

埋め込み境界法による空力音直接数値解法の研究

A Study of Direct Numerical Simulation of Aeroacoustics Sound by Immersed Boundary Method

- 西川幸成, 東北大院, 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1, nishikawa@dragon.ifs.tohoku.ac.jp
服部裕司, 東北大流体研, 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1, hattori@fmail.ifs.tohoku.ac.jp
Kousei NISHIKAWA, Tohoku Univ., 2-1-1 Katahira, Aoba, Sendai, Miyagi, JAPAN
Yuji HATTORI, Tohoku Univ., 2-1-1 Katahira, Aoba, Sendai, Miyagi, JAPAN

We develop a method for direct numerical simulation of aeroacoustic sound. We apply Immersed Boundary Method (IBM) and Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) Schemes to the compressible Navier-Stokes equations and Euler equations. We investigate the validity of IBM and WENO for compressible flow and inviscid flow by direct numerical simulation of aeroacoustic sound generated from the two-dimensional flow past a cylinder by comparing the result with by Body Fitted Coordinate (BFC) method and prediction by Curle's equation of acoustic analogies. The results by IBM and WENO show that sound waves are generated from cylinder and are in good agreement with those obtained by the BFC method and Curle's equation.

1. はじめに

航空機, 鉄道, 自動車などから発生する騒音のひとつである空力騒音は, 周辺環境に騒音問題を引き起こす重要な問題である。騒音には主に振動音と流体音の 2 つがあり, 流体が空気の場合, 流体音は空力音と呼ばれる。振動音は物体の固有振動に起因し, 空力音は物体周りの剥離流れの非定常性や, 物体から放出される周期渦などの圧力変動に起因する。一般に振動音は代表速度の 2 乗に比例するのに対し, 空力音は 5~8 乗に比例するため, 空力音は速度の増加に伴い急激に大きくなり, 重大な騒音源となる。近年の航空機, 鉄道などの高速化により, 空力騒音が生活環境に与える影響が大きくなり, その低減の必要性が高まっている。空力騒音の低減には, 空力音の発生を抑える構造物の設計が求められる。これを行うには, 空力音の発生と伝播のメカニズムを詳細に把握し, 発生する音波を正確に予測する必要がある。

空力音の研究には, 風洞実験や現地試験などの実験的なアプローチと, 数値解析によるアプローチがある。しかし, 実験的なアプローチでは音場全体の詳細な情報や, 空力音発生の原因となる流れ場の詳細な特性を得ることは困難である。そのため, 数値解析により, これらを解析することが期待されている。

空力音の数値解析手法としては, 物体近傍から遠方まで全領域にわたって流れの支配方程式を解く直接数値解法(DNS)と, 流れ場の計算と音場の計算を別々に行う分離解法の 2 つが主に用いられている。分離解法は, 音源近傍の流れ場の計算を LES(Large Eddy Simulation)などで行った上で, 流れ場の計算で得られた音源を用いて, Lighthill 方程式や Curle の式などの音響アナロジーにより, 音場の計算を行う。この手法では, 流れと音で長さスケールが大きく異なる難しさを回避するため, 直接数値解法と比べて低コストで計算を行うことができる。しかし, 音場が流れ場に与える影響を考慮していないので, 音場が流れ場に影響を与え, 再び流れ場から音場に影響を与えるフィードバック現象を解析することは不可能である。また, 流れが低マッハ数であることや, 音源がコンパクトであるという仮定をおく場合が多く, 使用に制限が生じるという課題もある。一方で, 直接数値解法は全領域にわたって流れの支配方程式を解くため, 流れ場と音場の相互作用を厳密に解析することができ, 流れのマッハ数や音源領域の大きさに制限がない。しかし, 直接数値解法により微小な圧力変動である音波を正確に計算するには, 数値的な散逸を小さくするために高精度なスキームが必要となる。そのため分離解法と比較して計算コストが高く, これまで一般的な方法ではなかった。しかし, 近年

の計算機性能の向上により, 直接数値解法を用いた大規模な数値解析が可能になってきている。

DNS において, 複雑な形状の物体周りの流れを扱う場合には, 物体表面に沿って格子を形成する物体適合格子が多く用いられてきた。しかし物体適合格子は, 複雑な固体境界や, 移動する固体境界を扱う場合に格子生成が困難であるため, 計算コストが高いという問題点がある。計算コストが高い直接数値解法では物体適合格子を用いることは実用的ではない。そこで近年, このような問題を解決する方法として埋め込み境界法が研究されており, 利用が拡大している。埋め込み境界法では, 直交格子に物体境界を埋め込む手法であり, 物体適合格子と比較して格子生成が容易であり, 複雑な固体境界や移動する固体境界を扱う場合でも, 低い計算コストで解くことが可能である。

Chaudhuri ら⁽¹⁾は, 離散型埋め込み境界法と, Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes⁽²⁾ (WENO)を組み合わせた計算手法を提案した。Chaudhuri らの離散型埋め込み境界法は, 直交格子に境界を埋め込み, 物体領域の cell を Ghost Point と置き, 物体境界上で境界条件を与えるように Ghost Point の物理量を補間する。Chaudhuri らは, この手法を用いて衝撃波と物体の相互作用の解析を行った。円柱や三角柱と衝撃波の相互作用を計算し, 実験結果と比較し良い精度を確認した。この Chaudhuri らの離散型埋め込み境界法を用いた計算手法を空力音解析に適用すれば, 非粘性流れの空力音解析への適用が期待でき, 高レイノルズ数流れの空力音解析への適用も期待できる。

そのため本研究の目的は, 埋め込み境界法を用いた空力音の直接数値解法を開発することを最終目的とし, Chaudhuri らによって提案された埋め込み境界法を空力音解析に適用して, 妥当性を検証することである。本研究では, 離散型埋め込み境界法を用いた数値計算手法を開発し, 2次元 Navier-Stokes 方程式と 2次元 Euler 方程式を解き, 円柱から発生するエオルス音と渦音の解析を行い, 計算手法の妥当性を検討する。

2. 数値計算手法

2.1 支配方程式

本研究では, 支配方程式を 2次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式と 2次元 Euler 方程式とし, 2つの場合について計算を行う。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Euler 方程式では、式(1)の保存変数と非粘性流速は以下のように表される。

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

また、圧縮性 Navier-Stokes 方程式では式(1)の保存変数と粘性流速は以下の式(3)のように表される。

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e + p)u - \tau_{xx}u - \tau_{xy}v - \kappa T_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ p + \rho v^2 - \tau_{yy} \\ (e + p)v - \tau_{yx}u - \tau_{yy}v - \kappa T_y \end{bmatrix}$$

ここで式(3)の粘性応力項と熱伝導係数は以下の式(4)のように表される。

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x) \quad (4)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu(2v_y - u_x)$$

$$\kappa = \frac{\gamma\mu}{Pr}$$

2. 2 空間離散化

本研究では、空間離散化に 5 次精度の Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes(WENO)を用いる。WENO スキームは、周囲の格子点の流束からセル境界面での流束を内挿し、以下の式(5)のように有限体積法的に積分する。流速の下付き文字*i*は*x*方向の格子点の番号、*j*は*y*方向の格子点の番号を表している。

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\hat{E}_{i+1/2} - \hat{E}_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}}{\Delta y}$$

本研究で用いる WENO スキームでは、まず Lax-Friedrich flux splitting⁽⁴⁾により、流束*E*を以下の式(6)のように、特性速度($\partial E/\partial Q$)がプラスである流束*E*⁺($\partial E^+/\partial Q \geq 0$)と、マイナスである流束*E*⁻($\partial E^-/\partial Q \leq 0$)に分割する。

$$E = E^+ + E^-$$

$$E^\pm = \frac{1}{2}(E \pm \alpha_x Q) \quad (6)$$

$$\alpha_x = R_x^{-1} \Lambda_x R_x$$

ここで、式(6)の α_x の右固有ベクトル系*R_x*、左固有ベクトル系*R_x⁻¹*、固有値 Λ_x はそれぞれ、以下の式(7)のように表される。

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ u - c & u & u + c & 0 \\ v & v & v & 1 \\ H - cu & \frac{1}{2}q^2 & H + cu & v \end{bmatrix}$$

$$R_x^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(b_1 + \frac{u}{c}) & -\frac{1}{2}(\frac{1}{c} + b_2u) & -\frac{1}{2}b_2v & \frac{1}{2}b_2 \\ 1 - b_1 & b_2u & b_2v & -b_2 \\ \frac{1}{2}(b_1 - \frac{u}{c}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{c} - b_2u) & -\frac{1}{2}b_2v & \frac{1}{2}b_2 \\ -v & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} u - c \\ u \\ u + c \\ u \end{bmatrix}$$

ここで、式(7)の*b₁*、*b₂*は以下のように表される。

$$b_1 = \frac{u^2 + v^2 \gamma - 1}{2c^2} \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2}$$

また、*y* 方向の流束*F*も同様に、以下の式(9)のように特性速度がプラスである流束*F*⁺とマイナスである流束*F*⁻に流束*F*を分割する。

$$F = F^+ + F^-$$

$$F^\pm = \frac{1}{2}(F \pm \alpha_y Q) \quad (9)$$

$$\alpha_y = R_y^{-1} \Lambda_y R_y$$

ここで、式(9)の α_y の右固有ベクトル系*R_y*、左固有ベクトル系*R_y⁻¹*、固有値 Λ_y は以下のように表される。

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ u & u & u & 1 \\ v - c & v & v + c & 0 \\ H - cv & \frac{1}{2}q^2 & H + cv & u \end{bmatrix}$$

$$R_y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(b_1 + \frac{v}{c}) & -\frac{1}{2}b_2u & -\frac{1}{2}(\frac{1}{c} + b_2v) & \frac{1}{2}b_2 \\ 1 - b_1 & b_2u & b_2v & -b_2 \\ \frac{1}{2}(b_1 - \frac{v}{c}) & -\frac{1}{2}b_2u & \frac{1}{2}(\frac{1}{c} - b_2v) & \frac{1}{2}b_2 \\ -u & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Lambda_y = \begin{bmatrix} v - c \\ v \\ v + c \\ v \end{bmatrix}$$

次に Lax-Friedrich flux splitting により分割した流束を用いて、以下の式(11)のように 3 次精度の ENO 内挿を行う。流束*E*を用いてセル界面での流束 \hat{E} を求める。この際、ステンシルをずらして複数の内挿を行う。

$$\hat{E}_{i+1/2}^{1+} = \frac{1}{6}(-E_{i+2}^- + 5E_{i+1}^- + 2E_i^-)$$

$$\hat{E}_{i+1/2}^{2+} = \frac{1}{6}(2E_{i+1}^- + 5E_i^- - 2E_{i-1}^-) \quad (11)$$

$$\hat{E}_{i+1/2}^{3+} = \frac{1}{6}(11E_i^- - 7E_{i-1}^- + 2E_{i-2}^-)$$

ここで、式(11)で用いたステンシルの滑らかさを式(12)のように求める。

$$S_1^+ = \frac{13}{12}(E_i^- - 2E_{i+1}^- + E_{i+2}^-)^2 + \frac{1}{4}(E_{i+2}^- - 4E_{i+1}^- + 3E_i^-)^2$$

$$S_2^+ = \frac{13}{12}(E_{i-1}^- - 2E_i^- + E_{i+1}^-)^2 + \frac{1}{4}(E_{i+1}^- - E_{i-1}^-)^2 \quad (12)$$

$$S_3^+ = \frac{13}{12}(E_{i-2}^- - 2E_{i-1}^- + E_i^-)^2 + \frac{1}{4}(E_i^- - 4E_{i-1}^- + 3E_{i-2}^-)^2$$

式(12)から得られたステンシルの滑らかさをもとに、重み係数 ω_k を式(13)(14)のように求める。

$$\alpha_1 = \frac{0.3}{(S_1 + \epsilon)^3}, \alpha_2 = \frac{0.6}{(S_2 + \epsilon)^3}, \alpha_3 = \frac{0.1}{(S_3 + \epsilon)^3} \quad (13)$$

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \omega_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (14)$$

式(11)で複数のステンシルから得られた ENO 内挿に対し、式(14)の重み係数により、以下の式(15)のように重み付けを行う。

$$\hat{E}_{i+1/2}^+ = \omega_1 \hat{E}_{i+1/2}^{1+} + \omega_2 \hat{E}_{i+1/2}^{2+} + \omega_3 \hat{E}_{i+1/2}^{3+} \quad (15)$$

$$\hat{E}_{i+1/2} = \hat{E}_{i+1/2}^+ + \hat{E}_{i+1/2}^- \quad (16)$$

この重み付けを行うことで、滑らかな領域では5次精度の内挿となり、不連続を含む領域でも、滑らかな領域の重みを大きくすることで、発散することなく3次精度を保つことができ、解の精度と不連続面での安定性を両立することができる。流束 \hat{F} も同様な内挿と重み付けを行う。

2. 3 埋め込み境界法

本研究では Chaudhuri らが提案した離散型埋め込み境界法を空力音解析に用いる。離散型埋め込み境界法は Fig.1 のように物体内部の格子点を Ghost Point(GP)とし、Boundary Point(BP)を中心に GP と対称となる点 Image Point(IP)をおく。ここで、IP の物理量 Q_{IP} は以下の式(17)を用いて周囲の格子点 Neighborhood Point(NP)の物理量 Q_{NP} から補間する。

$$Q_{IP} = \sum \delta_k Q_{NP_k}$$

$$\delta_k = \eta_k \left(\sum \eta_k \right)^{-1} \quad (17)$$

$$\eta_k = \frac{1}{d_k^2}$$

式(17)の d_k は IP と NP_k との距離を表している。次に、GP の物理量を IP の物理量から補間し、物体の境界で no-slip 条件または slip 条件を課す。圧縮性 Navier-Stokes 方程式では、no-slip 条件(境界の接線方向が x' 、境界の法線方向が y' 、 x' 方向の流速が u' 、 y' 方向の流速が v' である場合、 $u'[\text{BP}] = 0$ 、 $v'[\text{BP}] = 0$ 、 $\partial p[\text{BP}]/\partial y' = 0$ 、 $\partial \rho[\text{BP}]/\partial y' = 0$)を課すため、以下の式(18)のように、GP の物理量を IP の物理量から補間する。

$$\begin{aligned} u[\text{GP}] &= -u[\text{IP}] \\ v[\text{GP}] &= -v[\text{IP}] \\ p[\text{GP}] &= p[\text{IP}] \\ \rho[\text{GP}] &= \rho[\text{IP}] \end{aligned} \quad (18)$$

Euler 方程式では、物体境界で slip 条件($u'[\text{BP}]/\partial y' = 0$ 、 $v'[\text{BP}] = 0$ 、 $\partial p[\text{BP}]/\partial y' = 0$ 、 $\partial \rho[\text{BP}]/\partial y' = 0$)を課すため、式(19)のように、GP の物理量を IP の物理量から補間する。

$$\begin{aligned} u'[\text{GP}] &= u'[\text{IP}] \\ v'[\text{GP}] &= -v'[\text{IP}] \\ p[\text{GP}] &= p[\text{IP}] \\ \rho[\text{GP}] &= \rho[\text{IP}] \end{aligned} \quad (19)$$

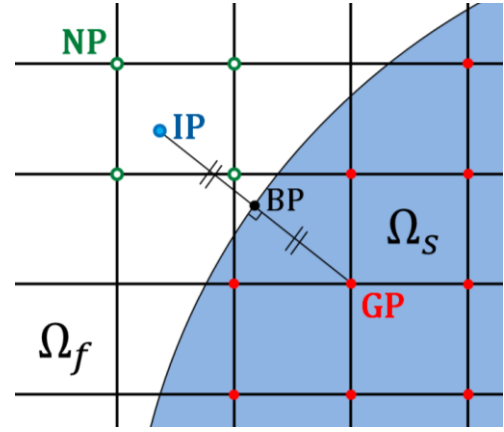


Fig. 1 Immersed Boundary Method.

2. 4 不等間隔格子

本研究では、不等間隔格子を用いる。格子点の間隔は以下の Fig. 2 のように、 i 番目の格子点で2倍に切り替える。 i 番目までの格子点間隔は Δx 、 i 番目からの格子点間隔は $2\Delta x$ とする。Fig. 2 のように青色で示した、格子点間隔が $2\Delta x$ である領域のセル界面 $x = i + 1/2$ での流束は、水色で示している $2\Delta x$ 間隔の周囲の格子点 $x = i - 4, i - 2, i, i + 1, i + 2, i + 3$ での流束から、WENO により内挿する。また、赤色で示した格子点間隔が Δx である領域のセル界面 $x = i - 1/2$ での流束は、ピンク色で示している Δx 間隔の周囲の格子点 $x = i - 3, i - 2, i - 1, i, i + 1/2, i + 1$ での流束から、WENO により内挿する。

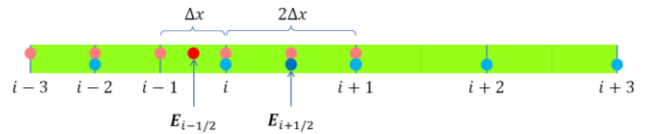


Fig. 2 Non-uniform grid.

2. 5 外部境界条件

本研究では、外部境界で音波が反射することを防ぐため、Perfect Matched Layer⁽³⁾(PML)を用いて、外部境界に無反射境界条件を課す。 x 方向に一樣流が存在する場合、外部境界のPML領域で以下の式(20)の方程式を解く。式中の \bar{E} と \bar{F} 、 \bar{G} は一樣流中の値を表している。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial[E - \bar{E}]}{\partial x} + \frac{\partial[F - \bar{F}]}{\partial y} + \sigma_x q_1 + \sigma_y q_2 \\ + \beta \sigma_x [E - \bar{E}] = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \sigma_x q_1 + \frac{\partial[E - \bar{E}]}{\partial x} + \beta \sigma_x [E - \bar{E}] = 0 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \sigma_y q_2 + \frac{\partial[F - \bar{F}]}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial t} + \sigma_x r_1 = \frac{\partial[G - \bar{G}]}{\partial x} + \beta \sigma_x [G - \bar{G}] \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \sigma_y r_2 = \frac{\partial[G - \bar{G}]}{\partial y} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、式(20)の Q, E, F, G は Q, e_1, e_2 ($e_1 = \frac{\partial G}{\partial x}$, $e_2 = \frac{\partial G}{\partial y}$)から求められる。ここで e_1, e_2 は、それぞれ以下の式(21)で求められる。

$$G = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{\partial G}{\partial x} - \sigma_x r_1 + \beta \sigma_x [G - \bar{G}] \quad (21)$$

$$e_2 = \frac{\partial G}{\partial y} - \sigma_x r_2$$

さらに、式(21)の σ_x と β はそれぞれ以下の式(22)から求められる。

$$\sigma_x = 20 \times \left| \frac{x - x_0}{D} \right|^4 \quad (22)$$

$$\beta = \frac{\bar{u}}{1 - \bar{u}^2}$$

式(22)の D は PML 領域の厚さの格子点数を、 \bar{u} は x 方向の一様流速を表している。本研究では $D = 20$ として計算を行う。

2. 6 時間積分

本研究では、時間発展に 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いる。時間微分項を以下の式(23)のように置く。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f(t, Q) \quad (23)$$

このとき、以下の式(24)を用いて時間発展を行う。

$$k_1 = f(t_n, Q_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Q_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Q_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (24)$$

$$k_4 = f(t_n + h, Q_n + hk_3)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

3. 円柱から発生するエオルス音の解析

3. 1 問題設定

埋め込み境界法を用いて、2次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式を解き、円柱周りの流れの解析を行う。Fig.2のように、一様流の向きを x 軸の正方向としたデカルト座標系に、原点を中心とした直径 L の円柱を配置する。計算領域は円柱の直径の 200 倍とする。各物理量は円柱の直径 L 、静止媒体中の音速 c_0 、密度 ρ_0 で無次元化し、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、プラントル数 $Pr = 0.74$ 、レイノルズ数 $Re = 150$ 、一様流マッハ数 $M = 0.2$ として計算を行う。

$$M = \frac{U_0}{c_0}$$

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu} \quad (24)$$

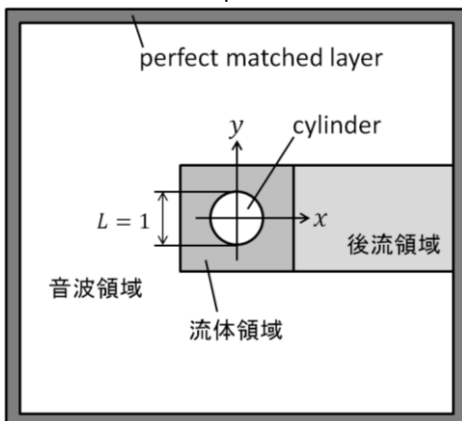


Fig. 2 Computational domain.

3. 2 計算条件

計算領域は $-100 \leq x \leq 100$, $-100 \leq y \leq 100$ 、格子点数は 1500×1160 とする。計算格子は円柱の遠方で格子点間隔が大きくなるような非一様格子を用いる。円柱近傍の流体領域では境界層内の渦構造を捉えるため十分細かい格子を使用する。その外側の音波領域では、音波を捉えることが可能な粗い格子を使用する。また、音波領域のうち、円柱の後流領域では、渦構造を捉えるため、音波領域よりやや細かい格子を使用する。格子の領域と格子点間隔を以下の Table 1 に示す。時間刻みは $\Delta t = 0.005$ とする。

Table 1 Computational grid parameters

領域	領域幅	格子幅
流体領域	$-2 \leq x \leq 2$ $-2 \leq y \leq 2$	$\Delta x = \Delta y = 0.01$
後流領域	$2 \leq x \leq 50$ $-2 \leq y \leq 2$	$\Delta x = \Delta y = 0.08$
音波領域	$-100 \leq x \leq 100$ $-100 \leq y \leq 100$	$\Delta x = \Delta y = 0.32$

3. 3 計算結果

$t = 200$ における円柱近傍の渦度場を Fig.3 に示す。図から円柱の上面側からは青色の負の渦度領域、下面側からは赤色の正の渦度領域が交互に放出されている様子を示している。この結果から、埋め込み境界法と WENO を組み合わせた計算手法によって、カルマン渦列の形成が捉えられていることが確認できる。また、 $t = 200$ における圧力場を Fig.4 に示す。赤色の領域は静止圧力より高い値、青色の領域は静止圧力より低い値を表している。図から円柱の上面側と下面側で正負の圧力変動が交互に生じ、圧力波が音波として伝播していく現象が捉えられている。結果から、埋め込み境界法と WENO を組み合わせた計算手法により音波を捉えられることが確認できる。

次に、得られた音波を定量的に評価するために、Fig.5 に示した観測点 $(r, \theta) = (80, \pm 90^\circ), (80, \pm 45^\circ), (80, \pm 135^\circ)$ における圧力変動の時系列を Fig.6 に示す。Fig.6 から円柱の上下で音波の位相が半周期ずれて、圧力が周期的に変動していることが確認できる。

さらに、振幅を圧力変動の 2 乗平均値 $Prms$ により評価する。円柱からの距離依存性を調べるため、観測点 $(r, \theta) = (20, \pm 90^\circ), (30, \pm 90^\circ), (40, \pm 90^\circ), (80, \pm 90^\circ)$ における $Prms$ を Fig.7 に示す。Fig.7 から $Prms$ が線形音波理論から導かれる距離依存性 $r^{-1/2}$ に従うことが確認できる。

3. 4 BFC による比較

音波を定量的に評価するために、埋め込み境界法 (IBM) による計算結果と物体適合格子 (BFC) による計算結果を比較する。観測点 $(r, \theta) = (80, \pm 90^\circ), (80, \pm 45^\circ), (80, \pm 135^\circ)$ における IBM と BFC による計算結果の圧力変動の時系列を Fig.8 に示す。結果から IBM と BFC による計算結果はよく一致していることが確認できる。

さらに IBM と BFC の $Prms$ の周方向分布を Fig.9 に示す。この結果からも IBM と BFC による計算結果はよく一致していることが確認でき、IBM の結果の定量的な妥当性が示された。

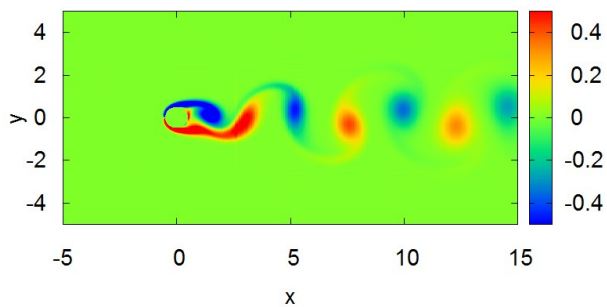


Fig. 3 Instantaneous vorticity field.

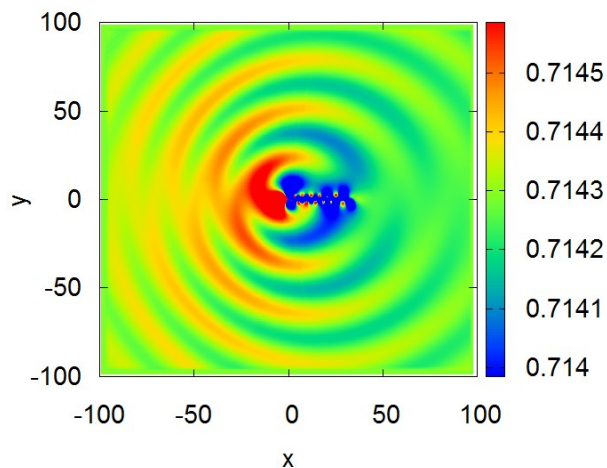


Fig. 4 Instantaneous pressure field.

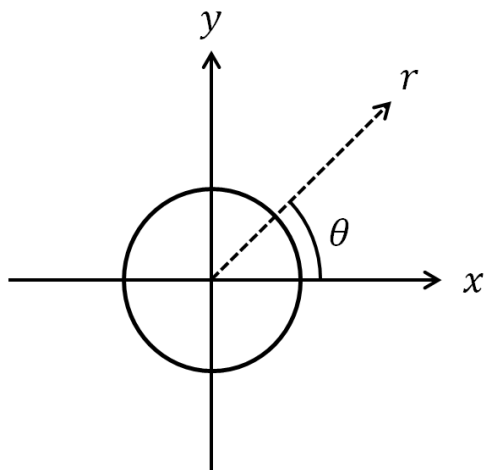
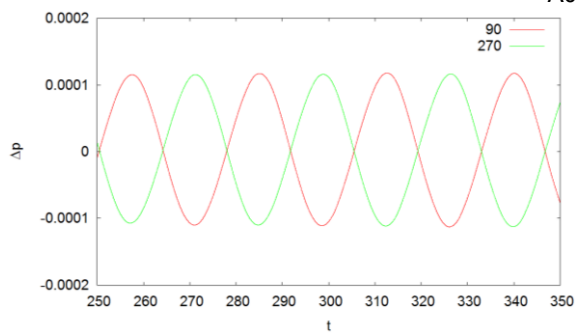
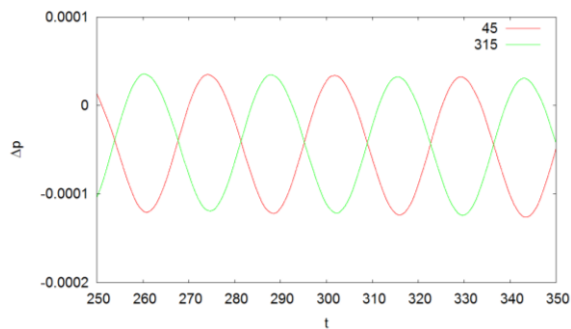


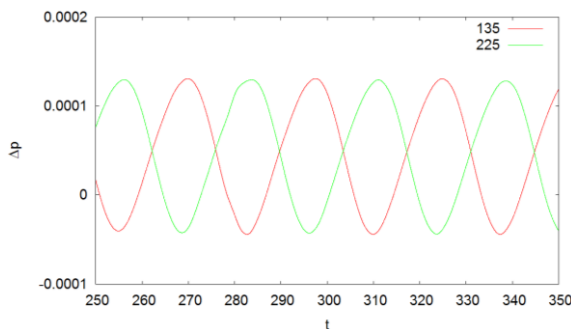
Fig. 5 Schematic diagram of the flow model.



(a) $r = 80, \theta = 90^\circ, 270^\circ$



(b) $r = 80, \theta = 45^\circ, 315^\circ$



(c) $r = 80, \theta = 135^\circ, 225^\circ$

Fig. 6 Time histories of the pressure fluctuation.

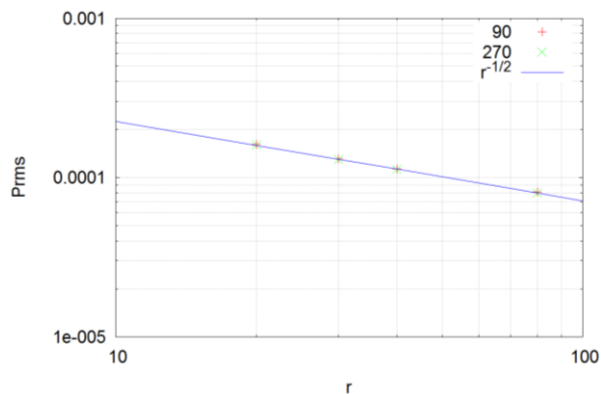
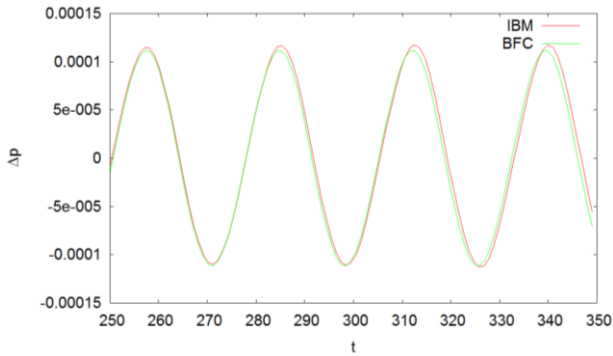
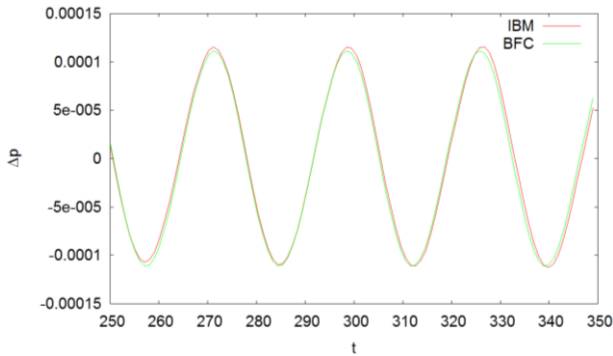


Fig. 7 Decay of fluctuation pressure waves.



(a) $r = 80, \theta = 90^\circ$



(b) $r = 80, \theta = 270^\circ$

Fig. 8 Time histories of the pressure fluctuation.

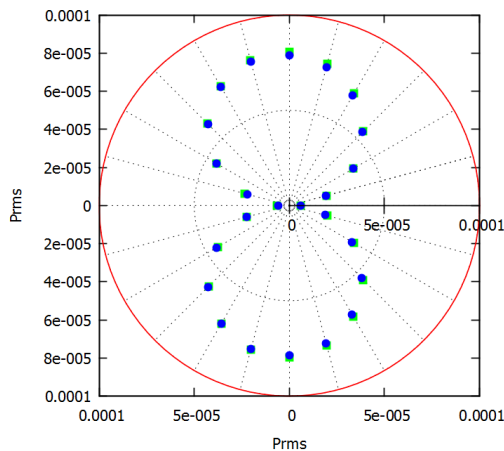


Fig. 9 Polar plots of the root mean square of the fluctuation pressure.
(■:IBM, ●:BFC)

4. 円柱から発生する渦音の解析

4.1 問題設定

埋め込み境界法を用いて、2次元 Euler 方程式を解き、円柱を通過する渦対の流れの解析を行う。原点を中心とした直径 L の円柱を配置し、 y 方向に進む渦対を Fig.10 のように配置する。初期条件における渦対の位置と渦核半径は Table2 に示す。計算領域は円柱の直径の 100 倍とする。各物理量は円柱の直径 L 、静止媒体中の音速 c_0 、密度 ρ_0 で無次元化し、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、プラントル数 $Pr = 0.74$ 、計算を行う。渦対のマッハ数は渦対の速度場の最大値を用いて式(25)のように表す。

$$M = \frac{U_{max}}{c_0} \quad (25)$$

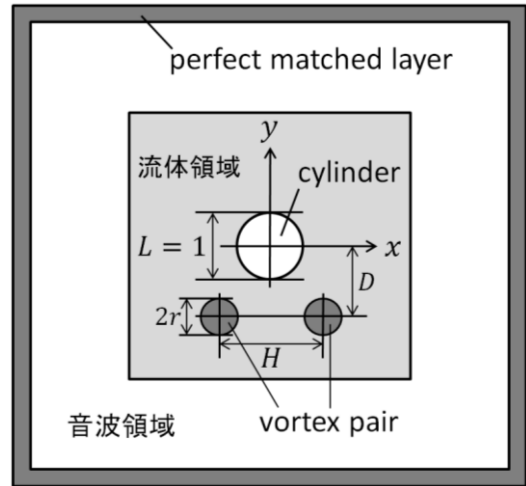


Fig. 10 Computational domain

Table 2 Initial condition.

初期位置	D	4
渦対間隔	H	$0.5 \times \pi$
渦核半径	r	$0.1 \times \pi$

4.2 計算条件

格子点数は 1760×1760 、計算領域は $-50 \leq x \leq 50$ 、 $-50 \leq y \leq 50$ とする。計算格子は円柱の遠方で格子点間隔が大きくなるような非一様格子を用いた。円柱近傍の流体領域では、十分細かい格子を使用し、その外側の音波領域では、粗い格子を使用する。格子の領域と格子幅を Table3 に示す。時間刻みは $\Delta t = 0.005$ とする。

Table 3 Computational grid parameters.

領域	領域幅	格子幅
流体領域	$-6 \leq x \leq 6$ $-6 \leq y \leq 6$	$\Delta x = \Delta y = 0.01$
音波領域	$-50 \leq x \leq 50$ $-50 \leq y \leq 50$	$\Delta x = \Delta y = 0.16$

4.3 計算結果

$M = 0.2$ の場合の円柱近傍の渦度場を Fig.11 に示す。渦対がそれぞれ円柱の左右を通過して y 方向へ進行していることが確認できる。また、 $M = 0.2$ の場合の圧力場を Fig.12 に示す。渦対が円柱を通過する際に、円柱の上下に音波が伝播する様子を捉えていることが確認できる。

次に、マッハ数 $M = 0.1$ 、 $M = 0.2$ 、 $M = 0.3$ の場合の計算を行い、得られた音波を定量的に評価するために、Fig.5 に示した観測点 $(r, \theta) = (80, \pm 90^\circ)$ における圧力変動の時系列を Fig.13 に示す。図から円柱の上側と下側に音波が逆位相で伝播していることが確認できる。

さらに、観測点 $(r, \theta) = (80, \pm 90^\circ)$ における圧力変動の振幅のマッハ数依存性を Fig.14 に示す。Fig.14 から音圧の振幅がマッハ数依存性 $M^{2.5}$ に従うことが確認できる。

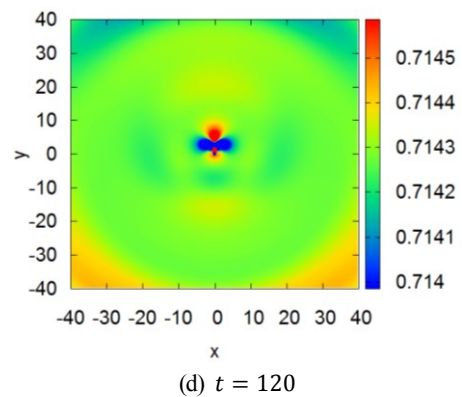
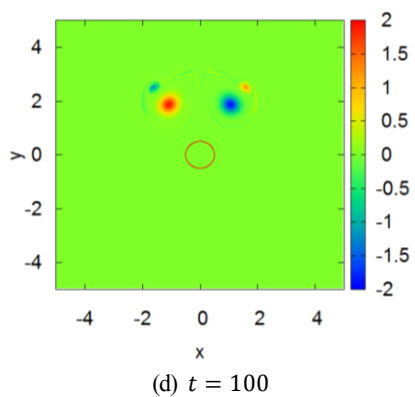
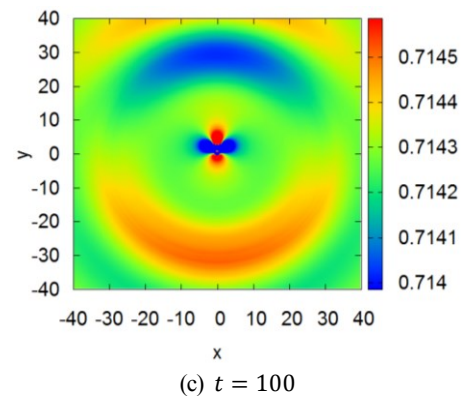
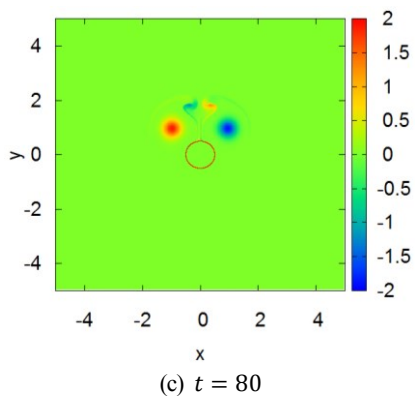
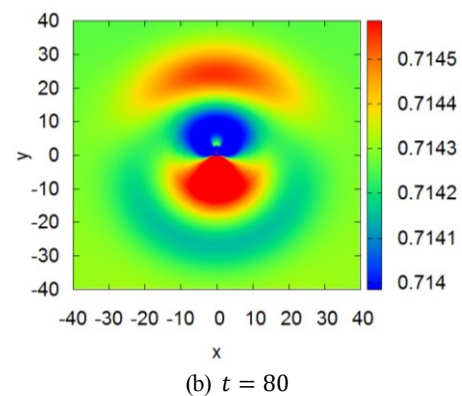
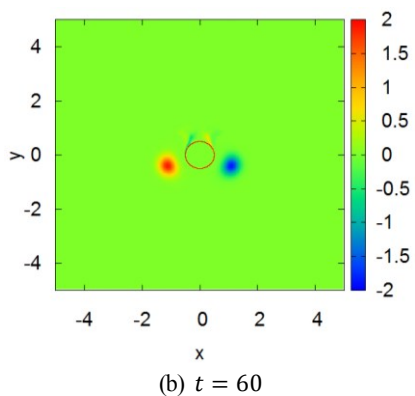
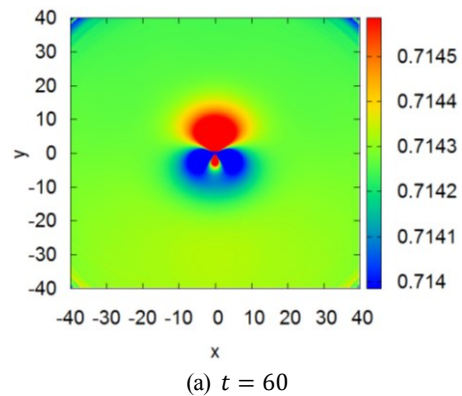
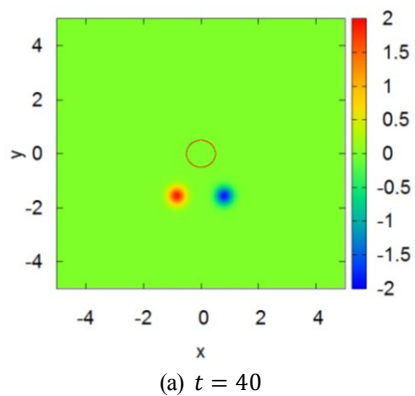
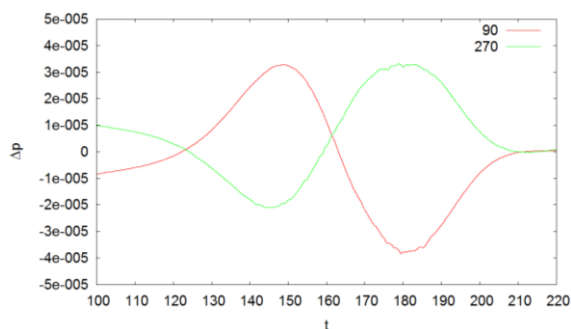
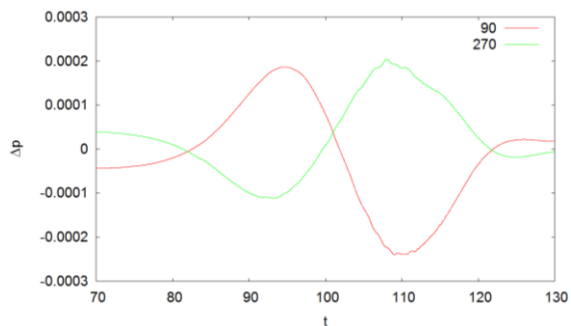


Fig. 11 Instantaneous vorticity field.

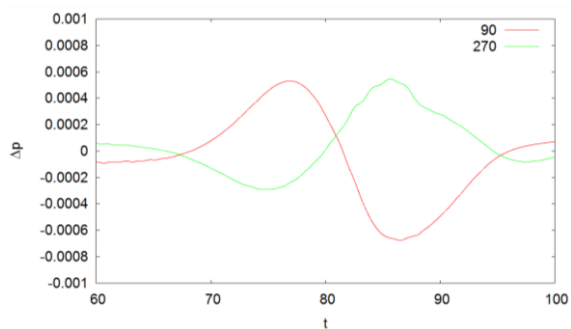
Fig. 12 Instantaneous pressure field.



(a) $M = 0.1, r = 80, \theta = 90^\circ, 270^\circ$



(b) $M = 0.2, r = 80, \theta = 90^\circ, 270^\circ$



(c) $M = 0.3, r = 80, \theta = 90^\circ, 270^\circ$

Fig. 13 Time histories of the pressure fluctuation.

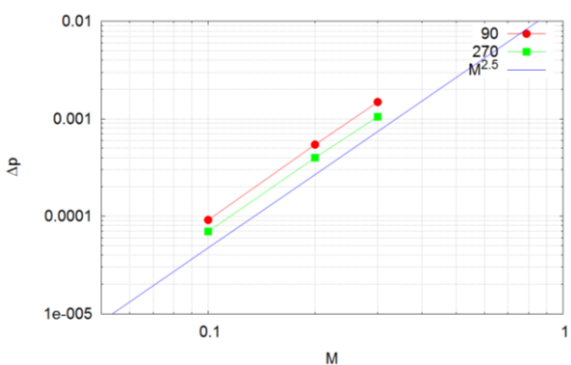
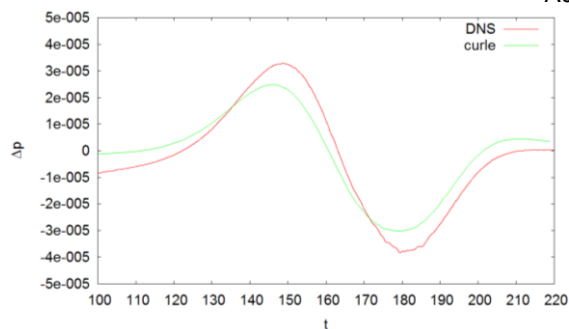
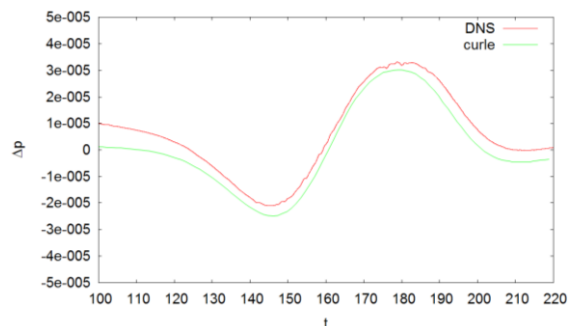


Fig. 14 Fluctuation pressure waves.

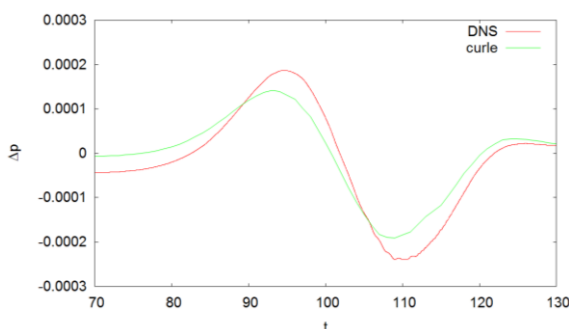


(a) $r = 80, \theta = 90^\circ$

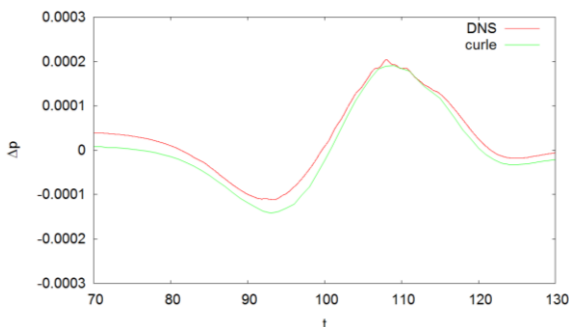


(b) $r = 80, \theta = 270^\circ$

Fig. 15 Time histories of the pressure fluctuation. ($M = 0.1$)



(a) $r = 80, \theta = 90^\circ$

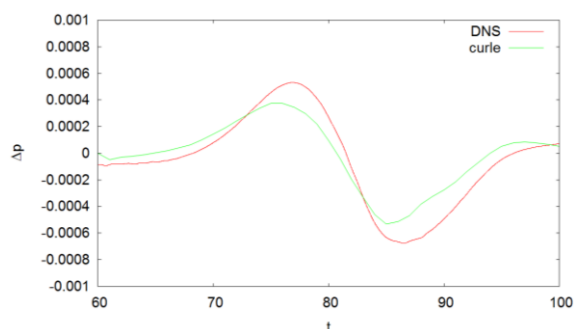


(b) $r = 80, \theta = 270^\circ$

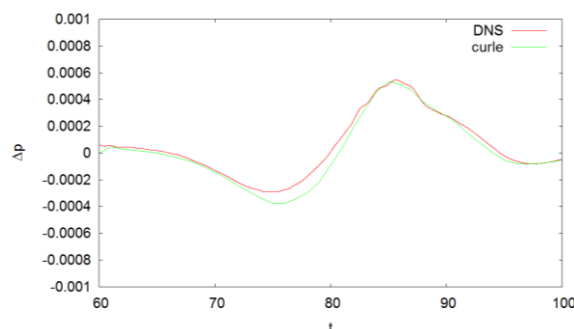
Fig. 16 Time histories of the pressure fluctuation. ($M = 0.2$)

4. 3 Curle の式による予測の比較

得られた音波を定量的に評価するために、観測点(r, θ) = $(80, \pm 90^\circ)$ における圧力時系列を、Curle の式による予測と比較した結果を Fig. 15, Fig. 16, Fig. 17 に示す。図から DNS の計算結果と Curle の式による予測との間に多少誤差があるものの、両者はまずまず一致しており、計算結果の定量的な妥当性が示された。



(a) $r = 80, \theta = 90^\circ$



(b) $r = 80, \theta = 270^\circ$

Fig. 17 Time histories of the pressure fluctuation. ($M = 0.3$)

5. 結言

本研究では、埋め込み境界法と WENO を組み合わせた計算手法を用いて円柱から発生するエオルス音と渦音の解析を行った。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 本研究の計算手法により、2次元 Navier-Stokes 方程式を解き、円柱から発生するカルマン渦とエオルス音を捉えることに成功した。BFC による結果と比較し、定量的な妥当性が得られた。
- (2) 本研究の計算手法により、2次元 Euler 方程式を解き、円柱から発生する渦音を捉えることに成功した。Curle の式による予測と比較し、定量的な妥当性が得られた。

参考文献

- (1) A. Chaudhuri, A. Hadjadj, A. Chinnayya, J. Comput. Phys., **230**, 1731-1748(2011)
- (2) Y. Xing, C. W. Shu, J. Comput. Phys., **208**, 206-227(2005)
- (3) Fang Q. Hu, X. D. Li, D. K. Lin, J. Comput. Phys., **227**, 4398-4424(2008)
- (4) 藤井孝蔵：流体力学の数值計算法，東京大学出版会，1994