

# ISPH 法による液滴液膜衝突のシミュレーション

## Simulations of Droplet Impact onto a Liquid Surface Using Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics Method

- 九里 真弘, 阪大工院, 吹田市山田丘 2-1, E-mail: kuri@gcom.mech.eng.osaka-u.ac.jp  
 山口 康隆, 阪大工, 吹田市山田丘 2-1, E-mail: yamaguchi@mech.eng.osaka-u.ac.jp  
 香川 勝, 大日本印刷, つくば市緑ヶ原 1-1-3, E-mail: kagawa-m5@mail.dnp.co.jp  
 中島 但, 大日本印刷, つくば市緑ヶ原 1-1-3, E-mail: nakajima-t12@mail.dnp.co.jp  
 藤村 秀夫, 大日本印刷, つくば市緑ヶ原 1-1-3, E-mail: fujimura-h@mail.dnp.co.jp  
 Masahiro Kuri, Department of Mechanical Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita  
 Yasutaka Yamaguchi, Department of Mechanical Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita  
 Masaru Kagawa, Dai Nippon Printing Co., Ltd., 1-1-3 Midorigahara, Tsukuba  
 Tadashi Nakajima, Dai Nippon Printing Co., Ltd., 1-1-3 Midorigahara, Tsukuba  
 Hideo Fujimura, Dai Nippon Printing Co., Ltd., 1-1-3 Midorigahara, Tsukuba

In this study, the whole process of liquid droplet impact onto a liquid surface up to the consequent formation of the central column was simulated using ISPH (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics) method. The ISPH method uses a pressure Poisson equation to satisfy the incompressibility constraints, and solves the pressure field implicitly using a fractional-step projection method of solving the Navier-Stokes equations. The simulation results for the impact of a droplet onto a film of an identical liquid were compared with the experimental ones using a high-speed video camera, and it was shown that, the simulated time series of the crater depth, diameter, crown height and the rebound motion corresponded quantitatively well with the experiment.

### 1. 緒言

ミルククラウンに代表される液滴の液膜への衝突現象は、Worthington<sup>(1)</sup>によって古くより研究がなされてきた。この現象は、単に視覚的に興味深いのみならず、インクジェットプリンタや原子炉内部など幅広いスケールで見られる工学的に重要なものであり、その制御などの観点から現象の解明が求められている。このような液滴と液膜の衝突については、高速カメラによる実験的観察や、VOF 法や MPS 法を用いた数値解析により研究が行われており、当グループでもこれまでに SPH 法を用いた数値解析を行ってきた<sup>(2)</sup>。

SPH 法は、連続体モデルに基づく粒子法のひとつであり、流体運動を離散化した粒子の挙動として扱う。これまで主に宇宙物理学などの圧縮性流れのシミュレーションに適用されてきたが、近年、非圧縮流れへの適用が進められており、陽解法に基づく WCSPH (Weakly Compressible SPH)法や半陰解法に基づく ISPH (Incompressible SPH)法などが提案されている。これらの手法は、格子法では取り扱いが困難である自由界面の大変形や合体、分裂などの解析に用いられており、当グループではこれまで WCSPH 法を用いて液滴液膜の衝突のシミュレーションを試みてきた<sup>(2)</sup>。しかしこの手法は圧力を陽的に解くため時間刻みを非常に小さくする必要があり、あるいは圧力が大気圧以下となる際に粒子間に働く引力により数値的に不安定となるなどの問題がある。その一方、ISPH 法は、Poisson 方程式を解いて近傍粒子との圧力の差として陰的に圧力勾配項を計算するため、上記のような問題は生じないと考えられる。本研究では ISPH 法を用いて液滴液膜衝突の解析を行った。さらにシミュレーションと実験結果の比較により、本手法の妥当性について検討した。

### 2. 計算方法

#### 2.1. ISPH 法の計算方法

ISPH 法では連続の式と Navier-Stokes 方程式から各粒子の位置と速度を算出するが、その際に Helmholtz-Hodge 分解を用い、速度を分離し、二段階での更新を行う。まず第一段階では、粒子  $a$  の速度と位置について、以下の式(1)、(2)により圧力勾配項以外を陽的に計算する。

$$\mathbf{v}_a^f = \mathbf{v}_a^n + \left\{ \sum_b m_b \zeta \left( \frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} \right) \frac{2\mu_a \mu_b}{\mu_a + \mu_b} \frac{\mathbf{v}_{ab}^n \cdot \mathbf{r}_{ab}^n}{|\mathbf{r}_{ab}^n|^2 + \eta^2} \nabla W_{ab}^h \right. \quad (1)$$

$$\left. + \sum_b m_b \left( \frac{\mathbf{S}_a}{\rho_a^2} + \frac{\mathbf{S}_b}{\rho_b^2} \right) \nabla W_{ab}^h + \mathbf{g} \right\} \Delta t$$

$$\mathbf{r}_a^f = \mathbf{r}_a^n + \mathbf{v}_a^f \Delta t \quad (2)$$

ただし、式(1)の右辺第 2-4 項は各々粘性項<sup>(3)</sup>、表面張力項、体積力項である。 $\mathbf{v}, \mathbf{r}, m, \rho, \mu, \mathbf{S}, \mathbf{g}, \Delta t$  は各々粒子の速度、位置、質量、密度、粘性係数、表面張力テンソル、重力加速度、時間刻みであり、速度や位置の上付き添え字  $n, f$  は各々  $n$  ステップ目および第一段階が終了した時点を示す。また、粒子  $a$  と  $b$  の相対量を  $\mathbf{v}_{ab}$  などと表す。 $\zeta, \eta$  は各々人工粘性の強さを表す係数、不安定性解消の為の極小値であり、 $\zeta = 5, \eta = 0.1h$  とした。 $W_{ab}^h$  は円滑化された物理量を示すカーネル関数であり、 $h$  を分布の広がり範囲の基準長さとした距離  $r$  の関数で表される。本研究ではこれに次式の 3 次スプライン関数を用いた。

$$W(r) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{r}{h} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{r}{h} \right)^3, & 0 \leq r < h \\ \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{r}{h} \right)^3, & h \leq r < 2h \\ 0, & 2h \leq r \end{cases} \quad (3)$$

また式(1)において粒子  $a$  の密度  $\rho_a$  は次式により求めた。

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}^h \quad (4)$$

なお、本研究では、粘性項について角運動量の保存を満たす Cleary ら<sup>9)</sup>の粘性項を用いた。また、基準粒子間隔  $d_0$  に対し、 $h = 1.3d_0$  としたが、次に述べる表面張力項について表面の形状をより正確に捉えるため、通常より長いカーネル長さ  $H(= 2.5h)$  を用いた。

表面張力項は自由エネルギー理論に基づき導出する。自由エネルギーとして次式に示す Cahn-Hilliard model<sup>4)</sup>を用いる。

$$\Psi = \int_V \left[ \psi(\phi) + \frac{\kappa}{2} |\nabla\phi|^2 \right] dV \quad (5)$$

ここで  $\psi, \kappa$  は各々、二井戸形式の関数、界面厚さに関する係数を表す。 $\phi$  は界面において連続的に変化する物性値に相当する指標関数であり、本研究では次式に示す粒子の体積充填度を用いた。

$$\phi_a = \sum_b W_{ab}^H \quad (6)$$

$\kappa$  の値は表面張力係数と表面付近の体積充填度の勾配の積分値から決定される。式(5)の右辺第 1 項は相分離、第 2 項は相界面積の減少に対応するが、本研究では第 1 項は用いていない。表面張力は自由エネルギー  $\Psi$  の勾配として導かれ、表面張力テンソル  $\mathbf{S}$  は次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$\mathbf{S} = \kappa |\nabla\phi|^2 \mathbf{I} - \kappa \nabla\phi \otimes \nabla\phi \quad (7)$$

なお、 $\mathbf{I}$  は単位行列を表す。

これらを用いて第一段階で陽的に位置を更新した後の密度を  $\rho^F$  とすると、基準密度  $\rho_0$  と一致しない。そのため、第二段階ではこれが基準密度  $\rho_0$  となるように圧力を求め、速度と位置の修正を行う。具体的には、次式の Poisson 方程式を解き、圧力  $p$  を陰的に求める。

$$\sum_b m_b \frac{8}{(\rho_a^F + \rho_b^F)^2} \frac{\mathbf{r}_{ab}^F \cdot \nabla W_{ab}^h}{|\mathbf{r}_{ab}^F|^2 + \eta^2} (p_a^{n+1} - p_b^{n+1}) = \frac{\rho_0 - \rho_a^F}{\rho_0 \Delta t^2} \quad (8)$$

式(8)は未知数  $p_a^{n+1}$  に対する連立方程式であり、これを解くことで次ステップにおける圧力が求まる。連立方程式の解法は PCG(Preconditioned Conjugate Gradient)法を用いた。得られた圧力  $p_a^{n+1}$  を用いて式(9)より圧力勾配項を計算することで速度を修正し、式(10)より次ステップにおける位置を算出する。

$$\mathbf{v}_a^{n+1} = \mathbf{v}_a^F - \left\{ \sum_b m_b \left( \frac{p_a^{n+1}}{(\rho_a^F)^2} + \frac{p_b^{n+1}}{(\rho_b^F)^2} \right) \nabla W_{ab}^h \right\} \Delta t \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_a^{n+1} = \mathbf{r}_a^n + \frac{(\mathbf{v}_a^n + \mathbf{v}_a^{n+1})}{2} \Delta t \quad (10)$$

## 2.2. 固体壁の境界条件

本研究では、固体壁として基準粒子間隔  $d_0$  の格子点上に粒子を配置したものを用いる。壁面上で non-slip 境界条件を与えた。また圧力の Neumann 境界条件を満たすために、流体粒子と接する最上層の壁粒子のみ流体粒子と同様に式(8)を解き、それ以外の壁粒子の圧力は上記の最上層と最も近い粒子と等しくした。

## 2.3. 自由表面境界条件

本研究では、Marrone ら<sup>10)</sup>により提唱された SPH 法における界面粒子の判別法を用い、自由表面にある粒子を決定した。自由表面境界としてこれらの粒子に圧力の Dirichlet 境界条件  $p_a^{n+1} = 0$  を与えるのが自然であるが、これを行うと式(9)より界面粒子間で圧力勾配による力がゼロとなり、結果として次ステップの密度は

基準密度  $\rho_0$  とならず、計算が不安定化する。そのため本研究では、自由表面で圧力ゼロと非圧縮条件の両者を満足するように Dirichlet 境界条件の代わりに次式を用いた<sup>7)</sup>。

$$\sum_b m_b \frac{8}{(\rho_a^F + \rho_b^F)^2} \frac{\mathbf{r}_{ab}^F \cdot \nabla W_{ab}^h}{|\mathbf{r}_{ab}^F|^2 + \eta^2} (2p_a^{n+1} - p_b^{n+1}) = \frac{\rho_0 - \rho_a^F}{\rho_0 \Delta t^2} \quad (11)$$

## 3. 計算条件

本研究では、液滴と液膜の流体としてグリセリン水溶液を用い、密度  $\rho_0 = 1100 \text{ kg/m}^3$ 、粘性係数  $\mu = 3.5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、表面張力係数  $\sigma = 0.067 \text{ N/m}$  とした。

液滴の初期配置作成の前段階として、直径  $4.0 \text{ mm}$  の球の内側に、Poisson Disk Sampling 法<sup>8)</sup>を用いて基準粒子間隔  $d_0 = 0.25 \text{ mm}$  で粒子をランダムに配置した後、基準密度  $\rho_0$  からの標準偏差が  $0.1 \text{ kg/m}^3$  以下となるまで最適化問題の解法による計算を行った<sup>9)</sup>。その後、初期速度をゼロとし、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5} \text{ s}$  で平衡状態に至るまで緩和計算を行ったものを初期配置とした。液滴の衝突速度は  $300, 500 \text{ mm}$  の位置からの自由落下速度である  $U_0 = 2.42, 3.13 \text{ m/s}$  の 2 種類について計算を行った。また液膜は固体壁面上に液膜厚さ  $10 \text{ mm}$  となるように、液滴と同様の操作を行い初期配置の作成を行った。なお、液膜面水平方向に周期境界条件を課し、計算セルサイズは  $40 \times 40 \text{ mm}^2$  とした。また、時間刻みは系内の粒子の最大速度に応じて  $5.0 \times 10^{-6}$  から  $2.0 \times 10^{-5} \text{ s}$  の範囲で可変とした。

## 4. 結果と考察

衝突速度  $U_0 = 3.13 \text{ m/s}$  における液滴液膜衝突のシミュレーションと実験結果の各時刻  $t$  におけるスナップショットを各々図 1(i)-(iii)と図 1(iv)に示す。ただし、図 1(ii)は図 1(i)の液滴成分のみを表しており、図 1(iii)は衝突軸を含む紙面垂直方向厚さ  $1 \text{ mm}$  の断面図を示している。また実験では、液膜成分の挙動を確認するため、液滴のみ食紅を用いて着色しており、これとの比較のためシミュレーションでも成分を色分けした。

まず、シミュレーションによる定性的な外観の再現性について注目する。実験結果より、液滴が液膜に衝突した直後、衝突の衝撃により 2 次飛沫が飛散し[図 1(b)], 王冠状の円筒構造(クラウン)を押し上げながら半球状のクレーターを拡大させる[図 1(c)]。シミュレーションでは 2 次飛沫は確認されないものの、それ以外の挙動は図 1(i)(b),(c)と概ね一致している。また、液滴成分の挙動はクレーターの成長過程において、クレーター底部に多くが貼りつくように存在し、上部の水平面に近い部分には液滴成分が少ないことがシミュレーションで再現できている[図 1(d)]。その後、重力によりクラウンは降下し、クレーターは深さの復元を始めるが、シミュレーションではクレーターが半球状に保っているのに対し、実験結果では大きく歪んだ状態になっている[図 1(e)]。その後、クレーターの回復による中心向きの流れによって Worthington ジェットを形成するが、ここでジェット内部には液滴成分が多く含まれており、ジェット下方の液膜内に糸を引くように液滴成分が残っていることも再現できている[図 1(f)]。また、WCSPH 法を用いた西尾らの先行研究<sup>2)</sup>で不一致であった回復後のジェットの高さもシミュレーションと実験結果で一致が見られた。

次に、シミュレーション結果と実験結果の定量的な比較を行う。ここでは、初期液面からの最高点とクレーターの最下点、初期液面部分におけるクレーターの直径を各々クラウン高さ  $H$ 、クレーター深さ  $D$ 、クレーター直径  $\phi$  とし、 $U_0 = 2.42, 3.13 \text{ m/s}$  の場合の  $H, D, \phi$  の比較を各々図 2(i)-(iii)に示す。なお、 $U_0 = 2.42, 3.13 \text{ m/s}$  のシミュレーション結果を各々破線と実線で示し、実験結果を各々三角点、四角点で表した。

まず、クラウン高さに関するシミュレーションと実験結果の比

較を行う。図 2(i)より  $U_0 = 3.13 \text{ m/s}$  の場合は実験結果と比べてシミュレーションの方が低いクラウンが形成されるが、どちらの衝突速度の場合も衝突後 10 ms で最高点を迎え、その後緩やかにクラウンが降下しており、時間スケールにおける一致は見られた。

次に、クレーター深さに関しては図 2(ii)よりどちらの衝突速度の場合も衝突後 15 ms で最大深さに到達し、その後一定時間最大深さを保持する。クレーターの進入速度、最大深さともにシミュレーションと実験結果は良く一致しており、先行研究<sup>2)</sup>で不一致であった回復速度も改善された。

また、クレーター直径については図 2(iii)よりどちらの衝突速度の場合も衝突後緩やかに拡大し、 $U_0 = 2.42 \text{ m/s}$  では 10-15 ms、 $U_0 = 3.13 \text{ m/s}$  では 20-30 ms で拡大が収まるが、その後、初期より遅い速度で再び拡大を続ける。このようなクレーター直径の拡大傾向は実験結果とシミュレーションで良い一致が見られた。

以上のシミュレーション結果と実験結果の定性的、定量的比較より衝突過程およびクレーター回復過程における本手法の現象の再現性が確認できた。衝突直後の二次飛沫の形成、クレーター回復時の気液界面形状の不一致の原因として解像度の不足が原因として考えられる。

### 5. 結言

ISPH 法を用いて液滴液膜の衝突のシミュレーションを行い、実験結果と比較した。衝突後のクラウンやクレーターの衝突過程やその後のクレーターの回復過程を正確に再現した。今後は前述の解像度の検証、および本手法と擬似圧縮性解法である WCSPH 法で計算したものととの計算精度の比較を行い、圧力算出の違いが計算精度に与える影響の検証を予定している。

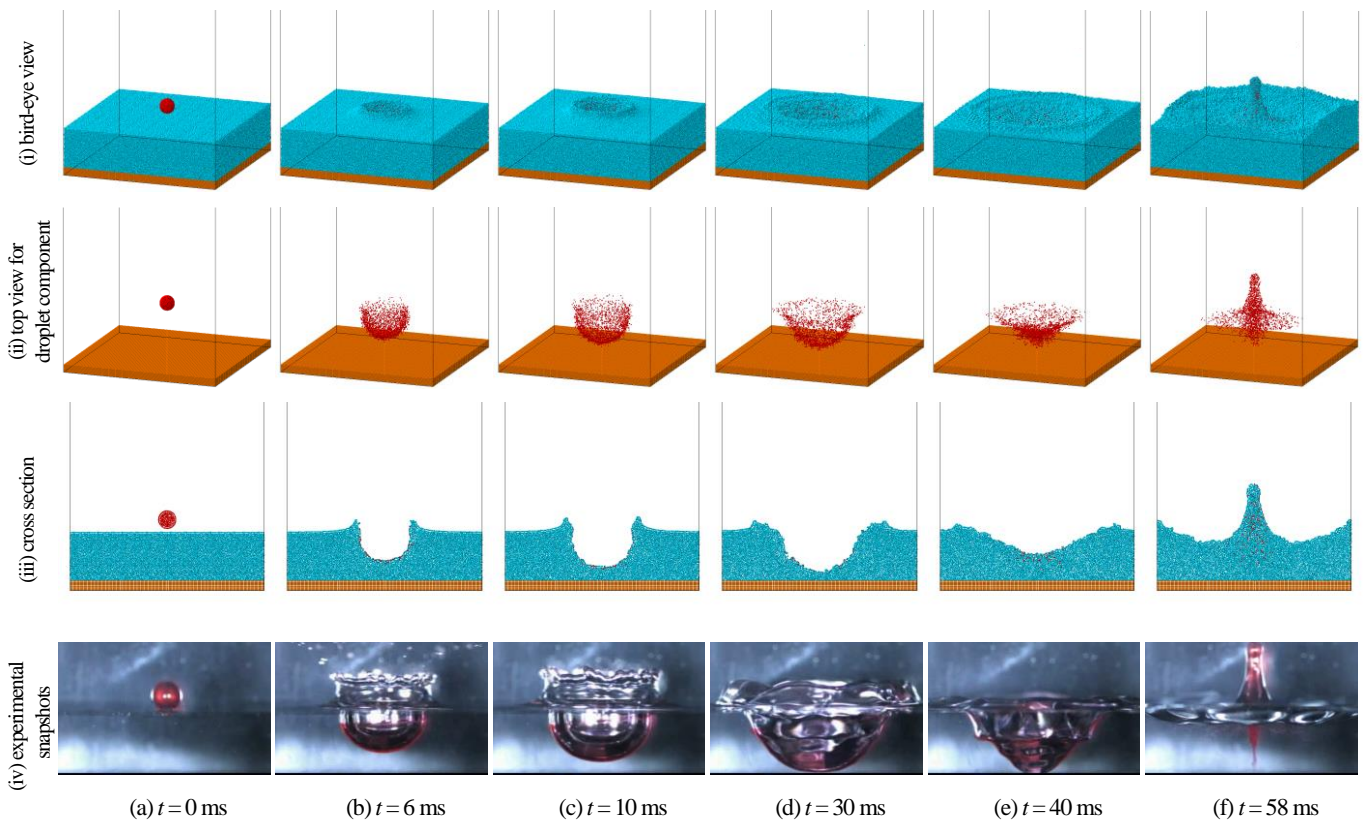


Fig. 1 Simulation snapshots of the droplet impact onto a liquid surface as (i) bird-eye view, (ii) top view for droplet component and (iii) 1 mm cross section, and (iv) experimental snapshots of the droplet impact onto a liquid surface ( $U_0 = 3.13 \text{ m/s}$ ).

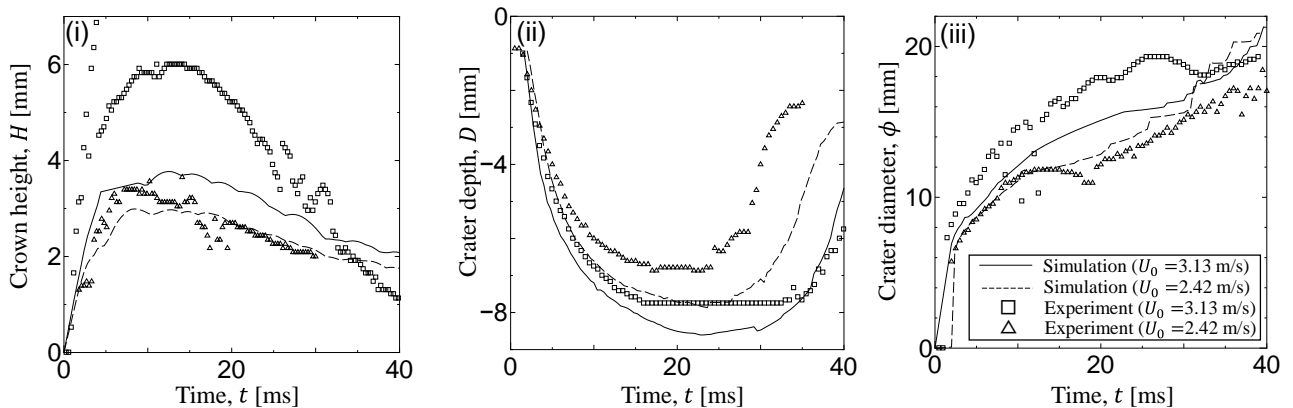


Fig.2 Comparison of simulation and experiment regarding (i) crown height, (ii) crater depth, and (iii) crater diameter.

参考文献

- (1) Worthington, A.M., "A study of splashes," Longmans, Green and Co., London (1908).
- (2) Nishio, N., Yamana, K., Yamaguchi, Y., Inaba, T., Kuroda, K., Nakajima, T., Ohno, K., and Fujimura, H., "Large-scale SPH simulations of droplet impact onto a liquid surface up to the consequent formations of Worthington jet," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 63 (2010), pp. 1435-1447.
- (3) Cleary, P.W. and Ha, J., "Three-dimensional smoothed particle hydrodynamics simulation of high pressure die casting of light metal components," *J. Light Metals*, 2 (2002), pp. 169-183.
- (4) Anderson, D.M. and Mcfadden, G.B., "Diffuse-interface method in fluid mechanics," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 (1998), pp. 139-165.
- (5) 橋本, 山田, 山口, 酒井, 中島, 藤村, 黒田, "表面張力, 界面張力差を考慮した異種液滴間衝突の SPH シミュレーション," *混相流*, 25 (2012), pp. 451-458.
- (6) Marrone, S., Colagrossi, A., Le Touzé, D. and Graziani, G., "Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers," *J. Comp. Physics*, 229 (2010), pp. 3652-3663.
- (7) Bøckmann, A., Shipilova, O. and Skeie, G., "Incompressible SPH for free surface flows," *Comp. Fluids*, 67 (2012), pp. 138-151.
- (8) Schechter, H., and Bridson, R., "Ghost SPH for animating water," *ACM Trans. Graphics*, 31 (2012), pp. 61:1-8.
- (9) 九里, 山口, "最適化問題解法による粒子の再配置を適用した SPH 法の開発," 第 27 回 計算力学講演会, (2014), No.147.