明する。(2r-1) 次精度の非線形補間および 2r 次精度の線形陽的差分を用いた (2r-1) 次精度 WCNS を説明する。

2. 1. 1 非線形補間

非線形補間では、 $Q_{j+1/2}^L, Q_{j+1/2}^R$ を計算する。ここでは、 $Q_{j+1/2}^L$ を計算する手順を示す。まず、 $Q_{j+1/2}^L$ を計算するためのステンシル S_j 内で保存変数から特性量に補間する。ここで (2r-1) 次精度の場合、

$$S_j = \{j-r, j-r+1, \dots, j+r\} \quad (4)$$

となる。保存変数から、特性変数の変換は以下のようになる。

$$q_{j+l,m} = l_{jm} Q_{j+l} \quad (l = -3, -2, \dots, 3) \quad (5)$$

ここで、 l_{jm} は j 点に於ける m 番目の左固有ベクトルである。
次に、重み付き平均を行う。ここで重み付き平均を行うために定義される k 番目($=1\dots r$)のサブステンシル S_{jk} は以下ようになる。

$$S_{jk} = \{j-r+k, j-r+k+1, \dots, j+k-1\} \quad (6)$$

重み付き平均を行う前に、それぞれのサブステンシル S_{jk} から最大精度の U の j の位置での $n(=1\dots r-1)$ 階微分の値 $\tilde{U}_{jk}^{(n)}$ ($k=1, \dots, r$) を以下の差分の形で求める。

$$q_{jk}^{(n)} = \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^n \sum_{l=0}^{r-1} a_{kl}^n q_{j-r+k+l} \quad (7)$$

上式での a_{kl}^n を補遺に示す。

それぞれのステンシルで評価された $1\sim(r-1)$ 階微分を用いると、 k 番目のステンシルを用いたセルノードへの物理量の補間 U_{jk} は

$$q_{j+\frac{1}{2};k}^L = q_j + \sum_{n=1}^{r-1} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right) q_{jk}^{(n)} \quad (8)$$

と表わされる。

すべてのステンシルで物理量の分布が滑らかな場合、それぞれのステンシルから作られた補間の線形結合として $(2r-1)$ 次精度の補間が構成できる。この $(2r-1)$ 次精度を達成する最適な重みを C_k とすると $(2r-1)$ 次精度の $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ は以下のように示される。

$$q_{j+\frac{1}{2};m}^L = \sum_{k=1}^r C_k q_{j+\frac{1}{2};k}^L \quad (9)$$

ここで用いられる $(2r-1)$ 次精度の C_k は補遺に示す。

しかしながら、実際にはいくつかのステンシルが滑らかでない場合がある。この時に振動を抑えるために最適な重み C_k でなくスムーズインジケータ IS_{jk} を使って滑らかなステンシルのみの結合となるような非線形な重み w_k を計算し、これを用いて重み付き平均を求める。実際には $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ は以下の式で表される。

$$q_{j+\frac{1}{2}}^L = \sum_{k=1}^r w_k q_{j+\frac{1}{2};k}^L \quad (10)$$

ここで重み w_k は

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} \quad (11)$$

であり、 α_k は以下の式で表される。

$$\alpha_k = \frac{C_k}{(IS_k + \varepsilon)^p} \quad (12)$$

ここで IS_k は

$$IS_{jk} = \sum_{n=1}^{r-1} (q_{jk}^{(n)})^2 \quad (13)$$

で ε は 10^6 、 p は 2 とした。このように設計することで、すべて滑らかなステンシルであった場合 w_k は C_k に近づき $(2r-1)$ 次精度の補間となることが出来る。

最後に、右固有ベクトル r_j を用いて元の変数に変換される。

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^L = \sum_m r_j q_{j+\frac{1}{2};m}^L \quad (l = -3, -2, \dots, 3) \quad (14)$$

ここまでの WCNS の非線形補間の手順である。

2. 1. 2 流束評価法

次に、流束評価法に移る。本論文では、特に記述していない場合 Roe の流束差分法 (flux difference splitting : FDS)⁸ を用いて解析を行った。数値流束 $E_{j+\frac{1}{2}}^{WCNS}$ は以下のように計算される。

$$E_{j+\frac{1}{2}}^{WCNS} = f_{ROE} (Q_{j+\frac{1}{2}}^L \cdot Q_{j+\frac{1}{2}}^R) \quad (15)$$

ここで得られた数値流束は、真の流束の近似となっており、

$$E_{j+\frac{1}{2}}^{WCNS} = E_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^{2r-1}) \quad (16)$$

が成り立つ。前述の通り WCNS の利点として、流束評価に様々な手法を用いることができる点があり、流束評価には FDS 以外の FVS (flux vector splitting) 系⁹、AUSM (advection upwind splitting method) 系¹⁰ や HLL (Harten-Lax-Leer) 系¹¹ を使うことができる。一般的な $(2r-1)$ 次精度有限差分 WENO⁴ の場合、数値流束 $E_{j+\frac{1}{2}}^{WENO}$ は、

$$\frac{1}{\Delta x} (E_{j+\frac{1}{2}}^{WENO} - E_{j-\frac{1}{2}}^{WENO}) = \frac{\partial E_j'}{\partial x} + O(\Delta x^{2r-1}) \quad (17)$$

と定義されており、 $E_{j+\frac{1}{2}}^{WCNS}$ の定義とは異なっていることに注意されたい。

2. 1. 3 線形差分スキーム

最後に、線形差分スキームにより微分値を計算する。この線形差分スキームでは、コンパクトスキームも使えるが、解像度があまり変わらないこと¹² が分かっている。そのため本論文では以下の陽的差分を用いた。

$$E_j' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^{r-1} a_k (E_{j+k+1/2}^{WCNS} - E_{j-k-1/2}^{WCNS}) \quad (18)$$

係数を Table 1 に示す。例えば、8 次精度差分は

$$\begin{aligned} E_j' = & \frac{1}{\Delta x} \frac{1225}{1024} (E_{j+1/2}^{WCNS} - E_{j-1/2}^{WCNS}) \\ & - \frac{1}{\Delta x} \frac{245}{3072} (E_{j+3/2}^{WCNS} - E_{j-3/2}^{WCNS}) \\ & + \frac{1}{\Delta x} \frac{49}{5120} (E_{j+5/2}^{WCNS} - E_{j-5/2}^{WCNS}) \\ & - \frac{1}{\Delta x} \frac{5}{7168} (E_{j+7/2}^{WCNS} - E_{j-7/2}^{WCNS}) + O(\Delta x^7) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この式は、中点 (Mid point) からノード点 (Node point) へ差分を行う式となっている。そこで、これ以降 DM (Difference scheme using Mid points) として記す。

Table 1 Coefficients of the cell-center to cell-node difference scheme.

coefficients	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
fourth order	$\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0	0	0
explicit					
sixth order	$\frac{75}{64}$	$-\frac{25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0	0
explicit					
eighth order	$\frac{1225}{1024}$	$-\frac{245}{3072}$	$\frac{49}{5120}$	$-\frac{5}{7168}$	0
explicit					
tenth order	$\frac{19845}{16384}$	$-\frac{735}{8192}$	$\frac{567}{40960}$	$-\frac{405}{229376}$	$\frac{35}{294912}$
explicit					

2. 2. よりロバストな WCNS

前節でのオリジナルの WCNS に対して、よりロバストな WCNS を導入する。よりロバストな WCNS は最後の線形差分の部分のみ異なるだけで他はオリジナルと全く同じである。

よりロバストな WCNS では線形差分を以下のように書く。

$$E_j' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^r b_k (\tilde{E}_{j+k/2} - \tilde{E}_{j-k/2}) \quad (20)$$

$$\tilde{E}_{j+k/2} = \begin{cases} E_{j+k/2}^{WCNS} & (k = 2n-1) \\ E_{j+k/2} & (k = 2n) \end{cases}$$

ここで n は整数である。このスキームの係数を Table 2 に示す。例えば、8 次精度差分は

$$E_j' = \frac{1}{\Delta x} \frac{8}{5} (E_{j+1/2}^{WCNS} - E_{j-1/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{2}{5} (E_{j+1} - E_{j-1}) + \frac{1}{\Delta x} \frac{8}{105} (E_{j+3/2}^{WCNS} - E_{j-3/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{140} (E_{j+2} - E_{j-2}) + O(\Delta x^7) \quad (21)$$

となる。この式は、中点およびノード点(Mid and node point)からノード点(Node point)に差分を行う式となっている。そこで、これ以降 DMN(Difference scheme using Mid and Node points)として記す。

この式は、WCNS の数値流束が WENO のそれとは異なり、真の流束の近似となっているために成立する。本論文後半で示すように、この差分式はオリジナルの差分式よりロバストとなる。5 次精度非線形補間とこの表式での 4 次精度差分の組み合わせは既に Point-Flux WENO (PFWENO)¹³ として発表されている。本論文では、この手法を WCNS の変形と考えて議論していく。

また、これ以降、スキームは WCNS-*LuD bM(N)* と記述する。ここで、*a* は非線形補間の精度、*b* は差分の精度とする。それぞれのスキームの記述を Table 3 にまとめる。

Table 2 Coefficients of the cell-center to cell-node difference scheme.

coefficients	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
fourth order explicit	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0
sixth order explicit	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	0	0
eighth order explicit	$\frac{8}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{105}$	$-\frac{1}{140}$	0
tenth order explicit	$\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	$-\frac{5}{252}$	$\frac{1}{630}$

Table 3 Schemes tested in this paper

Scheme	interpolation	difference
WCNS-I3-D4M	3 rd order	Eq. 18 with 4 th order coeffs.
WCNS-I5-D6M	5 th order	Eq. 18 with 6 th order coeffs.
WCNS-I7-D8M	7 th order	Eq. 18 with 8 th order coeffs.
WCNS-I9-D10M	9 th order	Eq. 18 with 10 th order coeffs.
WCNS-I3-D4M	3 rd order	Eq. 20 with 4 th order coeffs.
WCNS-I5-D6M	5 th order	Eq. 20 with 6 th order coeffs.
WCNS-I7-D8M	7 th order	Eq. 20 with 8 th order coeffs.
WCNS-I9-D10M	9 th order	Eq. 20 with 10 th order coeffs.

2. 3. 時間積分スキーム

時間積分には 3 次精度 Total-Variation-Diminishing Runge-Kutta (Strong Stability Preserving Runge-Kutta)¹⁴ を用いて解析を行った。

3. 評価

3. 1 誤差解析

本節では WCNS-DM と改良した WCNS-DMN の誤差解析を行い、WCNS-DMN がよりロバストになる理由を簡単に説明する。ここでは、7 次精度の非線形補間および 8 次精度の陽的線形差分を用いた全体で 7 次精度のスキームを考える。

線形移流方程式かつ流れ場が十分に滑らかな場合の誤差を解析する。

線形移流方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$f = u$$

となる。この式に対し、WCNS を適用する。線形移流方程式での WCNS は、Euler 方程式での実装において、前節での説明に対し $Q=q=u$, $f_{j+1/2}=u_{j+1/2}$, $E=f$, $l=r=1$ と置けばよい。

流れ場が十分に滑らかであることから非線形重みは最適重みになる。最適重みを用いた場合、7 次精度の流束が中点で得られ、この流束がもつ誤差は以下ようになる。

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{WCNS} = f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{5}{2048} f_j^{(7)} \Delta x^7 + O(\Delta x^8) \quad (23)$$

これを以下の 8 次精度の差分式

$$f_j' = \frac{1}{\Delta x} \frac{1225}{1024} (f_{j+1/2}^{WCNS} - f_{j-1/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{245}{3072} (f_{j+3/2}^{WCNS} - f_{j-3/2}^{WCNS}) + \frac{1}{\Delta x} \frac{49}{5120} (f_{j+5/2}^{WCNS} - f_{j-5/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{5}{7168} (f_{j+7/2}^{WCNS} - f_{j-7/2}^{WCNS}) + O(\Delta x^7)$$

に代入すると

$$\tilde{f}_j' = f_j' + \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{1225}{1024} (\tilde{f}_j^{(7)} - \tilde{f}_{j-1}^{(7)}) - \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{245}{3072} (\tilde{f}_{j+1}^{(7)} - \tilde{f}_{j-2}^{(7)}) + \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{49}{5120} (\tilde{f}_{j+2}^{(7)} - \tilde{f}_{j-3}^{(7)}) - \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{5}{7168} (\tilde{f}_{j+3}^{(7)} - \tilde{f}_{j-4}^{(7)}) + O(\Delta x^7)$$

$$\tilde{f}_j' = f_j' + \frac{5\Delta x^7}{2048} (\tilde{f}_j^{(8)}) + O(\Delta x^7) \quad (25)$$

が得られる。

式(22)の右辺第 2 項、4 項(下線部)は負の数値粘性が入っていることがわかる。本解析では、最適重みで考えたが、衝撃波前後でこの負の数値粘性が強く働くことが考えられ、スキームの安定性を考える上では好ましくない。これが原因でスキームが脆弱であると予想される。一方、式(23)から、負の数値粘性は正の数値粘性よりも弱く全体としては正の数値粘性となることがわかる。

一方、式(20)を、新しい WCNS の差分式

$$f_j' = \frac{1}{\Delta x} \frac{8}{5} (f_{j+1/2}^{WCNS} - f_{j-1/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{2}{5} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{1}{\Delta x} \frac{8}{105} (f_{j+3/2}^{WCNS} - f_{j-3/2}^{WCNS}) - \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{140} (f_{j+2} - f_{j-2}) + O(\Delta x^7)$$

に代入すると

$$\tilde{f}_j' = f_j' + \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{8}{5} (\tilde{f}_j^{(7)} - \tilde{f}_{j-1}^{(7)}) + \frac{5\Delta x^6}{2048} \frac{8}{105} (\tilde{f}_{j+1}^{(7)} - \tilde{f}_{j-2}^{(7)}) + O(\Delta x^7) \quad (27)$$

$$\tilde{f}_j' = f_j' + \frac{5\Delta x^7}{2048} \left(\frac{64}{35} \tilde{f}_j^{(8)} \right) + O(\Delta x^7) \quad (28)$$

が得られる。

前述のオリジナルの WCNS での負の係数に相当する場所(式(24)、下線部)は、真の流束を用いており、このため数値粘性項が入っておらず、結果的に負の数値粘性とならない。これによりスキームが安定になると考えられる。一方で、式(26)より数値粘性の合計はオリジナルの WCNS よりも数値粘性が大きいことがわ

かる。これによりスキームはより散逸的になると考えられる。

3. 2 フーリエ解析

本節では WCNS-DM と改良した WCNS-DMN のフーリエ解析を行い、WCNS-DMN では数値粘性過多となり、解像度が落ちることを議論する。

本章では高次精度 WCNS の解像度を解析的な評価を示す。すべて滑らかな領域と仮定し、理想的な重みを用いたと仮定して解析を行った。解析の方法は以下のようなものである。

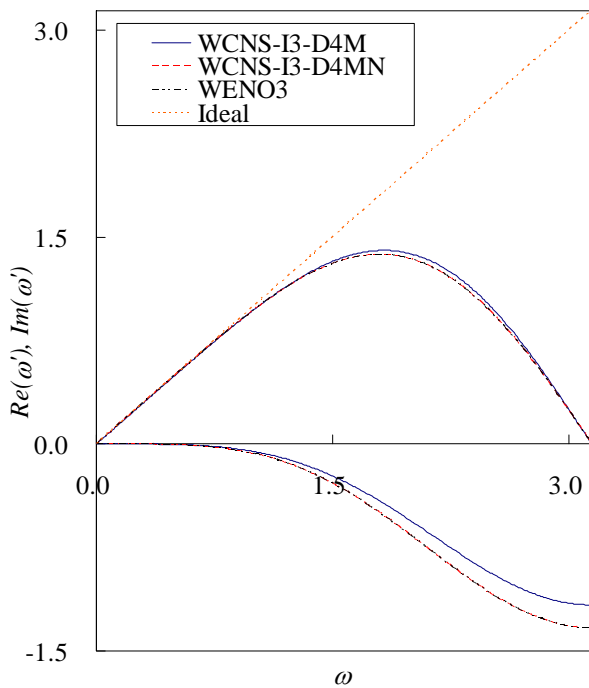
$$U_j = \exp(i w x_j) \quad (29)$$

を $\Delta x=1$ の格子上でスキームを用いて数値的に微分した時に、数値的な一階微分 U_j' は、

$$U_j' = i w^* \exp(i w x_j) \quad (30)$$

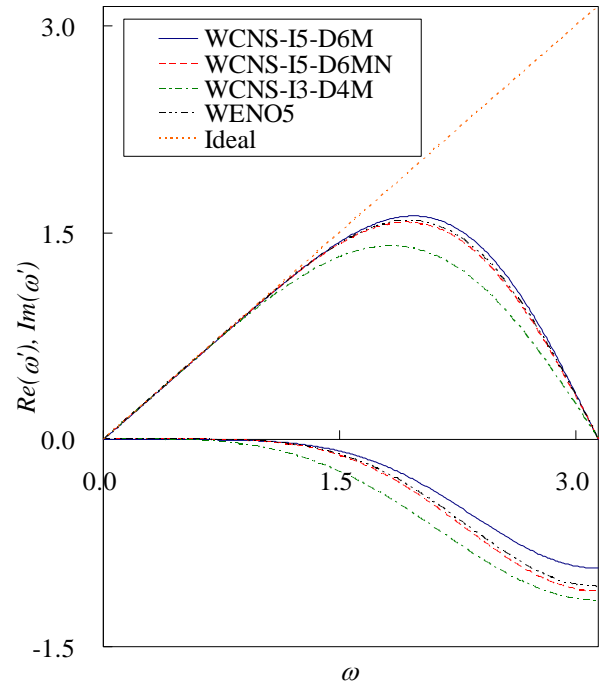
と表される。この w^* を w に対して解析的に計算した。理想的には $w^*=w$ となるのが望ましい。結果を図 1 に示す。横軸が計算前の波の波数で縦軸が微分スキームの評価した波数である。ここで、Ideal で表される直線に近いほうが、解像度が高いことを示している。厳密解や中心差分スキームでは w^* の虚数部分は表れないが、風上差分となることによって w^* の虚数部分も現れる。

Figure 1 に WCNS-DM と WCNS-DMN、同じ精度の WENO、低い精度の WCNS-DM の結果を示す。3, 5, 7 および 9 次精度において、WCNS-DMN のほうが WCNS-DM よりも解像度が低くなるのがわかった。また同じ精度の WENO と比較すると、ほぼ同等か若干低い解像度であること、また低い精度の WCNS-DM よりも解像度が高いことが伺える。前述の誤差解析から得られたように WCNS-DMN がより散逸的であることがわかった。

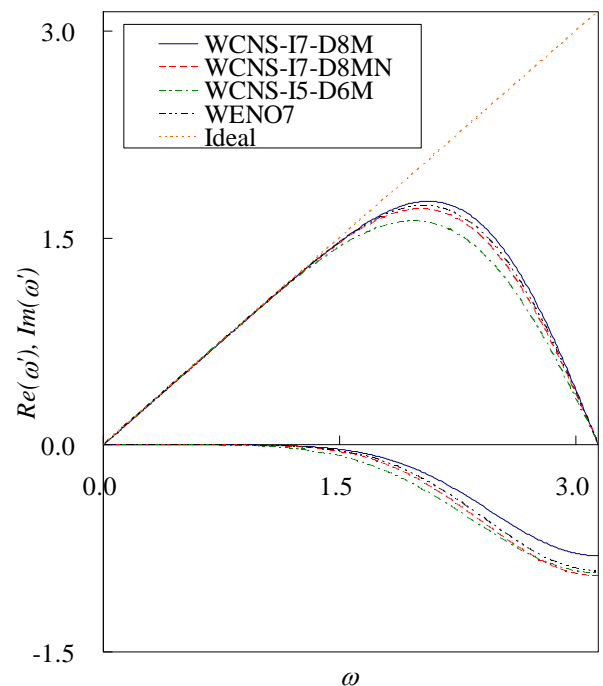


(a) 3rd order WCNS

Fig. 1 Comparison of resolution using modified wave number

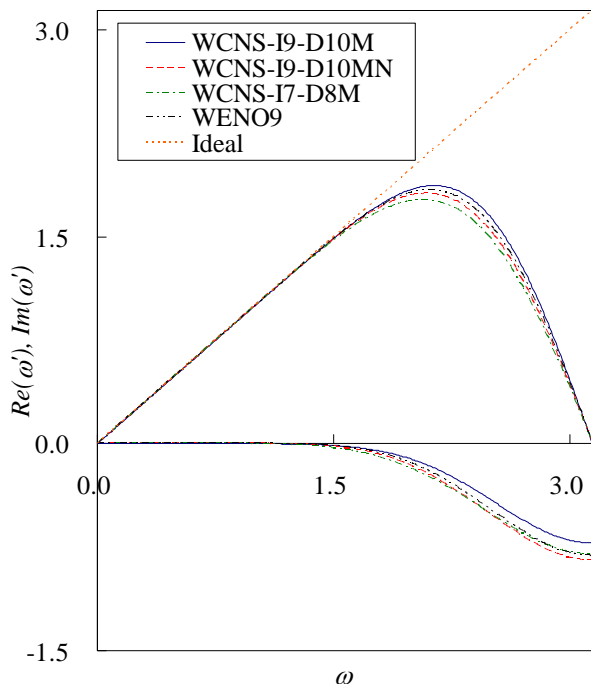


(b) 5th order WCNS



(c) 7th order WCNS

Fig. 1 Continued



(c)9th order WCNS
Fig. 1 Continued

3. 3 標準的な衝撃波問題

本節では標準的な衝撃波問題に WCNS-DM および WCNS-DMN を適用して、衝撃波厚さ、アンダー/オーバーシュートの大きさを比較する。

まず、以下の初期条件を持つ Sod 問題¹⁵ を解いた。

$$U(x, t=0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 0.5) \\ U_R & (x > 0.5) \end{cases} \quad (31)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 1)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

格子点数は 101 点とし、CFL 条件を 0.6 として $t=0.2$ まで解析した。WCNS-I7-D8M および WCNS-I7-D8MN の結果を Fig. 2 に示す。また接触面および衝撃波面の拡大図を Fig. 3 にしめす。WCNS-I7-D8MN のほうが衝撃波の厚さが厚いことがわかる。

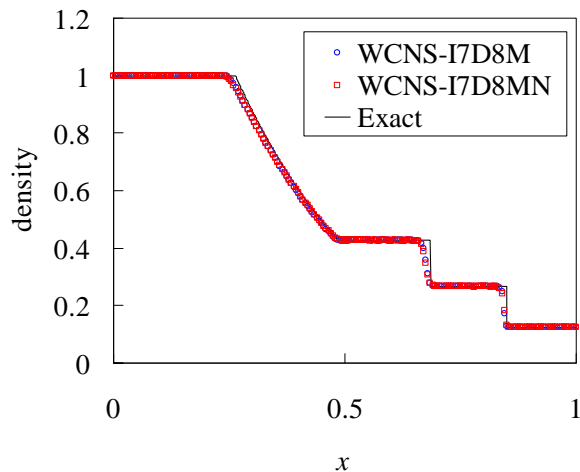
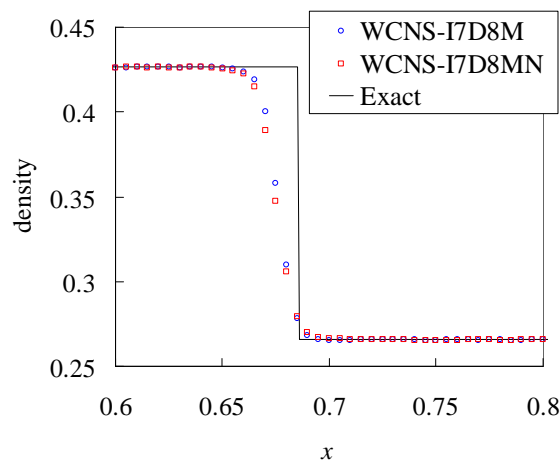
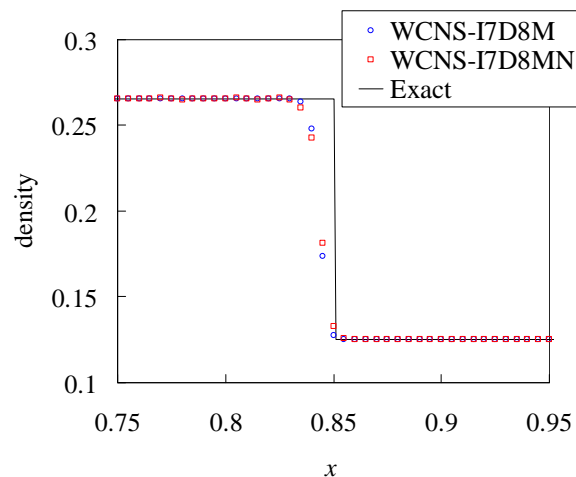


Fig. 2 Density distribution of Sod problem computed by 7th order WCNS



(a)Contact surface



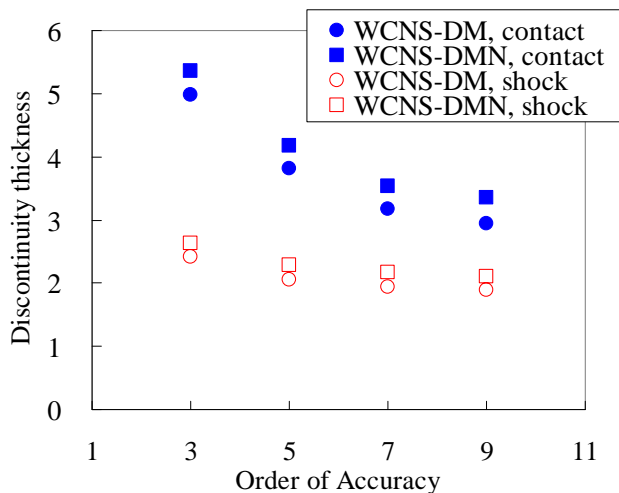
(b)Shock wave

Fig. 3 Enlarged figure of Fig.2

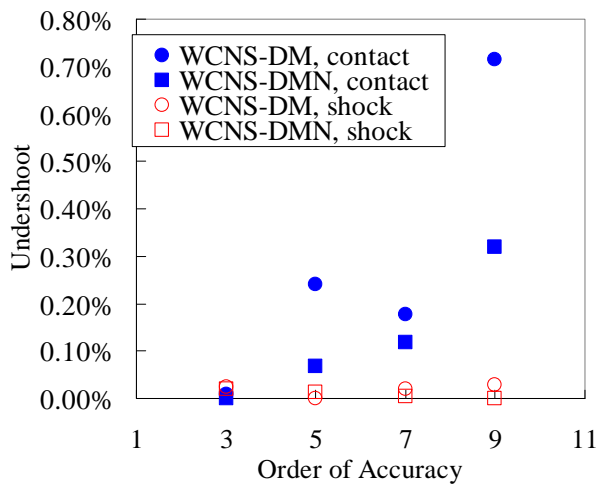
より定量的に、不連続での特性を議論するため $t=0.1$ から $t=0.2$ までの間において、不連続厚さ、アンダー/オーバーシュートを接触面および衝撃波において平均して比較する。ここで不連続厚さは、

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\max(|\rho_{j+1} - \rho_j|)} \quad (32)$$

と定義される。ここで、 $\Delta\rho$ は厳密解の不連続での値の変化値である。結果を Fig. 4 に示す。まず不連続厚さは WCNS-DM に比べ、WCNS-DMN のほうが厚くなっていることがわかる。これは、不連続に於いてより大きな数値粘性が加えられたためだと考えられる。次に、アンダー/オーバーシュートを見ると、WCNS-DMN はオーバーシュートは大きいものの、アンダーシュートを抑えていることがわかる。計算が破綻しやすいのは強い衝撃波のアンダーシュートであることから、WCNS-DMN はよりロバストであることが期待される。

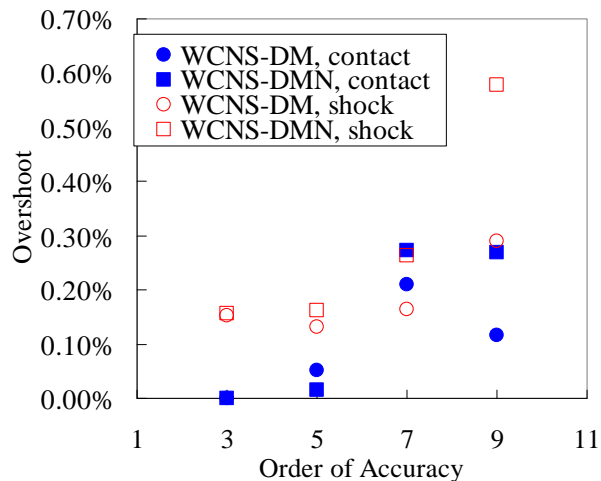


(a)Discontinuity thickness



(b)Undershoot

Fig. 4 Discontinuity thickness, under/overshoot in Sod problem.



(c)Overshoot

Fig. 4 Continued

次に以下の初期条件を持つ Lax 問題¹⁶を解いた。

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 0.5) \\ U_R & (x > 0.5) \end{cases} \quad (33)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (0.445, 0.698, 3.528)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (0.5, 0, 0.571)$$

$$0 \leq x \leq 1$$

格子点数は 100 点とし、CFL 条件を 0.6 として $t=0.13$ まで解析した。WCNS-I7-D8M および WCNS-I7-D8MN の結果を Fig. 5 に示す。また接触面および衝撃波面の拡大図を Fig. 6 にしめす。Sod 問題同様 WCNS-I7-D8MN のほうが衝撃波の厚さが厚いことがわかる。

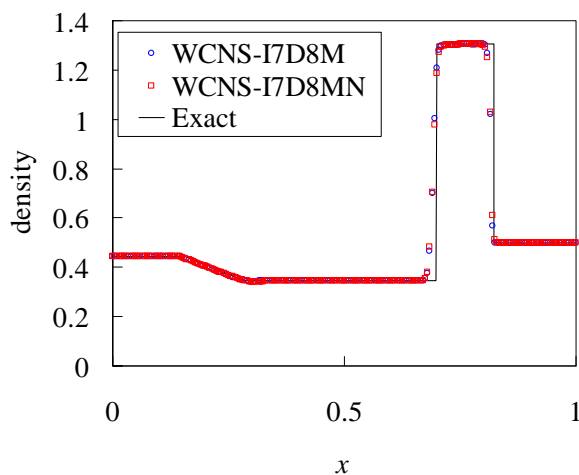
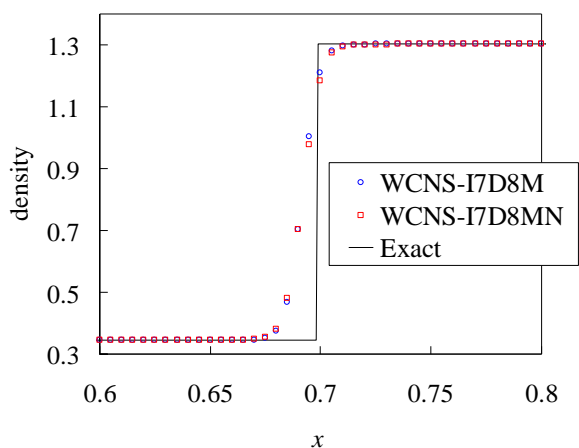
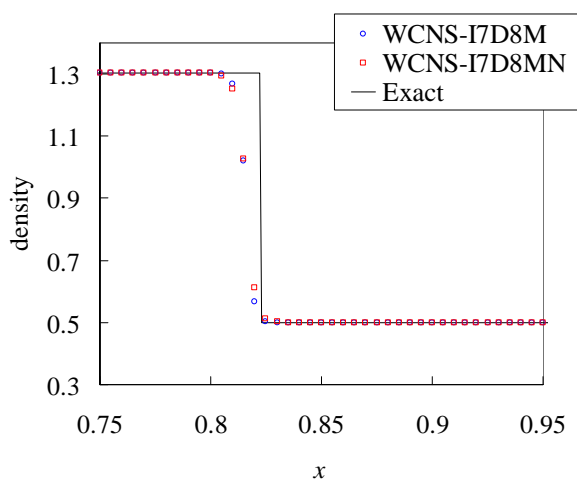


Fig. 5 Density distribution of Lax problem computed by 7th order WCNSs.



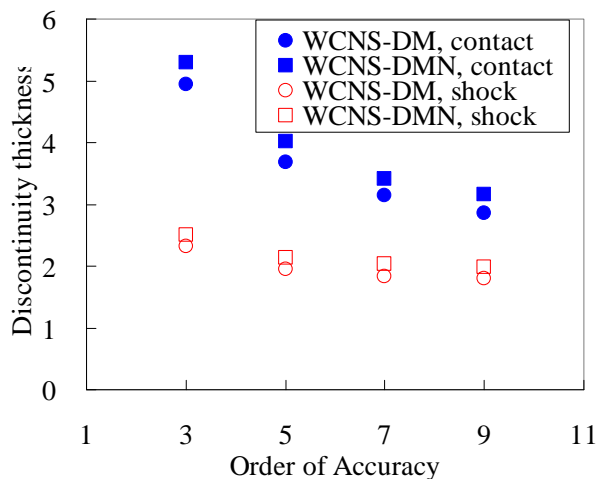
(a) contact surface



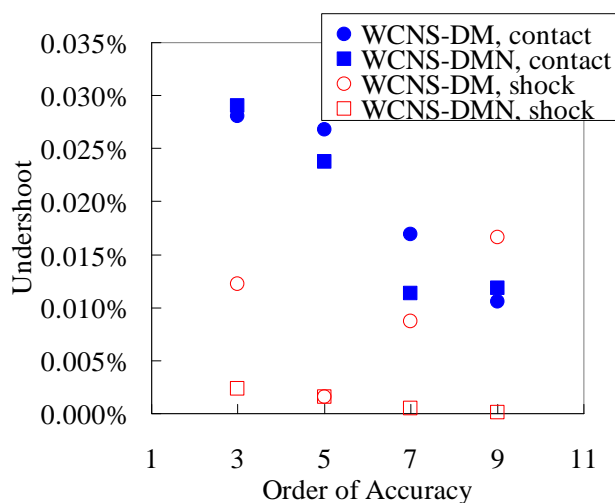
(b) Shock wave

Fig. 6 Enlarged view of Fig. 5

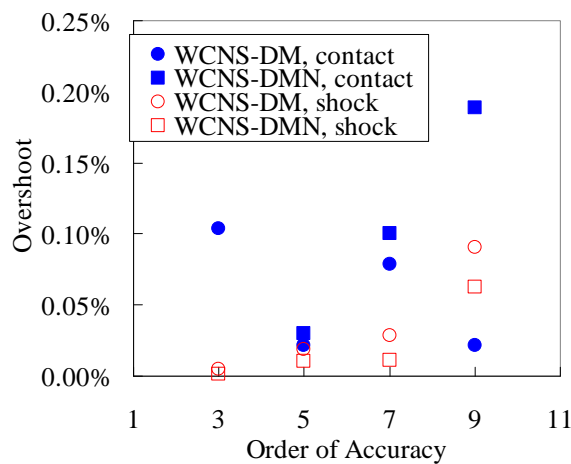
より定量的に、不連続での特性を議論するため $t=0.065$ から $t=0.13$ までの間において、不連続厚さ、アンダー/オーバーシュートを接触面および衝撃波において平均して議論する。結果を Fig. 7 に示す。まず不連続厚さは Sod 問題と同様 WCNS-DM に比べ、WCNS-DMN のほうが厚くなっていることがわかる。これは、不連続に於いてより大きな数値粘性が加えられたためだと考えられる。次に、アンダー/オーバーシュートを見ると、接触面のオーバーシュートは高次精度の時により大きくなるが、それ以外でのアンダー/オーバーシュートはほぼ同じか、小さくなることわかる。特に、本問題で生ずる強い衝撃波において、計算が破綻しやすいアンダーシュートが抑えられており、これがロバスト性向上につながると考えられる。



(a) Discontinuity thickness



(b) Undershoot



(c) Overshoot

Fig. 7 Discontinuity thickness, under/overshoot in Lax problem.

3. 4 高周波の解像度

本節では Shu-Osher 問題⁵に於いてスキームの高周波の波の解像度を議論する. Shu-Osher 問題は以下の初期条件で定義される.

$$U(x,t=0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 4) \\ U_R & (x > 4) \end{cases} \quad (34)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (3.857143, 2.629369, 10.3333)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (1 + 0.2 \sin(0.5\pi x), 0, 1)$$

$$0 \leq x \leq 10$$

CFL が 0.6 となるように時間刻みを決定し, $t=1.8$ まで計算した. WCNS-I7-D8M および WCNS-I7-D8MN の結果を Fig. 8 に示す. どちらも大きな数値振動を起こさずに計算ができていることがわかる. Figure 9 に拡大図を示す. 拡大図から, 新しい WCNS(WCNS-DMN)はオリジナルの WCNS よりも(WCNS-DM)よりも解像度が低くなるのがわかる. これは, 3.1 で説明したように, 数値粘性がより大きく加えられるためである.

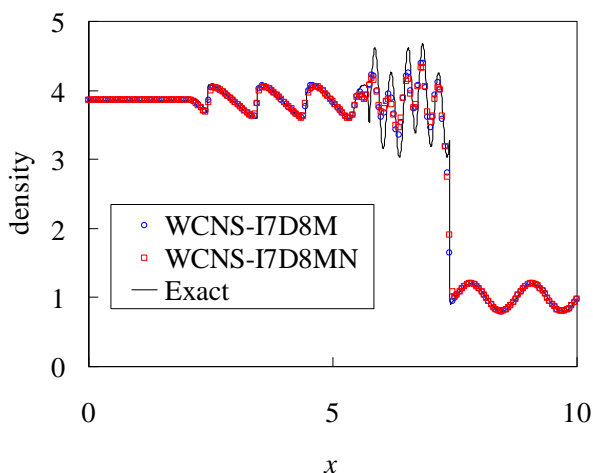
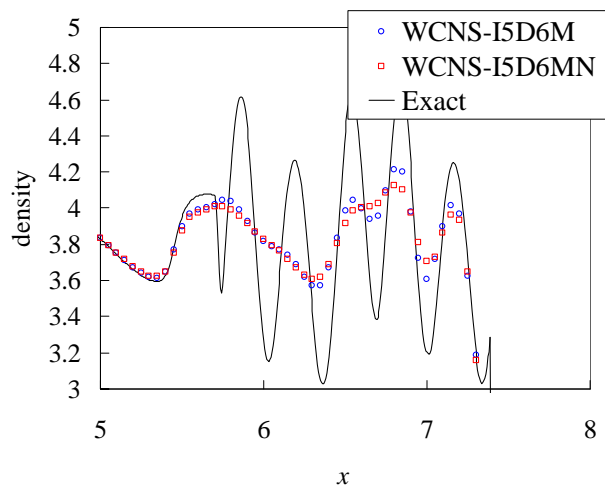
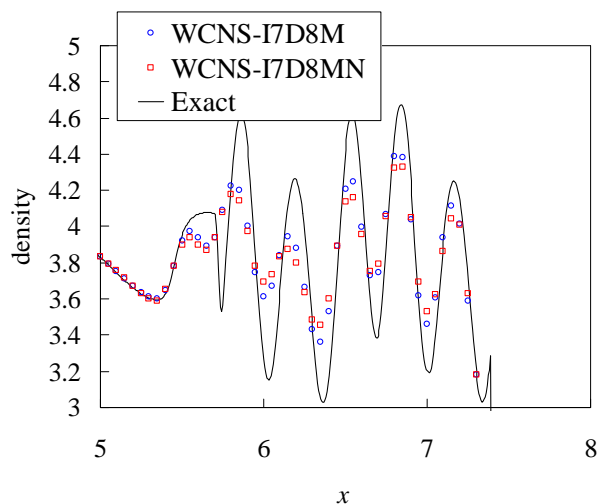


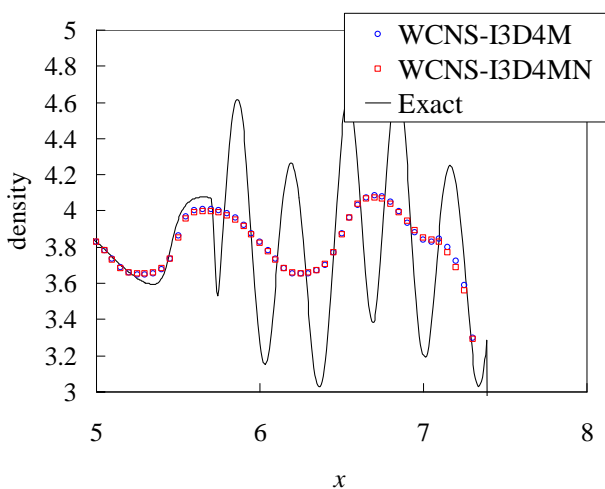
Fig. 8 Density distribution of Shu-Osher problem computed by 7th order WCNS



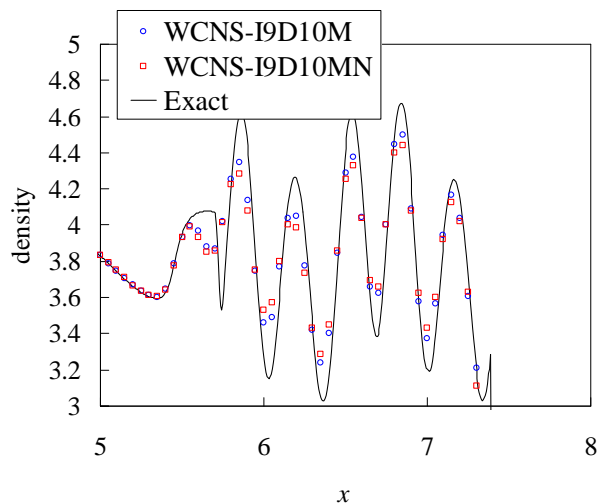
(b)5th order WCNS



(c)7th order WCNS



(a)3rd order WCNS



(d)9th order WCNS

Fig. 9 Enlarged figures of density distribution of Shu-Osher problem computed by WCNSs

Fig. 9 Continued

3. 5 より厳しい衝撃波問題

以下の初期条件のより厳しい衝撃波問題を解析した。

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 0.5) \\ U_R & (x > 0.5) \end{cases} \quad (35)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 0.1PR)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, p_R) = (1, 0, 0.1)$$

$$0 \leq x \leq 10$$

ここで、圧力比 $PR=10, 100, 1000, 10000, 100000$ のケースを扱った。CFL が 0.6 となるように時間刻みを決定した。計算が破綻するケースに関しては、より小さな時間刻みでも計算したが、破綻する時刻はおおよそ変化しなかった。

様々な精度の WCNS-DM と WCNS-DMN がこの問題を解けるかどうかを Table 3 にまとめた。緒言でも示したようにオリジナルの WCNS-DM では、 $PR=100$ で計算が 1 ステップでも破綻してしまう。一方で、WCNS-DMN では全てのケースで計算が安定にできることがわかった。このようなシビアな条件では、新しい WCNS の表式を用いることでより安定に計算ができることがわかった。

Figure 10 に $PR=100$ の時の WCNS-I7-D8M の 1 ステップ目 Runge-Kutta の 1 ステージ後の圧力分布を示す。不連続で圧力が負になっており、これが計算の破綻につながる。一方 WCNS-I7-D8MN ではこのような負の圧力は観察されておらず、Fig. 11 のように最後まで、破綻することなく計算できた。

Table 3 Computation of stiff shock tube problems. A circle denotes that problem is solved without blow-up and a cross denotes that the computation is blow-up.

Scheme	PR				
	10	100	1,000	10,000	100,000
WCNS-I3-D4M	○	×	×	×	×
WCNS-I5-D6M	○	×	×	×	×
WCNS-I7-D8M	○	×	×	×	×
WCNS-I9-D10M	○	×	×	×	×
WCNS-I3-D4M	○	○	○	○	○
WCNS-I5-D6M	○	○	○	○	○
WCNS-I7-D8M	○	○	○	○	○
WCNS-I9-D10M	○	○	○	○	○

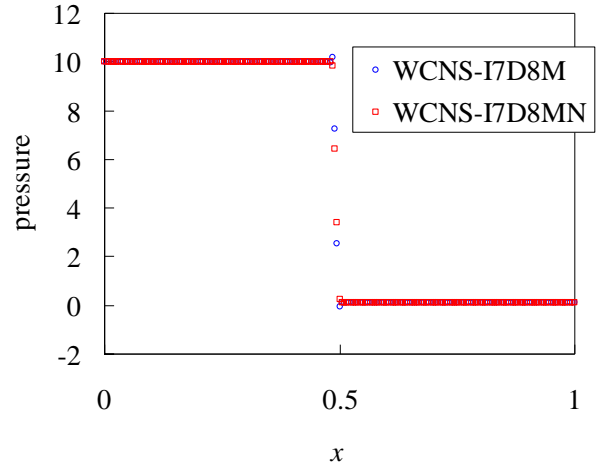


Fig. 10 Stiff shock tube problem with $PR=100$. Pressure distribution at 1st stage of 1st step.

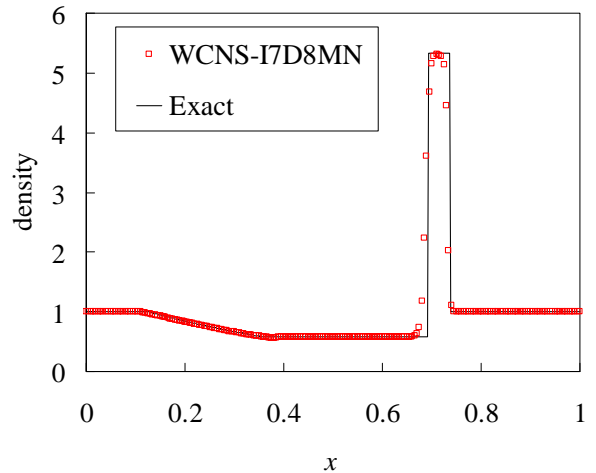


Fig. 11 Stiff shock tube problem with $PR=100$. Pressure distribution solved by WCNS-DMN at $t=0.1$.

この問題では、初期の数ステップで計算が破綻してしまう。初期の数ステップでは、不連続の厚さが非常に薄いためであると考えられる。そこで、次のように、初期解から不連続がある程度の厚さを持った状態で解析を始めた。ここで、不連続での分布は Kawai と Terashima の研究¹⁷を参考にした。

$$U(x, t = 0) = (1 - f_{smooth})U_L + f_{smooth}U_R \quad (36)$$

$$f_{smooth} = 0.5 + 0.5 * \operatorname{erf}\left(\frac{s}{C_s \Delta x}\right)$$

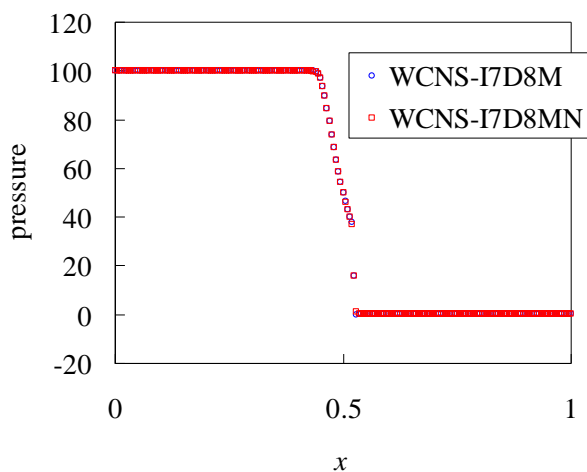
ここでも同様に、 $PR=10, 100, 1000, 10000, 100000$ のケースを解析した。様々な精度の WCNS-DM と WCNS-DMN がこの問題をとけるかどうかを Table 4 にまとめた。オリジナルの WCNS-DM は $PR=100$ まで解けるようになったが、 $PR=1000$ 以上の圧力比では計算が 30 ステップ程度までの間に破綻した。これらの問題では、初期に不連続を滑らかにしていても、衝撃波が非常に強いため衝撃波付近で不連続が薄くなっていき、その後負圧が観測されるようである。当然ではあるが、シャープな初期条件と同様に WCNS-DMN では破綻することなく計算が終了した。

Figure 12 に $PR=100$ の時の WCNS-I7-D8M の計算が破綻する直前の圧力分布を示す。衝撃波の前方で圧力が負になっており、これが計算の破綻につながる。一方 WCNS-I7-D8MN ではこのよう

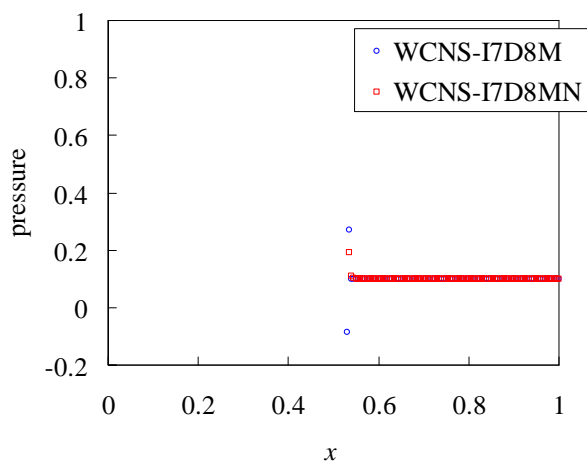
な負の圧力は観察されておらず, Fig. 13 のように最後まで, 破綻することなく計算できた.

Table 4 Computation of stiff shock tube problems with smoothed initial condition. A circle denotes that problem is solved without blow-up and a cross denotes that the computation is blow-up.

Scheme	PR				
	10	100	1,000	10,000	100,000
WCNS-I3-D4M	○	○	×	×	×
WCNS-I5-D6M	○	○	×	×	×
WCNS-I7-D8M	○	○	×	×	×
WCNS-I9-D10M	○	○	×	×	×
WCNS-I3-D4M	○	○	○	○	○
WCNS-I5-D6M	○	○	○	○	○
WCNS-I7-D8M	○	○	○	○	○
WCNS-I9-D10M	○	○	○	○	○



(a) Entire view



(b) Enlarged view for negative pressure computed by WCNS-I7-D8M.

Fig. 12 Stiff shock tube problem with PR=1000 and smoothed initial condition. Pressure distribution before blow up of WCNS-DM.

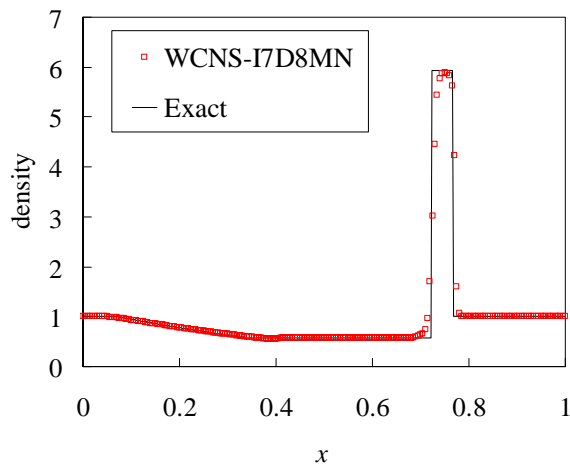


Fig. 13 Stiff shock tube problem with PR=1000 and smoothed initial condition. Pressure distribution solved by WCNS-DMN at $t=0.036$.

3. 6 2次元衝撃波問題

以下の Woodward と Collela の問題¹⁸を解析した.

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & (x - y * \tan(\frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{6}) \\ U_R & (x - y * \tan(\frac{\pi}{3}) > \frac{1}{6}) \end{cases} \quad (37)$$

$$U_L = (\rho_L, u_L, v_L, p_L) = (8.0, 1.516, -0.8751, 116.5)$$

$$U_R = (\rho_R, u_R, v_R, p_R) = (1.4, 0, 0.1)$$

$$0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$$

ここで $y=0, x>1/6$ において壁面となる. ここでは滑り有り壁を模擬するため, 仮想格子点を用いて反射条件を課した. また, 上側の境界条件では衝撃波の動きに合わせて厳密解を与えた. 本問題では, Roe の FDS では衝撃波不安定が生じたため流束評価に SLAU(Simple Low-dissipative AUSM)¹⁹を用いた. 時間刻みは CFL が 0.6 となるように決定した.

この問題では, 緒言で議論した Q^L, Q^R を求めた際にも負圧が観測されて計算が破綻することがあったため, このような場合 1 次精度に落とすことにしている.

この計算を行うと, オリジナルの WCNS では 1 ステップ目で更新した後の流体量が負圧となるため²⁰に計算が破綻する.

これに対して, WCNS-DMN では計算が破綻することなく終了した. 結果を Fig. 14 に示す.

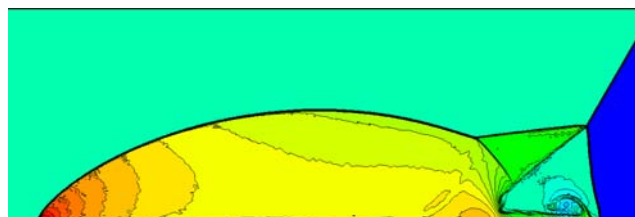


Fig. 14 Double Mach reflection problem solved by WCNS-I7-D8MN.

以上のように、WCNS-DMN とすることでより堅牢な高次精度スキームが構成できた。

4. 議論

本論では、ノード点の流束も活用する WCNS-DMN を導入し、その利点であるロバスト性と欠点である散逸的になる効果を議論した。この新しいスキームを導入する利点欠点をここで議論する。

WCNS は WENO に比べ、1) 解像度が高い^{1,3}、2) 様々な流束評価法が使える¹、3) 曲線座標系で一樣流保持ができる⁴、という利点があったが、WCNS-DMN にすることによって、1) の解像度が高いという利点は無くなる。一方で、2) 様々な流束評価法が使える¹、3) 曲線座標系で一樣流保持ができる⁴、といった利点は残ったままであり、実用計算での使用する際には WENO に比べて非常に良い特性であるといえる。

また計算コストに関しては、ノード点での流束の計算は特に近似リーマン解法等を必要としないため、オリジナルの WCNS と比べほぼ変わらない。

さらに、緒言では述べなかったが、オリジナルの WCNS では、使用するステンシルが非常に大きく、多くの点で境界スキームを用いなければならず、実装が手間であったが、新しい WCNS-DMN はよりコンパクトなステンシルとなり、境界条件の実装の手間や、並列化した場合に重ねあわせる点数を減らすことができると考えられる。

一方で、本論で示したようにスキームの解像度は落ちるため、注意が必要となる。

5. 結論

新しい差分式を導入し、より堅牢な WCNS の構築に成功した。新しい WCNS は衝撃波のアンダーシュートを抑えており、これにより堅牢になると考えられる。特にオリジナルの WCNS では解けなかった Stiff な衝撃波問題でも安定して解けることがわかった。

一方でこの表式を用いるとスキームの解像度は落ちてしまう。ただし、新しい(2r-1)次精度の WCNS は従来の(2r-3)次精度の WCNS よりも高い解像度であること、および新しい(2r-1)次精度の WCNS が(2r-1)次精度の WENO とほぼ同様の解像度であることを確認した。

最後に実問題に近い例として、7 次精度で Double Mach Reflection 問題を解いた。補間時の負圧の補正も入れることで、破綻することなしに解けることを確認した。

以上のように、本論文で導入した新しい WCNS はオリジナルと比べて堅牢なスキームとなった。新しい WCNS は WENO に比べた際の解像度が高いという利点は失ったものの、2) 様々な流束評価法が使える¹、3) 曲線座標系で一樣流保持ができる⁴といった利点は変わらず持っており、曲線座標かつ強い衝撃波が存在する問題などでの適用が考えられる。

謝辞

JAXA 石向桂一氏には研究に対するコメントを頂いた。ここに記して感謝する。

A. 補遺

非線形補間における係数を示す。これらは Nonomura et al.⁶ が示したものであるが、参考文献内⁶ に係数の間違いが合ったため、ここで改めて示す。

Table A.1 $a^1_{k,l}$ of third order ($r=2$) WCNS.

	a^1_{k1}	a^1_{k2}
$k=1$	-1	1
$k=2$	-1	1

Table A.2 $a^1_{k,l}$ of fifth order ($r=3$) WCNS.

	a^1_{k1}	a^1_{k2}	a^1_{k3}
$k=1$	1/2	-2	3/2
$k=2$	-1/2	0	1/2
$k=3$	-3/2	2	-1/2

Table A.3 $a^2_{k,l}$ of fifth order ($r=3$) WCNS.

	a^2_{k1}	a^2_{k2}	a^2_{k3}
$k=1$	1	-2	1
$k=2$	1	-2	1
$k=3$	1	-2	1

Table A.4 $a^1_{k,l}$ of seventh order ($r=4$) WCNS.

	a^3_{k1}	a^3_{k2}	a^3_{k3}	a^3_{k4}
$k=1$	-1/3	3/2	-3	11/6
$k=2$	1/6	-1	1/2	1/3
$k=3$	-1/3	-1/2	1	-1/6
$k=4$	-11/6	3	-3/2	1/3

Table A.5 $a^2_{k,l}$ of seventh order ($r=4$) WCNS.

	a^3_{k1}	a^3_{k2}	a^3_{k3}	a^3_{k4}
$k=1$	-1	4	-5	2
$k=2$	0	1	-2	1
$k=3$	1	-2	1	0
$k=4$	2	-5	4	-1

Table A.6 $a^3_{k,l}$ of seventh order ($r=4$) WCNS

	a^3_{k1}	a^3_{k2}	a^3_{k3}	a^3_{k4}
$k=1$	-1	3	-3	1
$k=2$	-1	3	-3	1
$k=3$	-1	3	-3	1
$k=4$	-1	3	-3	1

Table A.7 $a^1_{k,l}$ of ninth order ($r=5$) WCNS.

	a^3_{k1}	a^3_{k2}	a^3_{k3}	a^3_{k4}	a^3_{k5}
$k=1$	1/4	-4/3	3	-4	25/12
$k=2$	-1/12	1/2	-3/2	5/6	1/4
$k=3$	1/12	-2/3	0	2/3	-1/12
$k=4$	-1/4	-5/6	3/2	-1/2	1/12
$k=5$	-25/12	4	-3	4/3	-1/4

Table A.8 $a_{k,l}^2$ of ninth order ($r=5$)WCNS.

	$a_{k,1}^2$	$a_{k,2}^2$	$a_{k,3}^2$	$a_{k,4}^2$	$a_{k,5}^2$
$k=1$	11/12	-14/3	19/2	-26/3	35/12
$k=2$	-1/12	1/3	1/2	-5/3	11/12
$k=3$	-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12
$k=4$	11/12	-5/3	1/2	1/3	-1/12
$k=5$	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12

Table A.9 $a_{k,l}^3$ of ninth order ($r=5$)WCNS.

	$a_{k,1}^3$	$a_{k,2}^3$	$a_{k,3}^3$	$a_{k,4}^3$	$a_{k,5}^3$
$k=1$	3/2	-7	12	-9	5/2
$k=2$	1/2	-3	6	-5	3/2
$k=3$	-1/2	1	0	-1	1/2
$k=4$	-3/2	5	-6	3	-1/2
$k=5$	-5/2	9	-12	7	-3/2

Table A.10 $a_{k,l}^4$ of ninth order ($r=5$)WCNS.

	$a_{k,1}^4$	$a_{k,2}^4$	$a_{k,3}^4$	$a_{k,4}^4$	$a_{k,5}^4$
$k=1$	1	-4	6	-4	1
$k=2$	1	-4	6	-4	1
$k=3$	1	-4	6	-4	1
$k=4$	1	-4	6	-4	1
$k=5$	1	-4	6	-4	1

Table A.11 C_k of third order ($r=2$)WCNS.

C_1	C_2
1/4	3/4

Table A.12 C_k of fifth order ($r=3$)WCNS.

C_1	C_2	C_3
1/16	10/16	5/16

Table A.13 C_k of seventh order ($r=4$)WCNS.

C_1	C_2	C_3	C_4
1/64	21/64	35/64	7/64

Table A.14 C_k of ninth order ($r=5$)WCNS.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
1/256	36/256	126/256	84/256	9/256

参考文献

(1) Deng, X. G and Zhang, H., "Developing High-order Weighted Compact Nonlinear Schemes," Journal of Computational Physics, 165, (2000), pp.22-44.
(2) Nonomura, T., Iizuka, N. and Fujii, K., "Increasing Order of Accuracy of Weighted Compact Nonlinear Schemes," AIAA Paper 2007-893, (2007).
(3) Zhang, S., Jiang, S. and Shu, C.-W., "Development of Nonlinear Weighted Compact Schemes with Increasingly Higher Order Accuracy" Journal of Computational Physics, 227, (2008), pp.7294-7321.
(4) Lele, S. K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution," Journal of Computational Physics, 103(1992), pp. 16-42
(5) Jiang, G-S. and Shu, C.-W., "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes", Journal of Computational Physics, 126,

(1996), pp. 200-212
(6) Nonomura, T., Iizuka, N. and Fujii, K., "Freestream and Vortex Preservation Properties of High-order WENO and WCNS on Curvilinear Grids," Computers & Fluids, 39, (2010), pp. 197-214.
(7) Xu, Z.; Liu, Y. and Shu, C.-W., "Hierarchical Reconstruction for Discontinuous Galerkin Methods on Unstructured Grids with a WENO-type Linear Reconstruction and Partial Neighboring Cells," Journal, Vol.228, (2009), pp. 2194-2212.
(8) Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter vectors, and Difference Schemes," Journal of Computational Physics, 43, (1982), pp357-372.
(9) van Leer, B., "Flux Vector Splitting for the Euler Equations," ICASE Report 82-293 (1982).
(10) Liou, M-S. and Steffen, C.J., "A New Flux Splitting Scheme," Journal of Computational Physics, 107, (1993), pp357.
(11) Harten, A., Lax, P.D. and van Leer, B., "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws," SIAM Review. 25 (1983), pp 35-61.
(12) Nonomura, T., and Fujii, K., "Effects of Difference Scheme Type in High-order Weighted Compact Nonlinear Schemes," Journal of Computational Physics 228, (2009), pp. 3533-3539.
(13) Kudryavtsev, A. N. and Khotyanovsky, D.V., "Application of WENO Schemes for Numerical Simulations of High Speed Flows," Book of Abstracts of International Conference on Computational Fluid Dynamics, (2006), pp. 303.
(14) Gottlieb, S. and Shu, C.-W., "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes, Mathematics of Computation 67 (1998), pp. 73-85
(15) Sod, G.A., "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," Journal of Computational Physics 27, (1978), pp. 1-31.
(16) Lax, P. D., "Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7, (1954), 159-193.
(17) Kawai, S. and Terashima, H., "A High-resolution Scheme for Compressible Multicomponent Flows with Shock Waves," International Journal of Numerical Methods in Fluids, 2010.
(18) Woodward P. and Collella P., "The Numerical Simulation of Two Dimensional Fluid with Strong Shock," Journal of Computational Physics, 54, (1984), pp.115-173.
(19) Shima, E. & Kitamura, K., "On AUSM-Family Scheme for All Speeds with Shock Detection for Carbuncle-Fix," AIAA Paper 2009-3544.