

高次精度差分スキームにおける 3 次元移動変形格子での 幾何学的保存則を満たすメトリックの評価方法

Metric evaluation for higher-order finite difference scheme with geometric conservation law on
three-dimensional moving and deforming mesh

- 阿部 圭晃, 東大院, 〒 229-8510 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail : abe@flab.isas.jaxa.jp
飯塚 宣行, 東大, 〒 229-8510 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail : iizuka@flab.isas.jaxa.jp
野々村 拓, ISAS/JAXA, 〒 229-8510 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail : nonomura@flab.isas.jaxa.jp
藤井 孝藏, ISAS/JAXA, 〒 229-8510 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail : fujii@flab.isas.jaxa.jp

Yoshiaki ABE, University of Tokyo, Sagamihara, Kanagawa, Japan

Nobuyuki IIZUKA, University of Tokyo, Sagamihara, Kanagawa, Japan

Taku NONOMURA, Institute of Space and Astronautical Science, JAXA, Sagamihara, Kanagawa, Japan

Kozo FUJII, Institute of Space and Astronautical Science, JAXA, Sagamihara, Kanagawa, Japan

As is well known, on three-dimensional moving and deforming meshes, the use of standard evaluation for metric and Jacobian causes fatal errors in terms of freestream preservation. In this paper, to avoid this error, new conservative forms are introduced for metric and Jacobian, which satisfy the geometric conservation law (:GCL) identity even when high-order spatial discretization is employed for the moving and deforming meshes. Using these new forms for the computation of the uniform flow, the conservative quantities are ensured to keep constant for three-dimensional moving and deforming meshes. In addition, one of the new forms has spatial symmetry, and some tests indicate the significance of the spatial symmetry in the expression of metric and Jacobian.

1. はじめに

圧縮性流れの数値計算において境界適合移動変形格子を用いる際、計算空間と物理空間の座標変換に対して定義されるメトリックとヤコビアンは GCL (幾何学的保存則) (8) を満足する事が要請される。GCL はさらに SCL (面積保存則) と VCL (体積保存則) に分けられる (11)(5)。古くは有限体積法的な観点から、GCL を満足する為適切なメトリックとヤコビアンの離散化手法 (9)(3) を得ていたが、空間的に高次精度の差分を用いる場合には精度が十分ではない。空間メトリックに関しては、空間的に高次精度の差分を用いる場合であっても SCL を満足するような評価方法 (8) が提案されている。また、空間的に高次精度な差分を用いて移動変形格子問題を解く為に、支配方程式をヤコビアンに関して非保存形式となるように書き換える手法 (10) が提案されている。この手法は支配方程式の変形に際し、陽的に VCL の式を用いてヤコビアンの時間変化量を空間メトリックの時間変化量と釣り合うように与えている為、支配方程式を解く段階で VCL を満足している。しかし、上記のような評価を行う為、ヤコビアン自体の値とその時間変動量には齟齬が生じる。すなわち、各時間における時間メトリックとヤコビアンの値は VCL を満足するように変化しない為、例えば閉じた領域における流体の保存量の総和が厳密に保存しないという問題点が挙げられる。

本研究では、常に VCL を満足するような時間メトリックとヤコビアンの新しい評価方法を提案した。また、空間的に高次精度の差分を用いて SCL を満足する空間メトリックの表式について、その派生型として空間方向の対称性を考慮した表式を示した。同様に、新しい時間メトリックとヤコビアンの派生型として空間方向の対称性を考慮した表式を示した。また、新しく提案した時間メトリックとヤコビアンを用いた際の保存量の保存特性を調べるため、初期解に 1 様流を用いた検証計算を行った。さらに、等エントロピー渦を初期解に用いた解像度に関する検証計算により、メトリックとヤコビアンの空間対称性と支配方程式の時間方向離散化という観点から従来のスキームとの比較を 6 次精度コンパクト差分 (4) を用いて行った。

2. 計算座標系と支配方程式

ここでは物理座標系と一般座標系 (計算座標系) の導入を行う。まず、物理空間における時間と物理座標成分

を t, x, y, z , 計算空間での時間と一般座標成分を τ, ξ, η, ζ と定義し、これらの間に

$$\tau = t, \quad (1)$$

$$\xi = \xi(t, x, y, z), \eta = \eta(t, x, y, z), \zeta = \zeta(t, x, y, z), \quad (2)$$

$$x = x(\tau, \xi, \eta, \zeta), y = y(\tau, \xi, \eta, \zeta), z = z(\tau, \xi, \eta, \zeta), \quad (3)$$

なる関係を仮定する。ここで、 $\partial\xi/\partial x = \xi_x$ のように書くと、時間メトリック ξ_t と空間メトリック ξ_x, η_x, ζ_x は

$$\begin{aligned} \xi_t/J &= x_{\eta}y_tz_{\zeta} - x_{\eta}y_{\zeta}z_t + x_{\zeta}y_{\eta}z_t \\ &\quad - x_{\zeta}y_tz_{\eta} + x_t y_{\zeta} z_{\eta} - x_t y_{\eta} z_{\zeta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\xi_x/J = x_{\eta}y_{\zeta} - x_{\zeta}y_{\eta}, \quad (5)$$

$$\eta_x/J = x_{\zeta}y_{\xi} - x_{\xi}y_{\zeta}, \quad (6)$$

$$\zeta_x/J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}, \quad (7)$$

と導かれる。なお J は変換のヤコビアンであり、具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} 1/J &\equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \\ &= x_{\xi}y_{\eta}z_{\zeta} - x_{\eta}y_{\xi}z_{\zeta} + x_{\zeta}y_{\xi}z_{\eta} \\ &\quad - x_{\xi}y_{\zeta}z_{\eta} + x_{\eta}y_{\zeta}z_{\xi} - x_{\zeta}y_{\eta}z_{\xi}, \end{aligned} \quad (8)$$

のように表現される。

圧縮性 Euler 方程式は物理座標系を用いて以下のように表現され、これに気体の状態方程式を加えて方程式系が閉じる。ここで $\mathbf{u} = (u, v, w), e, p$ はそれぞれ、物理空間における流速、単位体積当たりの全エネルギー、圧力であり、方程式中の変数は基準長、基準状態における密

度と音速によって無次元化されている。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ (e+p)w \end{bmatrix}.$$

以上の支配方程式は、一般座標系を用いて以下のように表現される。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = 0, \quad (10)$$

$$\hat{Q} = \frac{Q}{J}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e+p)U - \xi_t p \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e+p)V - \eta_t p \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e+p)W - \zeta_t p \end{bmatrix},$$

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w,$$

$$V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w,$$

$$W = \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w.$$

3. メトリックとヤコビアン の 離散化方法

3.1 幾何学的保存則を満足するメトリックとヤコビアン

一般座標系で記述された支配方程式は解析的には保存則を満たす形式であるが、物理座標系からの座標変換によって生じた項を適切な差分法の下に離散化しなければ、その過程で保存則が破られ正しく数値計算を行えない。適切な離散化を行うにあたり、1 様流保存性を維持する事を基にした評価方法⁽⁸⁾が知られている。その際、メトリックとヤコビアンは以下の恒等式で表現される幾何学的保存則 (Geometric Conservation Law: GCL) を満たす事が必要である。

$$(1/J)_\tau + (\xi_t/J)_\xi + (\eta_t/J)_\eta + (\zeta_t/J)_\zeta = 0, \quad (11)$$

$$(\xi_x/J)_\xi + (\eta_x/J)_\eta + (\zeta_x/J)_\zeta = 0, \quad (12)$$

$$(\xi_y/J)_\xi + (\eta_y/J)_\eta + (\zeta_y/J)_\zeta = 0, \quad (13)$$

$$(\xi_z/J)_\xi + (\eta_z/J)_\eta + (\zeta_z/J)_\zeta = 0, \quad (14)$$

特に、式 (12) から (14) は SCL (Surface Conservation Law), 式 (11) は VCL (Volume Conservation Law) とも呼ばれる⁽¹¹⁾。古くは有限体積法的な観点から GCL を満足するようなメトリックとヤコビアン の 離散化手法⁽⁹⁾が提案されたが、差分方法に依存する手法であり、特に空間的に高次精度の差分を用いる際には適当ではない。

そこで、差分方法に依らず、尚且つ高次精度の空間差分に対しても VCL の式 (11) を常に満足するような離散化を行う為、時間メトリックとヤコビアンを以下のような新しい表式に書き直す。

$$\xi_t/J = \underbrace{[(x_\tau y)_\zeta - (x_\zeta y)_\tau] z}_D + \underbrace{[(x_\eta y)_\tau - (x_\tau y)_\eta] z}_E + \underbrace{[(x_\zeta y)_\eta - (x_\eta y)_\zeta] z}_C, \quad (15)$$

$$\eta_t/J = \underbrace{[(x_\tau y)_\xi - (x_\xi y)_\tau] z}_F + \underbrace{[(x_\xi y)_\zeta - (x_\zeta y)_\xi] z}_B + \underbrace{[(x_\zeta y)_\tau - (x_\tau y)_\zeta] z}_D, \quad (16)$$

$$\zeta_t/J = \underbrace{[(x_\eta y)_\xi - (x_\xi y)_\eta] z}_A + \underbrace{[(x_\tau y)_\eta - (x_\eta y)_\tau] z}_E + \underbrace{[(x_\xi y)_\tau - (x_\tau y)_\xi] z}_F, \quad (17)$$

$$1/J = \underbrace{[(x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi] z}_A + \underbrace{[(x_\zeta y)_\xi - (x_\xi y)_\zeta] z}_B + \underbrace{[(x_\eta y)_\zeta - (x_\zeta y)_\eta] z}_C. \quad (18)$$

これらの表式を基に離散化を行えば、差分方法に依らず常に VCL の式 (11) を満足する事を X.Deng et al.⁽²⁾に倣って以下のように示せる。まず、ある時刻 $\tau_i = i\Delta\tau$ における任意の物理量 $\phi(\tau_i, \xi_j, \eta_k, \zeta_l)$ を物理空間で $\phi_{i,j,k,l}$ と離散化する。この物理量に関する複数回微分を差分で近似する際のオペレータを次のように導入する。なお、ここでの微分には空間微分だけでなく、時間方向の微分も含まれる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \phi(\tau_i, \xi_j, \eta_k, \zeta_l) \right) \simeq \delta_1^\xi (\delta_2^\eta \phi)_{i,j,k,l}. \quad (19)$$

ここで、オペレータの下付きの数字は外側から数えて何重目の微分であるかを意味し、上付きの文字はどの変数に関する微分であるかを意味する。このオペレータを用いると、VCL の式 (11) 左辺に時間メトリック (15),(16),(17) とヤコビアン (18) を代入して次のように整理出来る。なお、簡便の為に物理量の下付き添字 (i, j, k, l) は省略した。

$$\begin{aligned} & \delta_1^\tau (1/J) + \delta_1^\xi (\xi_t/J) + \delta_1^\eta (\eta_t/J) + \delta_1^\zeta (\zeta_t/J) \\ &= \delta_1^\tau (\delta_2^\xi A + \delta_2^\eta B + \delta_2^\zeta C) + \delta_1^\xi (\delta_2^\eta D + \delta_2^\zeta E - \delta_2^\tau C) \\ & \quad + \delta_1^\eta (\delta_2^\xi F - \delta_2^\zeta B - \delta_2^\xi D) + \delta_1^\zeta (-\delta_2^\tau A - \delta_2^\xi E - \delta_2^\eta F). \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、A から F は時間メトリック (15),(16),(17) とヤコビアン (18) の各被微分項に対応する。さて、VCL の式 (11) が常に成立するには、以下の関係が必要である。

$$\delta_1^\tau \delta_2^\xi = \delta_1^\xi \delta_2^\tau, \quad \delta_1^\tau \delta_2^\eta = \delta_1^\eta \delta_2^\tau, \quad \delta_1^\tau \delta_2^\zeta = \delta_1^\zeta \delta_2^\tau, \quad (21)$$

$$\delta_1^\xi \delta_2^\eta = \delta_1^\eta \delta_2^\xi, \quad \delta_1^\xi \delta_2^\zeta = \delta_1^\zeta \delta_2^\xi, \quad \delta_1^\eta \delta_2^\zeta = \delta_1^\zeta \delta_2^\eta. \quad (22)$$

式 (21),(22) がどのような差分の下でも成立するかどうかは自明ではない。以下では $\delta_1^\tau \delta_2^\eta = \delta_1^\eta \delta_2^\tau$ の成立に関して

議論を行う。まず、時間・空間方向差分オペレータを一般的に以下のように定義する。

$$\delta_1^T = \sum_{m=L_a}^{M_a} a_m (\phi_{i+m+1,j,k,l} - \phi_{i+m,j,k,l}), \quad (23)$$

$$\delta_1^\eta = \sum_{m=L_b}^{M_b} b_m (\phi_{i,j,k+m+1,l} - \phi_{i,j,k+m,l}), \quad (24)$$

$$\delta_2^T = \sum_{m=L_c}^{M_c} c_m (\phi_{i+m+1,j,k,l} - \phi_{i+m,j,k,l}), \quad (25)$$

$$\delta_2^\eta = \sum_{m=L_d}^{M_d} d_m (\phi_{i,j,k+m+1,l} - \phi_{i,j,k+m,l}). \quad (26)$$

この表記を用いると、

$$\begin{aligned} \delta_1^T \delta_2^\eta &= \sum_{m=L_a}^{M_a} a_m \left[\sum_{n=L_d}^{M_d} d_n (\phi_{i+m+1,j,k+n+1,l} - \phi_{i+m+1,j,k+n,l}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=L_d}^{M_d} d_n (\phi_{i+m,j,k+n+1,l} - \phi_{i+m,j,k+n,l}) \right] \\ &= \sum_{m=L_a}^{M_a} \sum_{n=L_d}^{M_d} \{ a_m d_n (\phi_{i+m+1,j,k+n+1,l} - \phi_{i+m+1,j,k+n,l} \\ &\quad - \phi_{i+m,j,k+n+1,l} + \phi_{i+m,j,k+n,l}) \}, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1^\eta \delta_2^T &= \sum_{m=L_b}^{M_b} b_m \left[\sum_{n=L_c}^{M_c} c_n (\phi_{i+m+1,j,k+n+1,l} - \phi_{i+m,j,k+n+1,l}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=L_c}^{M_c} c_n (\phi_{i+m+1,j,k+n,l} - \phi_{i+m,j,k+n,l}) \right] \\ &= \sum_{m=L_b}^{M_b} \sum_{n=L_c}^{M_c} \{ b_m c_n (\phi_{i+m+1,j,k+n+1,l} - \phi_{i+m+1,j,k+n,l} \\ &\quad - \phi_{i+m,j,k+n+1,l} + \phi_{i+m,j,k+n,l}) \}, \quad (28) \end{aligned}$$

と書き下せるので、少なくとも以下の条件の時には所望の関係式が恒等的に成立する。

$$\begin{aligned} a_m &= c_m, \quad d_m = b_m \\ M_a &= M_c, \quad L_a = L_c, \quad M_d = M_b, \quad L_d = L_b. \quad (29) \end{aligned}$$

この時、 $\delta_1^T = \delta_2^T$ かつ $\delta_1^\eta = \delta_2^\eta$ である。上記の条件は複数回の差分を取る場合に各方向毎に差分方法を同一にする事を要請しているのであって、差分方法自体への要請ではない。すなわち、時間・空間差分方法自体にはどのようなものを用いても構わない事を意味している。以上の議論は式(21),(22)の他の関係式にも適用する事が出来る。

空間メトリックについては、差分方法に依らず、尚且つ高次精度の空間差分に対しても SCL を常に満足するような離散化手法として以下のような表式⁽⁸⁾を離散化する

事が提案されている。

$$\xi_z/J = (x_\eta y)_\zeta - (x_\zeta y)_\eta, \quad (30)$$

$$\eta_z/J = (x_\zeta y)_\xi - (x_\xi y)_\zeta, \quad (31)$$

$$\zeta_z/J = (x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi. \quad (32)$$

ここでは z 方向の空間メトリックのみを記した。同様の表式を用いて式(13),(14)を満足するように空間メトリックを離散化する事が可能である。なお、式(22)を満たす時、式(30),(31),(32)が任意の空間差分方法の下で SCL を満足する事は容易に示せる⁽²⁾。

以下では、このように差分方法に依らず常に GCL を満足するようなメトリックとヤコビアン⁽⁸⁾の解析的な表式を完全保存型の表式と呼ぶ。またこれに対し、従来の表式(5),(6),(7),(8)を非保存型の表式と呼ぶ。

3.2 メトリックとヤコビアン⁽⁸⁾の空間対称性

さて、式(30),(31),(32)は次の式と解析的に等価である。

$$\xi_z/J = (y_\zeta x)_\eta - (y_\eta x)_\zeta, \quad (33)$$

$$\eta_z/J = (y_\xi x)_\zeta - (y_\zeta x)_\xi, \quad (34)$$

$$\zeta_z/J = (y_\eta x)_\xi - (y_\xi x)_\eta. \quad (35)$$

これに倣った表式を基に離散化した空間メトリックもまた、任意の差分方法の下で SCL の式(14)を満足するが、式(30),(31),(32)を基に離散化した空間メトリックとは一般に異なる値を持つ。そこで、空間的な対称性を考慮して次のような表式を新しく定義する。なお、この表式に従って離散化を行う場合も任意の差分方法の下で SCL の式(14)を満足する。

$$\xi_z/J = \{(x_\eta y)_\zeta - (x_\zeta y)_\eta + (y_\zeta x)_\eta - (y_\eta x)_\zeta\}/2, \quad (36)$$

$$\eta_z/J = \{(x_\zeta y)_\xi - (x_\xi y)_\zeta + (y_\xi x)_\zeta - (y_\zeta x)_\xi\}/2, \quad (37)$$

$$\zeta_z/J = \{(x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi + (y_\eta x)_\xi - (y_\xi x)_\eta\}/2. \quad (38)$$

同様に考えて、時間メトリック ξ_t とヤコビアン⁽⁸⁾に対して、も次のような空間対称性を導入した表式を定義する事が出来る。

$$\begin{aligned} 1/J &= \{ \{ (x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi \} z \}_\zeta + \{ \{ (x_\zeta y)_\xi - (x_\xi y)_\zeta \} z \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (x_\eta y)_\zeta - (x_\zeta y)_\eta \} z \}_\xi \\ &\quad + \{ \{ (y_\xi z)_\eta - (y_\eta z)_\xi \} x \}_\zeta + \{ \{ (y_\zeta z)_\xi - (y_\xi z)_\zeta \} x \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (y_\eta z)_\zeta - (y_\zeta z)_\eta \} x \}_\xi \\ &\quad + \{ \{ (z_\xi x)_\eta - (z_\eta x)_\xi \} y \}_\zeta + \{ \{ (z_\zeta x)_\xi - (z_\xi x)_\zeta \} y \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (z_\eta x)_\zeta - (z_\zeta x)_\eta \} y \}_\xi \\ &\quad + \{ \{ (y_\eta x)_\xi - (y_\xi x)_\eta \} z \}_\zeta + \{ \{ (y_\xi x)_\zeta - (y_\zeta x)_\xi \} z \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (y_\zeta x)_\eta - (y_\eta x)_\zeta \} z \}_\xi \\ &\quad + \{ \{ (z_\eta y)_\xi - (z_\xi y)_\eta \} x \}_\zeta + \{ \{ (z_\xi y)_\zeta - (z_\zeta y)_\xi \} x \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (z_\zeta y)_\eta - (z_\eta y)_\zeta \} x \}_\xi \\ &\quad + \{ \{ (x_\eta z)_\xi - (x_\xi z)_\eta \} y \}_\zeta + \{ \{ (x_\xi z)_\zeta - (x_\zeta z)_\xi \} y \}_\eta \\ &\quad + \{ \{ (x_\zeta z)_\eta - (x_\eta z)_\zeta \} y \}_\xi \} /6, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_t/J = & \left\{ \left[\{ (x_\tau y)_\zeta - (x_\zeta y)_\tau \} z \right]_\eta + \left[\{ (x_\eta y)_\tau - (x_\tau y)_\eta \} z \right]_\zeta \right. \\ & + \left[\{ (x_\zeta y)_\eta - (x_\eta y)_\zeta \} z \right]_\tau \\ & + \left[\{ (y_\tau z)_\zeta - (y_\zeta z)_\tau \} x \right]_\eta + \left[\{ (y_\eta z)_\tau - (y_\tau z)_\eta \} x \right]_\zeta \\ & + \left[\{ (y_\zeta z)_\eta - (y_\eta z)_\zeta \} x \right]_\tau \\ & + \left[\{ (z_\tau x)_\zeta - (z_\zeta x)_\tau \} y \right]_\eta + \left[\{ (z_\eta x)_\tau - (z_\tau x)_\eta \} y \right]_\zeta \\ & + \left[\{ (z_\zeta x)_\eta - (z_\eta x)_\zeta \} y \right]_\tau \\ & + \left[\{ (y_\zeta x)_\tau - (y_\tau x)_\zeta \} z \right]_\eta + \left[\{ (y_\tau x)_\eta - (y_\eta x)_\tau \} z \right]_\zeta \\ & + \left[\{ (y_\eta x)_\zeta - (y_\zeta x)_\eta \} z \right]_\tau \\ & + \left[\{ (z_\zeta y)_\tau - (z_\tau y)_\zeta \} x \right]_\eta + \left[\{ (z_\eta y)_\tau - (z_\tau y)_\eta \} x \right]_\zeta \\ & + \left[\{ (z_\eta y)_\zeta - (z_\zeta y)_\eta \} x \right]_\tau \\ & + \left. \left[\{ (x_\zeta z)_\tau - (x_\tau z)_\zeta \} y \right]_\eta + \left[\{ (x_\tau z)_\eta - (x_\eta z)_\tau \} y \right]_\zeta \right. \\ & \left. + \left[\{ (x_\eta z)_\zeta - (x_\zeta z)_\eta \} y \right]_\tau \right\} / 6. \quad (40) \end{aligned}$$

4. 時間方向の離散化

前節までに示した表式を時間メトリックとヤコビアン
の離散化に用いれば、時間方向の離散化は支配方程式 (10)
を基にすれば良い。時間メトリックとヤコビアンの離散
化に際し、前節までに示した表式を用いない場合であつ
ても以下の支配方程式 (41) を基にすれば VCL を満足す
るスキーム⁽¹⁰⁾を得られる。なお、以下に示す表式 (41)
を Split-form の支配方程式、式 (42) を Split-form2 の支
配方程式と呼ぶ事にする。これに対し、通常の支配方程
式 (10) を保存型の支配方程式と呼ぶ事にする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \tau} = & -J \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right. \\ & \left. - Q \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right] \right), \quad (41) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = -J \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} - Q \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right] \right). \quad (42)$$

式 (41) は、VCL の式 (11) を介して解析的に式 (42) (従つ
て式 (10)) と等価である。

5. 差分スキーム

時間メトリックとヤコビアンの評価に新しい表式を導
入したスキームの有効性を見る為に、以下のような差分
スキームを用いて検討する。なお、以下の全てのスキーム
において空間メトリックには式 (30),(31),(32) の表式を
用いる。

- SDM-CF：時間メトリックとヤコビアンの表式には
非保存型 (式 (5),(6),(7),(8)) を用い、時間方向の離
散化は保存型の支配方程式 (10) を基に行う。
- FCM-CF：時間メトリックとヤコビアンの表式には
完全保存型 (式 (15),(16),(17),(18)) を用い、時間方
向の離散化は保存型の支配方程式 (10) を基に行う。
- SDM-SF：時間メトリックとヤコビアンの表式には
非保存型 (式 (5),(6),(7),(8)) を用い、時間方向の離
散化は Split-form の支配方程式 (41) を基に行う。

- FCM_{sym}-CF：時間メトリックとヤコビアンの表式に
は空間対称性を考慮した完全保存型 (式 (40),(39))
を用い、時間方向の離散化は保存型の支配方程式 (10)
を基に行う。
- FCM-SF₂：時間メトリックとヤコビアンの表式には
完全保存型 (式 (15),(16),(17),(18)) を用い、時間方
向の離散化は Split-form2 の支配方程式 (42) を基に
行う。但し、支配方程式中で $1/J$ を時間微分した項
は $1/J$ を用いて数値的に与える。
- FCM-SF：時間メトリックとヤコビアンの表式には
完全保存型 (式 (15),(16),(17),(18)) を用い、時間方
向の離散化は Split-form の支配方程式 (41) を基に
行う。

Tab. 1: Scheme condition

SCHEME	Time metrics and Jacobian
SDM-CF	non-Conservative (Eq.(5),(6),(7),(8))
FCM-CF	Conservative (Eq.(15),(16),(17),(18))
SDM-SF	non-Conservative (Eq.(5),(6),(7),(8))
FCM _{sym} -CF	sym-Conservative [†] (Eq.(40),(39))
FCM-SF ₂	Conservative (Eq.(15),(16),(17),(18))
FCM-SF	Conservative (Eq.(15),(16),(17),(18))
SCHEME	Time-discretization
SDM-CF	Conservative (Eq.(10))
FCM-CF	Conservative (Eq.(10))
SDM-SF	Split-form (Eq.(41))
FCM _{sym} -CF	Conservative (Eq.(10))
FCM-SF ₂	[‡] Split-form2 (Eq.(42))
FCM-SF	Split-form (Eq.(41))

[†]symmetric-Conservative [‡]($1/J$)_t is numerically given.

6. 検証計算

まず、全てのスキームに共通する計算条件と初期格子
を示す。計算対象は $-L_0/2 \leq x, y, z < L_0/2$ なる立方体
領域内の圧縮性非粘性流れとし、支配方程式には式 (10)
(もしくは式 (41),(42)) を用いた。また気体は理想気体と
し、比熱比は空気を想定して $\gamma = 1.4$ とした。数値計算手
法のうち、時間積分法には 2 次精度 3 点後退差分に内部反
復を 3 回入れた ADI-SGS 陰解法を用いた。また流れ場に
周期性を仮定し、計算領域の境界条件として各方向に周
期境界条件 (5 点重ね合わせ) を適用した。初期計算格子
は、 $-L_0/2 \leq x, y, z \leq L_0/2$ に置き、格子点数は各方向
に N_{\max} 、格子幅は $\Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = L_0/(N_{\max} - 1)$
とする。実際に用いた計算格子を Table 2 に示す。

Tab. 2: Numerical cases

CASE	Δx_0	N_{\max}	$\Delta \tau$	CFL #
1	1.0×10^{-1}	20	1.0×10^{-1}	0.37
2	5.0×10^{-2}	40	1.25×10^{-2}	0.090
3	2.5×10^{-2}	80	1.5625×10^{-3}	0.024

なお時間精度は 2 次精度、空間精度は 6 次精度である事
を前提として、格子幅の変化に応じて時間方向の精度の
影響が無くなるように時間ステップ $\Delta \tau$ を決めている。

6.1 検証計算 1 (保存量保存性について)

6.1.1 数値計算手法と計算格子 時間メトリックとヤコビアンの新しい評価方法の妥当性を定量的に評価する為、対流項を含む計算領域における全ての空間差分に陽的 4 次精度中心差分を用いた。なお、実際に数値計算を行った領域の境界値に対する空間差分には陽的 4 次精度片側差分を適用し、また数値振動を抑える為のフィルターは用いていない。移動変形格子として以下のような空間、時間的にランダムに変動する 3 次元格子を導入して計算領域に用いた。ここで、 $0 \leq \theta_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau), \phi_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau) \leq 2\pi$ は格子点毎、時間ステップ毎にランダムに与えた。

$$x_{j,k,l}(\tau) = x_{j,k,l}(0) + R \sin(\phi_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau)) \cos(\theta_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau)), \quad (43)$$

$$y_{j,k,l}(\tau) = y_{j,k,l}(0) + R \sin(\phi_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau)) \sin(\theta_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau)), \quad (44)$$

$$z_{j,k,l}(\tau) = z_{j,k,l}(0) + R \cos(\phi_{j,k,l}^{\text{rm}}(\tau)), \quad (45)$$

$$1 \leq j, k, l \leq N_{\text{max}}, \quad R = 0.05 \Delta x_0. \quad (46)$$

また、初期解 $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0), p_0, \rho_0$ として、

$$u_0 = 0.10, \quad v_0 = w_0 = 0.0, \quad p_0 = \rho_0 = 1.0, \quad (47)$$

で与えられる x 方向の 1 様流を用いた。

6.1.2 計算結果 ケース 1 の初期格子を用いた、 $\tau = 3.0$ における計算結果を示す。まず、FCM 系のスキームの下で、GCL が満たされているかどうかを検証した。具体的には、数値的に与えられたメトリックとヤコビアンを用いて GCL(11),(12),(13),(14) の左辺を各格子点毎に計算した。計算に際し、空間差分方法には陽的 4 次精度中心差分、時間差分には 2 次精度 3 点後退差分を用いた。格子変形 1 周期目の式 (11),(12) の左辺の絶対値の最大値を各スキームに対して Table 3 に示した。Table 3 の値から、SCL については SDM-CF 以外の全てが、VCL については FCM 系のみが丸め誤差のオーダーで GCL を満足している事が分かった。

Tab. 3: Maximum errors of GCL for CASE1 ($0.0 \leq \tau \leq 1.0$); Explicit 4th-order central difference method is used.

SCHEME	VCL(Eq.(11))	SCL- x (Eq.(12))
SDM-CF	2.54	4.08×10^{-16}
FCM-CF	1.66×10^{-13}	4.08×10^{-16}
SDM-SF	2.54	4.08×10^{-16}
FCM _{sym} -CF	1.70×10^{-13}	4.08×10^{-16}

続いて、流速の誤差 L_∞ ノルムと保存量の計算領域内積分量の初期解からのずれ $\langle Q \rangle$ を以下の式 (48),(49) のように定義する。なお、計算領域を \mathbf{V}_R とする。

$$L_\infty \equiv \max\{|v - v_0|/u_0, |w - w_0|/u_0\}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &\equiv \sum_{j,k,l=1}^{N_{\text{max}}} \left\{ (\hat{Q} - \hat{Q}_0)_{j,k,l} / \hat{Q}_{0;j,k,l} \right\} \\ &\simeq \int_{\mathbf{V}_R} (Q - Q_0) / Q_0 dV. \end{aligned} \quad (49)$$

Tab. 4: Freestream preservation errors for CASE1 (L_∞ -norm, $\langle Q \rangle$, $\tau = 3.0$); Explicit 4th-order central difference method is used.

SCHEME	L_∞ -norm	$\langle \rho \rangle$
SDM-CF	4.49	-2.03×10^{-1}
FCM-CF	7.38×10^{-15}	2.42×10^{-16}
SDM-SF	2.20×10^{-15}	5.34×10^{-8}
FCM _{sym} -CF	6.94×10^{-15}	2.14×10^{-16}
SCHEME	$\langle \rho u \rangle$	$\langle \rho e \rangle$
SDM-CF	2.00×10^{-2}	-1.16×10^{-1}
FCM-CF	6.03×10^{-17}	1.73×10^{-16}
SDM-SF	5.34×10^{-8}	3.82×10^{-8}
FCM _{sym} -CF	2.36×10^{-16}	1.69×10^{-16}

各スキームについて、 L_∞ ノルム、 $\langle Q \rangle$ を Table 4 に示す。 L_∞ ノルムは SDM-CF 以外のスキームで丸め誤差のオーダーであり、1 様流を保持出来ている事が分かる。その一方で、 $\langle Q \rangle$ については FCM 系以外は大きな値となる。すなわち、時間メトリックやヤコビアンに完全保存型を用いない従来のスキームに比べ、FCM 系が保存量の保存性という観点では圧倒的に優れている事を意味する。なお、初期格子としてケース 2 を用いた場合や、格子の歪みを激しくした (式 (46) で 12%歪みを入れた) 場合でも上記の計算結果と同様の傾向が見られた。

Tab. 5: Maximum errors of GCL for CASE1 ($0.0 \leq \tau \leq 1.0$); 6th-order compact scheme is used.

SCHEME	VCL(Eq.(11))	SCL- x (Eq.(12))
SDM-CF	7.83	1.48×10^{-15}
FCM-CF	7.63×10^{-13}	1.48×10^{-15}
SDM-SF	7.83	1.48×10^{-15}
FCM _{sym} -CF	3.65×10^{-13}	1.48×10^{-15}

Tab. 6: Freestream preservation errors for CASE1 (L_∞ -norm, $\langle Q \rangle$, $\tau = 3.0$); 6th-order compact scheme is used.

SCHEME	L_∞ -norm	$\langle \rho \rangle$
SDM-CF	-3.51×10^{-1}	-1.12×10^{-2}
FCM-CF	6.69×10^{-14}	-3.05×10^{-7}
SDM-SF	8.51×10^{-15}	-7.37×10^{-8}
FCM _{sym} -CF	2.10×10^{-14}	-3.10×10^{-7}
SCHEME	$\langle \rho u \rangle$	$\langle \rho e \rangle$
SDM-CF	-4.10×10^{-4}	3.64×10^{-3}
FCM-CF	-3.05×10^{-7}	2.18×10^{-7}
SDM-SF	-7.37×10^{-8}	5.28×10^{-8}
FCM _{sym} -CF	3.10×10^{-7}	2.22×10^{-7}

空間差分に 3 重対角 6 次精度コンパクト差分⁽⁴⁾を用いた場合、GCL の左辺の計算結果 Table 5 と、初期解を 1 様流とした場合の L_∞ ノルムの結果 Table 6 につい

ては同様の傾向が見られた。しかし初期解を 1 様流とした場合の $\langle Q \rangle$ の結果 Table 6 については FCM 系と SDM-SF で共に大きな値 ($O(10^{-8})$) となり、保存量の保存が成立しない結果となった。これは一般に計算領域での保存則を離散的に構築する際に、空間的な差分にコンパクト差分を用いる事に由来すると考えられる。簡単の為、空間 1 次元での保存則を考える。離散空間での物理量を $\phi(x_j) \equiv \phi_j$ と定義し、計算領域 $x_{j_s} \leq x_j \leq x_{j_e}$ において $(\partial\phi/\partial x)_j \equiv \phi'_j$ の総和を考える。空間差分方法に 3 重対角 6 次精度コンパクト差分を用いると、

$$\begin{aligned} \alpha\phi'_{j-1} + \phi'_j + \alpha\phi'_{j+1} \\ = b(\phi_{j+2} - \phi_{j-2}) + a(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \end{aligned} \quad (50)$$

と与えられる。計算領域における ϕ_j に対して周期境界条件を課せば、

$$(1 + 2\alpha) \sum_{j=j_s}^{j_e} \phi'_j = -\alpha(\phi'_{j_s-1} + \phi'_{j_e+1} - \phi'_{j_s+1} - \phi'_{j_e-1}) \quad (51)$$

という式が成立する。 ϕ'_j にも厳密な周期境界条件を課せば式 (51) の右辺は消え、コンパクト差分を用いた離散的な意味での保存則を解析的な意味での保存則と完全に対応付ける事が出来る。実際、陽的差分を用いれば ϕ'_j に対しても厳密な周期境界条件を課す事が出来、式 (51) の右辺は消える。しかし、コンパクト差分は全点スキームである事から、実際に数値計算を行う領域の境界値の空間差分に陰的 4 次精度片側差分を用いるような場合には ϕ'_j に厳密な周期境界条件を課す事が出来ない。ゆえに、空間的な周期性を持たないコンパクト差分を用いた離散的な意味での保存則は、解析的な意味での保存則とは一致しないと言える。この意味で、空間的な周期性を持たないコンパクト差分を用いると移動変形格子に対するメトリックとヤコビアン完全保存性が失われてしまう事が予想されるが、以下ではこの影響が大きく及ばない程度の移動変形を伴う格子に限定して検証計算 2 を行った。実際には空間的な周期性を導入したコンパクト差分を用いれば上述のような問題は起こらないが、実用計算への応用を見据えて今回の計算では用いていない。

6.2 検証計算 2 (解像度について)

6.2.1 数値計算手法と計算格子 保存量保存についての検証計算 1 と異なる数値計算手法は以下の通りである。まず対流項、メトリックとヤコビアンを含めた全ての空間差分には 3 重対角 6 次精度コンパクト差分法⁽⁴⁾を適用し、実際に数値計算を行った領域の境界値に対する空間差分には陰的 4 次精度片側差分を用いた。数値振動を抑える為に 10 次精度 3 重対角フィルター⁽⁴⁾を用い、フィルター係数は $\alpha_f = 0.49$ としている。また、移動変形格子として Fig.4 に示される格子⁽¹⁰⁾を導入した。格子の時間変動は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} x_{j,k,l}(\tau) = x_{\min} + \Delta x_0 \left[(j-1) + \right. \\ \left. A_x \sin(2\pi\omega\tau) \sin \frac{n\pi(k-1)\Delta y_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(l-1)\Delta z_0}{L_0} \right], \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} y_{j,k,l}(\tau) = y_{\min} + \Delta y_0 \left[(k-1) + \right. \\ \left. A_y \sin(2\pi\omega\tau) \sin \frac{n\pi(j-1)\Delta x_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(l-1)\Delta z_0}{L_0} \right], \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} z_{j,k,l}(\tau) = z_{\min} + \Delta z_0 \left[(l-1) + \right. \\ \left. A_z \sin(2\pi\omega\tau) \sin \frac{n\pi(j-1)\Delta x_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(k-1)\Delta y_0}{L_0} \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

なお、各定数は以下のように与えた。

$$\begin{aligned} L_0 = 20, \quad x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = -10, \quad \omega = 1.0, \\ A_x \Delta x_0 = A_y \Delta y_0 = A_z \Delta z_0 = 0.40, \quad n = 8. \end{aligned} \quad (55)$$

6.2.2 計算条件 初期条件として式 (47) の 1 様流と、以下で与えられる z 方向に軸を持つ 2 次元等エントロピー渦⁽¹⁾を用いた。

$$u_0 = \varepsilon \frac{y}{R_c^2} \exp \left[\alpha \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R_c^2} \right) \right], \quad (56)$$

$$v_0 = \varepsilon \frac{x}{R_c^2} \exp \left[\alpha \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R_c^2} \right) \right], \quad (57)$$

$$T_0 = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\gamma - 1}{4\alpha\gamma} \varepsilon^2 \exp \left[2\alpha \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R_c^2} \right) \right], \quad (58)$$

$$w_0 = 0.0, \quad p_\infty = \rho_0 = \rho_\infty = 1.0. \quad (59)$$

なお、 $\varepsilon = 0.02, \alpha = 0.204, R_c = 1.0$ とした。実際に初期条件として与える速度場、圧力場と温度場には計算領域の周期性を考慮し、 $-30 < x < 30, -30 < y < 30$ に存在する全ての渦からの寄与を線形的に重ねあわせたものを用いた。

6.2.3 計算結果 まず、GCL に関する計算を行い、各ケース共に検証計算 1 と同様の結果を得た。また、初期条件を 1 様流とした場合にも SDM-CF を除く全てのスキームとケースで 1 様流の保持が実現される事を確認出来た。検証計算 1 と異なるのは、FCM 系と SDM-SF 共に全てのケースで $\langle Q \rangle$ が $O(10^{-14})$ 程度に抑えられている点であり、空間差分にコンパクト差分を用いてもメトリックとヤコビアン完全保存性由来の保存量保存性が大きくは失われない程度に格子が空間的に滑らかな変形を行う事を意味している。なおケース 1 の格子に対して空間陽的 4 次精度中心差分を用いた場合、いずれのスキームも $\langle Q \rangle$ は $O(10^{-16})$ 程度に抑えられ、空間差分にコンパクト差分を用いる事による保存量保存性への悪い影響は存在する事が分かる。しかし、その場合でもスキーム間で $\langle Q \rangle$ のオーダーに差はない。以上の事から、今回用いる格子の下では FCM 系で時間メトリックとヤコビアンの評価に完全保存型を用いる事の効果が十分に現れず、保存量保存性という観点からはスキーム間に大きな差異はない事が予想される。なお格子のゆがみが大きい (A_x, n 等の値を大きく変化させた) 場合であっても上述の傾向が見られた事から、これは格子が時間空間的に周期性を持つ事に由来すると予想される。

次に、初期条件として 2 次元等エントロピー渦を与えた場合の結果を示す。まず、 $z = 0$ を通る $\zeta =$ 一定の平面における流速の絶対値を等高線図として示す。さらに、流速の y 成分である v を渦の中心を通る線上 ($\eta = \zeta =$ 一定) での分布として示す。なお、いずれもケース 1 の格子を用いた場合であり、無次元時間 $\tau = 3.0$ の結果である。Figure 1,2,3 から、SDM-CF 以外のスキームは格子の変形の影響を大きくは受けずに渦の形状を維持出来る事が分かる。次に、流速の大きさ $|u|$ と圧力 p で作った L_2 ノルムを示す。数値計算で得られた離散点 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_j, \eta_k, \zeta_l)$ における物理量 $\phi_{j,k,l}$ に対して、 $1 \leq j, k, l \leq N_{\max}$ で定

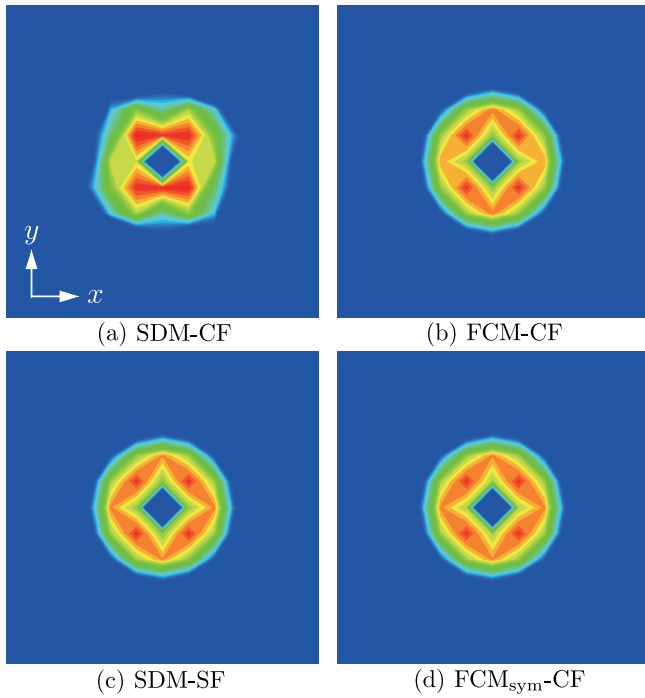


Fig. 1: Vortex preservation (contours of velocity magnitude on $z = 0$ plane: $\zeta = \text{constant}$ plane, $\tau = 3.0$, CASE1); (a) SDM-CF, (b) FCM-CF, (c) SDM-SF, (d) FCM_{sym}-CF. Contour is from 0.0 to 0.34.

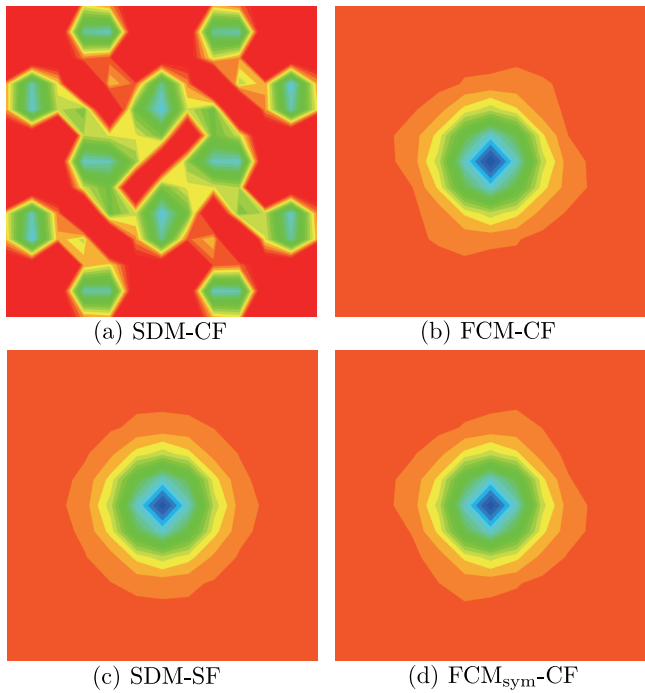


Fig. 2: Vortex preservation (contours of pressure on $z = 0$: $\zeta = \text{constant}$ plane, $\tau = 3.0$, CASE1); (a) SDM-CF, (b) FCM-CF, (c) SDM-SF, (d) FCM_{sym}-CF. Contour is from 0.8 to 1.02.

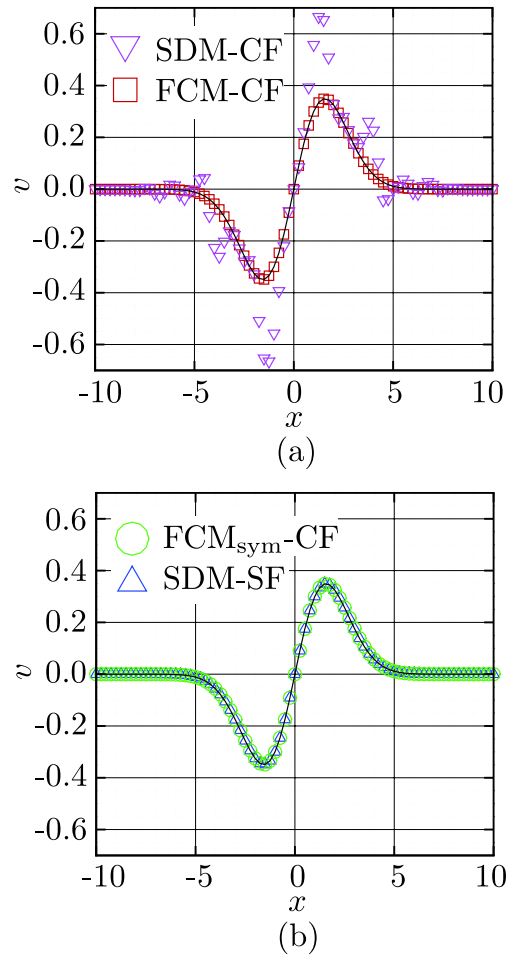


Fig. 3: Vortex preservation (y -component of swirl velocity distribution, $\tau = 3.0$, $\eta = \zeta = \text{constant}$); (a) SDM-CF/FCM-CF, (b) SDM-SF/FCM_{sym}-CF; black line indicates initial distribution.

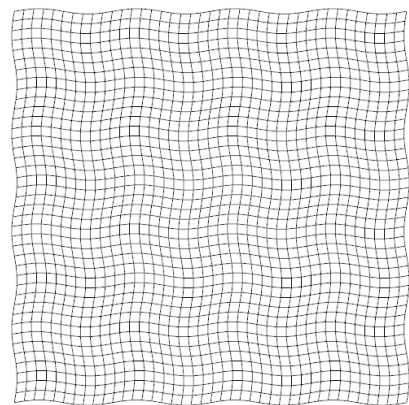


Fig. 4: Spatially periodic grid on $l = \text{constant}$ plane; $\tau = 1.6$; initial grid is CASE2.

義される L_2 ノルム $\|\phi\|_2$ は以下の通りである. なお, 式 (60), (61) のシグマ記号はケース 1 の格子点に対応する離散点のみを取り出して和を取り, N_{\max} はケース 1 の格子点数とする.

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left\{ \sum_{j,k,l=1}^{N_{\max}} (|\mathbf{u}_{j,k,l}| - |\mathbf{u}_{j,k,l}^{\text{exact}}|)^2 \right\}^{1/2} / N_{\max}^3, \quad (60)$$

$$\|p\|_2 = \left\{ \sum_{j,k,l=1}^{N_{\max}} (p_{j,k,l} - p_{j,k,l}^{\text{exact}})^2 \right\}^{1/2} / N_{\max}^3. \quad (61)$$

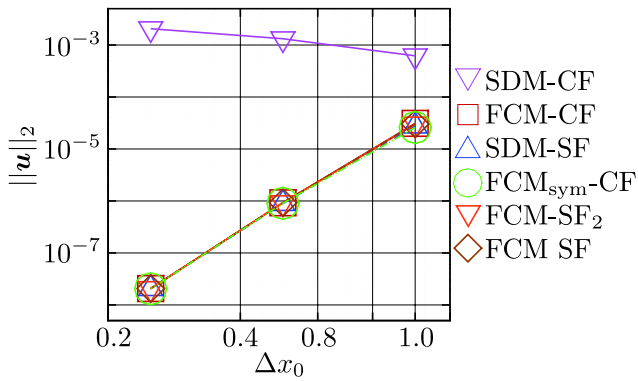


Fig. 5: L_2 -norm in the velocity-magnitude profile in terms of grid spacing ($\tau = 3.0$): $\|\mathbf{u}\|_2$; red square is of FCM-CF; blue delta is of SDM-SF; green circle is of FCM_{sym}-CF; orange gradient is of FCM-SF₂; brown diamond is of FCM-SF.

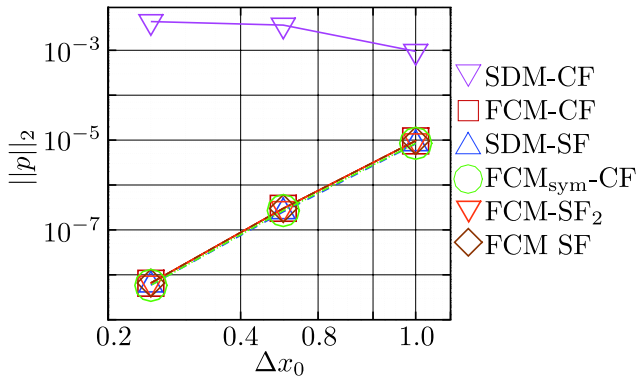


Fig. 6: L_2 -norm in the pressure profile in terms of grid spacing ($\tau = 3.0$): $\|p\|_2$; red square is of FCM-CF; blue delta is of SDM-SF; green circle is of FCM_{sym}-CF; orange gradient is of FCM-SF₂; brown diamond is of FCM-SF.

Figure 5,6 における, 流速と圧力による L_2 ノルムの格子幅に対する傾き (Table 7,8 を参照) を見ると, SDM-CF 以外のスキームでは空間精度は 5 次から 6 次の間にある事が分かる. 空間的に完全な 6 次精度が実現されない理由は以下のように考えられる. まず, 時間離散化方法に陰解法を用いている事から各時間における解は十分に収束せず, 時間方向に 2 次精度が保たれていない可能

Tab. 7: L_2 -norm in the velocity-magnitude ($\tau = 3.0$); for each scheme, $\|\mathbf{u}\|_2$ and the order of accuracy based on $\|\mathbf{u}\|_2$ are shown.

SCHEME	CASE	$\ \mathbf{u}\ _2$	Order
SDM-CF	CASE1	6.19(-4) [†]	—
	CASE2	1.32(-3)	-1.09
	CASE3	2.06(-3)	-6.41(-1)
FCM-CF	CASE1	3.11(-5)	—
	CASE2	9.23(-7)	5.08
	CASE3	2.07(-8)	5.48
SDM-SF	CASE1	2.76(-5)	—
	CASE2	8.90(-7)	4.95
	CASE3	2.06(-8)	5.44
FCM _{sym} -CF	CASE1	2.59(-5)	—
	CASE2	9.02(-7)	4.84
	CASE3	2.04(-8)	5.46
FCM-SF ₂	CASE1	3.03(-5)	—
	CASE2	9.26(-7)	5.08
	CASE3	2.06(-8)	5.48
FCM-SF	CASE1	3.03(-5)	—
	CASE2	9.26(-7)	5.08
	CASE3	2.06(-8)	5.48

[†]6.19 × 10⁻⁴

Tab. 8: L_2 -norm in the pressure profile ($\tau = 3.0$); for each scheme, $\|p\|_2$ and the order of accuracy based on $\|p\|_2$ are shown.

SCHEME	CASE	$\ p\ _2$	Order
SDM-CF	CASE1	9.47(-4) [†]	—
	CASE2	3.64(-3)	-1.94
	CASE3	4.36(-3)	-2.62(-1)
FCM-CF	CASE1	9.59(-6)	—
	CASE2	3.03(-7)	4.99
	CASE3	6.48(-9)	5.55
SDM-SF	CASE1	8.26(-6)	—
	CASE2	2.53(-7)	5.03
	CASE3	5.91(-9)	5.42
FCM _{sym} -CF	CASE1	8.48(-6)	—
	CASE2	2.70(-7)	4.97
	CASE3	5.82(-9)	5.53
FCM-SF ₂	CASE1	9.67(-6)	—
	CASE2	3.00(-7)	5.01
	CASE3	6.57(-9)	5.51
FCM-SF	CASE1	3.00(-5)	—
	CASE2	9.67(-7)	5.01
	CASE3	3.00(-9)	5.51

[†]9.47 × 10⁻⁴

性がある。一方、各格子で用いる時間ステップは時間方向に 2 次精度を保つ事を前提として時間方向の精度の影響が無くなるように決めた為、Table 2 のケースを用いる限り 2 次精度未満の時間精度を持つ解から作る誤差直線の傾きには空間 6 次精度が反映されないと考えられる。また、今回の計算では数値計算上の境界において片側 4 次精度のコンパクト差分を用いているが、コンパクト差分は全点スキームである事から数値計算上の境界での空間精度の低下が計算領域の空間精度に悪い影響を及ぼしている可能性も考えられる。

一方で、Fig.5,6 (あるいは Table 7,8) から、SDM-CF は空間 6 次精度を全く保たない事が分かる。ゆえに、VCL を満足しないようなメトリックとヤコビアンを用いると格子幅に対する収束性が存在しないと言えるが、これには以下のような可能性を考えられる。まず、一般座標成分で書かれた支配方程式 (10) は、GCL の式を介して物理座標成分で書かれた支配方程式 (9) と等価である。それゆえ、VCL が恒等的に満たされない条件下で式 (10) を解く事は、式 (10) の右辺において格子に依存する非定常的な生成項が付け加わった方程式を解く事に相当する。この生成項の大きさは VCL の左辺の大きさに依存して決まると考えられるが、SDM-CF を用いた場合の VCL の式 (11) 左辺の最大値を示した Table 9 を見ると、格子に対する収束性は無いと分かる。このような性質を持つ生成項からの寄与により、SDM-CF を用いた際の数値解は格子に対する収束性を持たない可能性がある。

Tab. 9: Maximum errors of VCL:Eq.(11) ($0.0 \leq \tau \leq 1.0$); 6th-order compact scheme is used.

SCHEME	CASE1	CASE2	CASE3
SDM-CF	6.09	1.70	1.81

なお他のスキームと同様に各時間における解が完全に収束しておらず、時間方向に 2 次精度を実現出来ない可能性はあるが、それ以上に上記の VCL 由来の誤差が卓越していると考えられる。

さて、これらの図より渦の解像度という観点から、時間メトリックとヤコビアンの評価方法について以下のような傾向を挙げられる。まず、FCM-SF₂ と FCM-SF のスキーム間で差異が見られない事から、時間方向離散化法に Split-form 系を用いた場合には時間メトリックとヤコビアンの評価方法の違いによる影響は見られないと言える。これは、新しい時間メトリックとヤコビアンが十分に VCL を満足している為に、支配方程式 (41),(42) におけるヤコビアン₂の時間微分項の評価方法の違いが陽に現れない事を意味している。また、FCM_{sym}-CF と SDM-SF は FCM-CF よりも誤差が小さく、時間メトリックとヤコビアン₂の評価方法において空間対称性を持たせる事が重要であると予想される。なお紙面の都合上載せていないが、全ての空間メトリックに式 (36) に倣って空間対称性を考慮した表記を導入すると、全てのスキームで誤差が減る事も分かっている。一方、各 L_2 ノルムの値に関する FCM-SF 系と FCM-CF の比較や、SDM-SF と FCM_{sym}-CF の比較は格子幅によって優劣が異なる為出来なかった。

そこで、時間方向離散化について定性的な議論を行う為に、ケース 3 の細かい格子とケース 1 の大きな時間ステップを組み合わせた結果を以下に示す。格子幅の細かいケース 3 の格子を用いる為、時間メトリックとヤコビアン₂の評価に空間対称性が与える影響は小さくなり、Fig.7 には時間方向の収束性の優劣が比較的大きく現れていると考えられる。まず、FCM_{sym}-CF よりも SDM-SF の方が渦の形を維持しており、時間方向離散化に Split-form を用いる事は時間ステップを大きく採る場合に誤差を減らす傾向にあると予想される。またわずかではあるが、FCM-CF よりも FCM_{sym}-CF の方が渦の

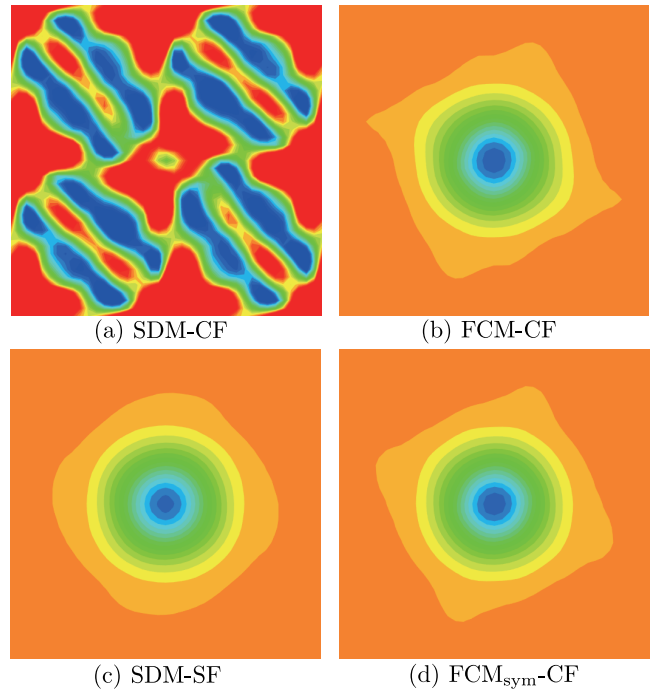


Fig. 7: Vortex preservation (contours of pressure on $z = 0: \zeta = \text{constant}$ plane, $\tau = 3.0$, grid is CASE3, time-step is CASE1); (a) SDM-CF, (b) FCM-CF, (c) SDM-SF, (d) FCM_{sym}-CF. Contour is from 0.8 to 1.02.

形を維持している事から、時間メトリックとヤコビアン₂の評価に際し空間対称性が重要である事を改めて確認出来る。

以上の結果から、FCM 系が SDM-SF に比べて実用計算上は遜色ない解像度を実現するという事が分かった。しかし、今回の FCM 系の計算結果は時間方向に十分収束していない解を示している可能性があり、収束が十分であれば FCM 系は SDM-SF よりも高解像度なスキームとなる可能性が十分にある。

7. まとめ

GCL に基づく完全保存型の時間メトリックとヤコビアン₂の新しい評価方法を提案した。検証計算として、時間的に変動するランダム格子の下で空間陽的 4 次精度中心差分を用いて 1 様流を解き、GCL を満足する従来のスキームよりも高い精度で保存量の保存性が実現される事を確認した。また、メトリックとヤコビアンに今回提案した完全保存型を用いても空間差分に周期性を持たないコンパクト差分を用いた場合には、空間的変動の激しい移動変形格子では必ずしも保存量の保存性が成り立たない事を指摘した。続いて、空間差分方法にコンパクト差分法を用いた場合に、メトリックとヤコビアン₂の完全保存性が失われない程度に空間的に滑らかな周期変動を持つ移動変形格子を用いて 2 次元等エントロピー渦を初期解とした検証計算を行った。流速の大きさと圧力の L_2 ノルムや渦の等高線図をスキーム間で比較した所、時間メトリックとヤコビアン₂に新しい評価方法を採用したスキームは従来の GCL を満足するスキームを用いた場合と同程度の解像度を持つ事が分かった。また、時間メトリックとヤコビアン₂の評価に空間的対称性を考慮した方法を用いる事は解像度を高める方向に働く事が分かった。なお時間メトリックとヤコビアン₂の新しい評価とは別に、時間方向離散化法に際して、ヤコビアン₂を保存量ベクトルに含めないという意味での非保存形式に書き直した支配方程式を用いる事は、時間ステップを大きく採る場合に解像度を高める方向に働く傾向にあると予想さ

れる。

補遺：空間メトリックの有限体積法的解釈と離散式の互換性

式 (32) に対し、2 次精度中心差分を用いた離散化を試みる。計算空間における一般座標系の刻み幅を $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$ とし、離散点 $(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) = (j, k, l)$ における物理量 $\phi_{j,k,l}$ に対し、空間の差分オペレータを以下のように導入する。

$$\delta_\xi \phi|_{j,k,l} \equiv (\phi_{j+1,k,l} - \phi_{j-1,k,l})/2, \quad (62)$$

$$\delta_\eta \phi|_{j,k,l} \equiv (\phi_{j,k+1,l} - \phi_{j,k-1,l})/2, \quad (63)$$

$$\delta_\zeta \phi|_{j,k,l} \equiv (\phi_{j,k,l+1} - \phi_{j,k,l-1})/2. \quad (64)$$

これによって、式 (32) は、

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \delta_\eta \{(\delta_\xi x|_{j,k,l})y\}|_{j,k,l} - \delta_\xi \{(\delta_\eta x|_{j,k,l})y\}|_{j,k,l} \\ &= [(\delta_\xi x|_{j,k+1,l})y_{j,k+1,l} - (\delta_\xi x|_{j,k-1,l})y_{j,k-1,l}] \\ &\quad - [(\delta_\eta x|_{j+1,k,l})y_{j+1,k,l} - (\delta_\eta x|_{j-1,k,l})y_{j-1,k,l}]/2, \end{aligned} \quad (65)$$

と書ける。一方、式 (5) を 2 次精度中心差分で離散化する場合、

$$\begin{aligned} \zeta_z/J|_{j,k,l} &= \{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\}|_{j,k,l} \\ &= (\delta_\xi x|_{j,k,l})(\delta_\eta y|_{j,k,l}) - (\delta_\eta x|_{j,k,l})(\delta_\xi y|_{j,k,l}) \\ &= (x_{j+1,k,l} - x_{j-1,k,l})(y_{j,k-1,l} - y_{j,k+1,l})/4 \\ &\quad - (x_{j,k-1,l} - x_{j,k+1,l})(y_{j+1,k,l} - y_{j-1,k,l})/4, \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ところで、

$$\hat{\phi}_{j\pm 1,k,l} = (\phi_{j\pm 1,k-1,l} + \phi_{j\pm 1,k+1,l})/2, \quad (67)$$

$$\hat{\phi}_{j,k\pm 1,l} = (\phi_{j-1,k\pm 1,l} + \phi_{j+1,k\pm 1,l})/2, \quad (68)$$

と定義⁽⁷⁾し、該当する添え字を持つ項に限って $\{x, y\} \rightarrow \{\hat{x}, \hat{y}\}$ と置き換えれば、式 (65) と (66) は一致する。

さて、上述の置き換えを含めた離散化の結果、式 (66) は Fig.8 に示す四辺形 1234 を $z = \text{一定}$ の平面に射影した際の面積に一致する。これは、 ζ_z/J が微小体積要素 $d\xi d\eta d\zeta$ を $z = \text{一定}$ の平面に射影した際の面積である事に対応付ける事が出来、離散化した空間メトリックを有限体積的に理解する為の根拠となる。一方この時、式 (65) の値は Fig.8 に示す四辺形 ABCD を $z = \text{一定}$ の平面に射影した際の面積の半分に相当する。すなわち、上述のような離散化を施すことで、式 (30) の表式についても有限体積法的な解釈を加える事が出来る。また、空間対称性を導入した空間メトリックを含めた式 (30), (33), (36) の 3 種類の表式は、式 (65), (67), (68) に倣った離散化を行う事で互いに一致する。この事は、離散式レベルで現れる空間の非対称性は適切な離散化によって消せる可能性を示唆しており、またその離散化方法が、旧来の幾何学的根拠に基づく有限体積法的な空間メトリックの離散化方法に一致するという意味で興味深い。

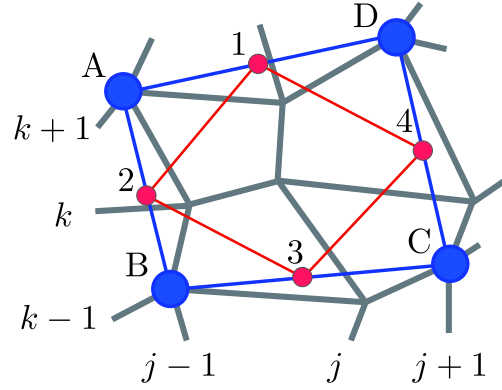


Fig. 8: Spatial reconstruction of $(\zeta/J)_{j,k,l}$ on $\zeta = \text{const}$ plane.

参考文献

- (1) D.S. Balsara and C.W. Shu, "Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High Order of Accuracy," J. C Phys., **160** (2000), 423–425,
- (2) X. Deng, M. Mao, G. Tu and H. Zhang, "Geometric conservation law and applications to high-order finite difference schemes with stationary grids," J. C Phys., **230** (2011), 1103–1105.
- (3) 藤井 孝藏, 「流体力学の数値計算法」, 東京大学出版会, (1994), 155–173
- (4) S.K. Lele, "Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution," J. C Phys., **103** (1992), 16–22
- (5) 松川 豊, "幾何学的保存則 (Geometric Conservation Law) について," 第 19 回数値流体力学シンポジウム, (2005), D7-1
- (6) T. Nonomura, N. Iizuka and K. Fujii, "Freestream and vortex preservation properties of high-order WENO and WCNS on curvilinear grids," C. Fluids, **39** (2010), 197–214
- (7) T.H. Pulliam and J.L. Steger, "On Implicit Finite-Difference Simulations of Three Dimensional Flow," AIAA, **10** (1978)
- (8) P.D. Thomas and C.K.Lombard, "Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids," AIAA, **17** (1978), 1030–1034
- (9) M. Vinokur, "An Analysis of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Conservation Laws*," J. C Phys., **81** (1989), 1–52
- (10) M.R. Visbal and D.V. Gaitonde, "On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes," J. C Phys., **181** (2002), 155–185
- (11) H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trepanier and R. Camarero, "Discrete Form of the GCL for Moving Meshes and its Implementation in CFD Schemes," C. Fluids, **22** (1993), 9–23