非圧縮性流体に対する圧力時間２次精度の解法について

On the methods with $O(\delta t^2)$ pressure for incompressible flows

○　岩津 玲磨, 電機大, 〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5 番, E-mail：iwatsu@cck.dendai.ac.jp
Reima IWATSU, Tokyo Denki University, 5 Senju-Asahi-cho, Adachi-ku, Tokyo 120-8551

A projection method which assures $O(\delta t^2)$ accuracy for the pressure is proposed. Proposed method is compared with several other projection methods.

1. はじめに

縮まない流れで圧力が不要な場合には射影法 [1] が効率よい解法を与える．しかし，圧力を必要とする場合に，Gresho[2, 3] の分類による P1 法をもちいると圧力の時間誤差が 1 次精度となる．圧力の時間誤差を 2 次精度とするためには P2 法 [3, 4] をもちいる必要がある．ここでは，陽的ルンゲ・クッタ法を時間積分法として採用する場合の P2 法について，いくつかの方法を比較検討し，低容量ルンゲ・クッタ法に対する P2 法を提案する．

2. 計算方法

2.1 支配方程式と初期・境界条件

縮まない粘性流体をあつかう．領域を Ω，境界を $\partial\Omega$ とする．簡単のために，ここでは境界を通しての流入，流出のない場合を考える．初期条件として

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$
$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{2}$$

を与える．式 (2) を条件に入れてあるために大局的適合条件

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{3}$$

はみたされている．

時刻 $t > 0$ において

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{4}$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - \nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\,\mathbf{v} \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{5}$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{6}$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{t} = \mathbf{b} \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{7}$$

とする．初期時刻 $t = 0$ において，境界に沿った方向の速度成分に対する境界条件 (7) がみたされることは必要ない [2, 3, 7]．しかし，物体表面に垂直な方向の速度成分がゼロになる (式 2) ことは，ナビエ・ストークス方程式の解が存在するために必要である [3, 7, 17]．

2.2 時間積分法

初期値問題

$$f_t = F(f) \tag{8}$$

に対して，$f_0 = f(t)$, $F_0 = F(t)$, $Q_0 = F_0$, $F_i = F(f_i)$ とすると，低容量ルンゲ・クッタ法は

$$Q_i = A_i Q_{i-1} + F_{i-1} \tag{9}$$
$$f_i = f_{i-1} + B_i \Delta t\, Q_i \tag{10}$$

$i = 1, \cdots, s$, と書かれる．$f_s = f(t+\Delta t)$ である．Williamson[10] が推薦する 3 段 3 位の係数は $B_1 = 1/3$, $B_2 = 15/16$, $B_3 = 8/15$, $A_1 = 0$, $A_2 = -5/9$, $A_3 = -153/128$ である．各段の時刻を表わす係数は $c_1 = 1/3$, $c_2 = 3/4$, $c_3 = 1$ である．これは以下の関係式による．これらの式は式 (9,10) をテイラー展開することによって得られる．

$$c_1 = B_1 \tag{11}$$
$$c_2 = B_1 + B_2(A_2+1) \tag{12}$$
$$c_3 = B_1 + B_2(A_2+1) + B_3(A_3(A_2+1)+1) \tag{13}$$

また文献 [12] には Jameson[11] の 3 段 3 位ルンゲ・クッタ法

$$f_i = f_0 + c_i \Delta t F_{i-1} \tag{14}$$

$i = 1, \cdots, 3$, $c_1 = 1/3$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$, が射影法にもちいられているので，比較検討する．Jameson の方法は特に簡単であるが，各段で f_0 から出発するので，f_0 を保存しておく必要がある．

2.3 射影法 (P2)

簡単のために $\mathbf{N} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$, $\mathbf{L} = \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v}$, $D = \nabla\cdot\mathbf{v}$ とおくことにする．$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t^n)$, $p_0 = p(t^n)$, c_i は上述のルンゲ・クッタ法の係数を表わす．また $i\,(= 1, \cdots, s)$ は段数を表わす．ここで提案する方法では，ルンゲ・クッタ法の 1 段目を PPE によって計算する．2,3 段目には増分形射影法を適用して，圧力は ϕ の値をもちいて更新する．境界条件は各段の実時刻を考慮して splitting 誤差が $O(\Delta t^2)$ の範囲におさまるように指定する [13]．

以下の P2-RK3-1 は 2,3 段目での圧力の更新を 1 段目からの圧力増分によっておこなう．

P2-RK3-1

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^n, \quad p_0 = p^n, \quad \phi_0 = 0$$

$i = 1$

$$\begin{cases} \Delta\ p_0 = \frac{\tilde{D}_0}{c_i\,\Delta t} - \nabla\cdot\mathbf{N}_0 \\ \nabla\ p_0\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \left(-\dot{\mathbf{b}}(t^n) - \mathbf{N}_0 + \mathbf{L}_0\right)\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_0 = -\mathbf{N}_0 + \mathbf{L}_0 - \nabla\,p_0$$
$$\mathbf{Q}_1 = A_1\,\mathbf{Q}_0 + \mathbf{F}_0$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + B_1\,\Delta t\,\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0 \\ \mathbf{v}_1\cdot\tau|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}(t^n + c_1\,\Delta\,t)\cdot\tau\,|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

$i = 2, 3$

$$\mathbf{F}_{i-1} = -\mathbf{N}_{i-1} + \mathbf{L}_{i-1} - \nabla\,p_{i-1}$$
$$\mathbf{Q}_i = A_i\,\mathbf{Q}_{i-1} + \mathbf{F}_{i-1}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_{i-1} + B_i\,\Delta t\,\mathbf{Q}_i \\ \tilde{\mathbf{v}}_i\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0 \\ \tilde{\mathbf{v}}_i\cdot\tau|_{\partial\Omega} = [\,\mathbf{b}(t^n + c_i\,\Delta\,t) + c_i\Delta t\,\nabla\,\phi_{i-1}\,]\cdot\tau\,|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\ \phi_i = \frac{\tilde{D}_i}{c_i\,\Delta t}\\ \nabla\,\phi_i\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i - c_i\Delta\,t\,\nabla\,\phi_i \tag{15}$$

$$p_i = p_0 + \phi_i \tag{16}$$

P2-RK3-2 は圧力の更新を 1 段目からではなく，前段からの圧力増分によっておこなう．誤差を小さくする効果を期待して，より短い時間間隔 $(c_i - c_{i-1})\Delta\,t$ における圧力増分を利用するものである．

P2-RK3-2

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}^n, \quad p_0 = p^n, \quad \phi_0 = 0$$

$i = 1$

$$\begin{cases}\Delta\ p_0 = \frac{\tilde{D}_0}{c_i\,\Delta t} - \nabla\cdot\mathbf{N}_0\\ \nabla\,p_0\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \left(-\dot{\mathbf{b}}(t^n) - \mathbf{N}_0 + \mathbf{L}_0\right)\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega}\end{cases}$$

$$\mathbf{F}_0 = -\mathbf{N}_0 + \mathbf{L}_0 - \nabla\,p_0$$

$$\mathbf{Q}_1 = A_1\,\mathbf{Q}_0 + \mathbf{F}_0$$

$$\begin{cases}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + B_1\,\Delta t\,\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0\\ \mathbf{v}_1\cdot\tau|_{\partial\Omega} = \mathbf{b}(t^n + c_1\,\Delta\,t)\cdot\tau\,|_{\partial\Omega}\end{cases}$$

$i = 2, 3$

$$\mathbf{F}_{i-1} = -\mathbf{N}_{i-1} + \mathbf{L}_{i-1} - \nabla\,p_{i-1}$$

$$\mathbf{Q}_i = A_i\,\mathbf{Q}_{i-1} + \mathbf{F}_{i-1}$$

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_{i-1} + B_i\,\Delta t\,\mathbf{Q}_i\\ \tilde{\mathbf{v}}_i\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0\\ \tilde{\mathbf{v}}_i\cdot\tau|_{\partial\Omega} = [\,\mathbf{b}(t^n + c_i\,\Delta\,t) + (c_i - c_{i-1})\Delta t\,\nabla\,\phi_{i-1}\,]\cdot\tau\,|_{\partial\Omega}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\ \phi_i = \frac{\tilde{D}_i}{(c_i - c_{i-1})\,\Delta t}\\ \nabla\,\phi_i\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i - (c_i - c_{i-1})\Delta\,t\,\nabla\,\phi_i \tag{17}$$

$$p_i = p_{i-1} + \phi_i \tag{18}$$

3. おわりに

計算結果は当日発表予定である．

参考文献

(1) Chorin, A. J., Numerical solution of the Navier-Stokes equations, Math. Comput. **22** (1968) 745.

(2) Gresho, P.M., Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues, Annu. Rev. Fluid Mech., **23** (1991) 413-53.

(3) Gresho, P.M. and Sani, R.L., On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations, Int. J. Num. Methods Fluids, **7** (1987) 1111-1145.

(4) Gresho, P.M., On The Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and Its Implementation via A Finite Element Method That Also Introduces A Nearly Consistent Mass Matrix. Part 1: Theory, Int. J. Num. Methods Fluids, **11** (1990) 587-620.

(5) Shen, J., A Remark on The Projection-3 Method, Int. J. Num. Methods Fluids, **16** (1993) 249-253.

(6) LeVeque, R. J. and Oliger, J., Numerical Methods Based on Additive Splittings for Hyperbolic Partial Differential Equations, Math. Comput., **40** (1983) 469-497.

(7) Temam, R., Remark on the Pressure Boundary Condition for the Projection Method, Theoret. Comput. Fluid Dyn., **3** (1991) 181-184.

(8) Van Kan, J., A Second-order Accurate Pressure-Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow, SIAM J. Sci. Stat. Comput., **7** (1986) 870-891.

(9) Kim, J. and Moin, P., Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, J. Comput. Phys., **59** (1985) 308-323.

(10) Williamson, J. H., Low-Storage Runge-Kutta Schemes, J. Comput. Phys., **35** (1980) 48-56.

(11) Jameson, A., Success and challenges in computational aerodynamics, AIAA-paper 87-1184 (1987).

(12) Vreman, A. W., The projection method for the incompressible Navier-Stokese quations: The pressure near a no-slip wall, J. Comput. Phys., **263** (2014) 353-374.

(13) Iannelli, P. and Denaro, F. M., Analysis of the local truncation error in the pressure-free projection method for incompressible flows: a new accurate expression of the intermediate boundary conditions, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **42** (2003) 399-437.

(14) Denaro, F. M., On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **43** (2003) 43-69.

(15) Guermond, J. -L. and Quartapelle, L., On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **26** (1998) 1039-1053.

(16) Liu, M., Ren, Y.-X. and Zhan, H., A class of fully second order accurate projection methods for solving the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., **200** (2004) 325-346.

(17) Marra, A., Mola, A. , Quartapelle, L. and Riviello, L., Calculation of impulsively started incompressible viscous flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **46** (2004) 877-902.

(18) Liu, J.-G., Liu, J. and Pego, R., L., Stable and accurate pressure approximation for unsteady incompressible viscous flow, J. Comput. Phys., **229** (2010) 3428-3453.

(19) Zheng, Z. and Petzold, L., Runge-Kutta-Chebyshev projection method, J. Comput. Phys., **219** (2006) 976-991.

(20) Yang, B. and Prosperetti, A., A second-order boundary-fitted projection method for free-surface flow computations, J. Comput. Phys., **213** (2006) 574-590.

(21) Owen, H. and Codina, R., A third-order velocity correction scheme obtained at the discrete level, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **69** (2012) 57-72.

(22) Steinmoeller, D. T., Stastna, M. and Lamb, K. G., A short note on the discontinuous Galerkin discretization of the pressure projection operator in incompressible flow, J. Comput. Phys., **251** (2013) 480-486.