

# B05-1 真の全マッハスキームに向けた SLAU 系スキーム及び SMAC 的陰解法

SLAU Type Flux and SMAC like Implicit Time Integration Schemes toward the True All Mach Scheme

○嶋英志, JAXA/JEDI, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, [shima.eiji@jaxa.jp](mailto:shima.eiji@jaxa.jp)  
北村圭一, 横浜国立大学, 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5, [kitamura@ynu.ac.jp](mailto:kitamura@ynu.ac.jp)  
Eiji Shima, JAXA/JEDI, 3-1-1, Yoshinodai, Sagami-hara, Kanagawa, Japan  
Keiichi Kitamura, Yokohama National University, 79-5, Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, Kanagawa, Japan

Compressible Navier-Stokes equation is theoretically the governing equation of fluid at all speed range. Low Mach number flows, however, have been treated as incompressible flows and CFD solver used for compressible and incompressible flows are quite different. On the other hand, current all speed compressible CFD scheme has ability to be applied to very low Mach number flows that have been traditionally treated as incompressible flows. However, some problems, such as a treatment of sound, wiggles found in very low Mach number flows or definition of the cut-off Mach number, still remain. We propose new compressible all speed CFD scheme named SMUC (SMAC inspired Mach Uniform Compressible scheme). Numerical examples are shown for simple low Mach number flows and one-dimensional sound propagation.

## 記号

$c$	: 音速
$e$	: 体積当たり全エネルギー
$e_i$	: 体積当たり内部エネルギー
$\hat{\mathbf{E}}$	: セル境界垂直の非粘性流束
$\tilde{\mathbf{E}}$	: セル境界垂直の数値非粘性流束
$h$	: エンタルピー
$\dot{m}$	: 質量流束 $\rho Vn$
$M$	: マッハ数
$Mc$	: カットオフマッハ数
$\mathbf{n}$	: セル境界法線ベクトル $(x_n, y_n, z_n)$
$\hat{\mathbf{R}}$	: セル境界垂直粘性流束
$\tilde{\mathbf{R}}$	: セル境界垂直数値粘性流束
$p$	: 圧力
$\tilde{p}$	: セル境界数値圧力
$\mathbf{Q}$	: 保存変数 $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T$
$s$	: 面積もしくはエントロピー
$t$	: 時間
$\mathbf{u}$	: 速度ベクトル
$Vn$	: セル境界垂直速度
$V$	: セル体積
$x, y, z$	: デカルト座標
$\text{diff}(q)$	: 差分オペレータ $(q_R - q_L)/2$
$\text{ave}(q)$	: 平均オペレータ $(q_R + q_L)/2$
$\rho$	: 密度
$\mu$	: 分子粘性係数
$\mu_T$	: 乱流粘性係数
下付き	
$i$	: セルインデックス
$ij$	: セル $i$ の $j$ 番目のセル境界
$L$	: セル境界の左側
$R$	: セル境界の右側

## 1. はじめに

全ての実在流体は圧縮性を有するので、原理的には、圧縮性 NS 方程式は、全てのマッハ数における流体の支配方程式である。しかし、日常の水の流れ等、低マッハ数流れでは、密度がほぼ一定とみなせることから、非圧縮を仮定した非圧縮性 NS 方程式が用い

られるのが普通である。方程式が違っているため、その数値解法においても、両者で基本的スキームが異なっており、歴史的に違った進化を遂げている。<sup>[1-4]</sup>

低マッハ数の流れ場は、ほぼ非亜圧縮性 NS 方程式に従うが、音波が共存する場合、これを取り扱うことは出来ない。流れから発生する音は、音と流れを別に扱う分離解法でも対処可能であるが、音が流れ場に影響する現象では、低マッハ数流れと音波の同時解法が必要である。気柱共鳴やエンジン燃焼器内の燃焼振動の問題などがそれにあたる。

圧縮性 CFD 解析 (密度ベースソルバー) を低マッハ数流れに適用するには、

- (a) 音速と移流速度の大きな比によるスティッフネス
- (b) 数値スキームに含まれる低マッハ数の移流には過大な数値散逸
- (c) 圧力や密度などの変動量が非常に小さくなることによる丸め誤差

等の問題がある。この中で(c)は、変動量を変数にするなどで解決可能なため、本質的な問題は(a)(b)である。

課題(a)(b)に対し、時間微分前処理法<sup>[5,6]</sup>や、その概念を活用した陰解法<sup>[7]</sup>、圧縮性 CFD スキームに含まれる数値散逸を低マッハ数で適切に制御する全速度 Riemann 流束等の開発により、制限はあるものの、圧縮性 CFD によっても、非圧縮に近い低マッハ数流れ場を計算することが可能となった。<sup>[9,11]</sup>しかしながら、マッハ数が低下するほど、圧力に対する散逸が強くなり、圧縮性スキームに期待される音波の計算が十分できないことや、流れ場毎に必要な  $Mc$ (カットオフマッハ数)の調整等の課題が残されている。

また、一方、非圧縮 CFD の流れをくむ、圧力ベースソルバーによっても、同時解析が実現されている。<sup>[10]</sup>しかし、上記の密度ベースソルバーと同様の圧縮性 CFD の衝撃波解像度・堅牢性を実現するには、困難を伴うのではないかと考える。また、密度ベースソルバーも、陰解法の簡略化の工夫などにより、圧力ベースソルバーと、かなり似たスキームになるが、マッハ数 0 でも両者は一致せず、微妙な差が残る点も謎である。

本研究の動機と目的は二つある。

- (1) 互いの関係が分かりにくい、密度ベースと圧力ベースの圧縮性 CFD を、既存の  $\delta$  形式陰解法、有限体積法など密度ベースソルバーの枠組みの中で統合する。
- (2) 圧力ベースソルバーの特徴を活用することで、 $Mc$ の調整なしに、任意の低マッハ数流れと音波の同時解析を可能とする

新ソルバー-SMUC(SMAC inspired Mach Uniform Compressible scheme)を提示する。

SMUC は、これまで様々な有効なスキームが構築されてきた陰的 MUSCL(Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws)の枠組みの中で、 $\delta$  形式の陰解法と SLAU 系の Riemann 流束からなる。

まず、エントロピー変数で書かれた  $\delta$  形式陰解法の近似因数分解の工夫により、非圧縮性 CFD における SMAC 法<sup>2)</sup>と、ほぼ同じスキームが導けることを示す。(ここでは GC-SMAC(Generalized Compressible SMAC) と呼ぶ)

次に、SLAU 系 Riemann 流束の改良により、音波の計算能力を保持したまま、不要な振動を防ぐことが出来る新しい Riemann 流束: UD(Uniform Dumping)-SLAU を提案する。また、UD-SLAU に含まれる数値散逸の GC-SMAC との親和性も示す。

本論文では、SMUC の定式化の提示後、いくつかの数値例でその有効性を示す。

## 2. エントロピー変数での基礎方程式と SMAC 的陰解法

低マッハ数での圧縮性 CFD の効率的な計算の鍵は、大きな Courant 数の利用を可能とする陰解法である。GC-SMAC の導出のために、エントロピー変数を用いた圧縮性 NS 方程式からスタートする。

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{R}_u = 0 \quad (1)$$

$$p_t + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + R_p = 0 \quad (2)$$

$$s_t + \mathbf{u} \cdot \nabla s + R_s = 0 \quad (3)$$

$$\partial s \equiv \partial p - c^2 \partial \rho \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_u = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

$$R_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial e_i}\right)_\rho \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q})\right) \quad (6)$$

$\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}$  は各々粘性テンソル、熱流束ベクトルである。粘性項の取り扱いは、通常と同じなので詳細は省略する。次に空間方向は微分のまま残して、時間方向に陰解法を用いて半離散化する。

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^{n+1} - \theta_1 \mathbf{u}^n + \theta_2 \mathbf{u}^{n-1} + \delta t' \left\{ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \mathbf{R}_u^{n+1} \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & p^{n+1} - \theta_1 p^n + \theta_2 p^{n-1} + \delta t' \left\{ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla p^{n+1} + (\rho c^2)^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} + R_p^{n+1} \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$s^{n+1} - \theta_1 s^n + \theta_2 s^{n-1} + \delta t' \left\{ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla s^{n+1} + R_s^{n+1} \right\} = 0 \quad (9)$$

$$(\theta_1, \theta_2) = \left( \frac{2\theta + 2}{\theta + 2}, \frac{\theta}{\theta + 2} \right) \quad (10)$$

$$\delta t' = \frac{2}{\theta + 2} \delta t \quad (11)$$

$\theta=1$  の時、時間 2 次精度、 $\theta=0$  のとき時間一次精度である。

非線形方程式を解くため  $u^{n+1}$  等についての Newton 反復を導入する。Newton 反復回数カウンタを  $k$  とし、簡略化のため、係数の

上付き  $k$  を省略し、 $\delta t'$  を単に  $\delta t$  と書く。

$$\delta \mathbf{u} + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right\} = \delta \mathbf{u}^* \quad (12)$$

$$\delta p + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta p + \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial R_p}{\partial p} \delta p \right\} = \delta p^* \quad (13)$$

$$\delta s + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s + \frac{\partial R_s}{\partial s} \delta s \right\} = \delta s^* \quad (14)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} \equiv \mathbf{u}^k + \delta \mathbf{u} \quad (15)$$

$$p^{k+1} \equiv p^k + \delta p \quad (16)$$

$$s^{k+1} \equiv s^k + \delta s \quad (17)$$

ここで、左辺粘性項は固有値などを用いた近似化の利用を意識して簡略化している。また、右辺は次の様に定義される。

$$\delta \mathbf{u}^* \equiv \mathbf{u} - \theta_1 \mathbf{u}^n + \theta_2 \mathbf{u}^{n-1} - \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{R}_u \right\} \quad (18)$$

$$\delta p^* \equiv p - \theta_1 p^n + \theta_2 p^{n-1} - \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + R_p \right\} \quad (19)$$

$$\delta s^* \equiv s - \theta_1 s^n + \theta_2 s^{n-1} - \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla s + R_s \right\} \quad (20)$$

上付き添え字のないものはニュートン反復の  $k$  ステップ目の値を用いる。左辺は、近似的には、任意の変数のセットでの離散化からの変数変換で得られる。具体例については 4 節で述べる。

式(12-14)を解いて得られたエントロピー変数の変化量を保存変数等の変化量に変換し、物理量を更新して反復を行う。収束すれば右辺=0 が成立し、これは、式(7-9)の陰解法が成立していることを意味する。現実的には適切な閾値を設けるとか反復回数を指定する。

右辺の微分オペレータを近似因数分解し、次の 2 ステップで解く。(Appendix B 参照)

第一ステップ(移流):

$$\delta \mathbf{u}^{**} + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^{**} + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^{**} \right\} = \delta \mathbf{u}^* \quad (21)$$

$$\delta p^{**} = \delta p^* \quad (22)$$

$$\delta s^{**} + \delta t \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s^{**} + \frac{\partial R_s}{\partial s} \delta s^{**} \right\} = \delta s^* \quad (23)$$

第二ステップ(圧力):

$$\delta \mathbf{u} + \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p = \delta \mathbf{u}^{**} \quad (24)$$

$$\delta p + \delta t \left( \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = \delta p^{**} \quad (25)$$

$$\delta s = \delta s^{**} \quad (26)$$

式(22)を式(23)に代入;

$$\begin{aligned} & \delta p + \delta t \left( \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \left( \delta \mathbf{u}^{**} - \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \right) \\ & = \delta p^{**} \end{aligned} \quad (27)$$

整理し、左辺には様々な近似が許容されるので、密度差分に近似を加えて、

$$\begin{aligned} \delta p + \delta \left( \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p - \delta^2 c^2 \nabla \cdot \nabla \delta p \\ = \delta p^{**} - \delta \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{**} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)を解いて得られた圧力変動分を式(24)に代入して、最終的な速度変動分を得る。エントロピー変数ベクトルの変動分が得られたら、再び、保存変数等に変換して次時間ステップに進む。

この手法は、左辺と右辺の差分近似が同じで、 $C \rightarrow \infty$ の場合には、非圧縮性流体解析で用いられる SMAC 法と、ほぼ同じスキームに帰着し、SMAC 法を特殊な例として含む一般化とみなせるので、ここでは GC-SMAC (Generalized Compressible SMAC) と呼ぶ (Appendix A)

また、式(21)-(26)で示される、二段解法は因数分解誤差の観点から、低マッハ数領域では最良の選択であることを示すことができる。(Appendix B)

### 3. 第二ステップの数値解法

左辺の離散化において、第一ステップは、移流速度での移流と拡散のみであり、移流速度を特性速度とした LU-SGS<sup>[4]</sup>等を用いれば特に困難はない。時間微分前処理を含む様々な圧縮性陰解法等が、第二ステップの Stiffness 回避のための計算法の違いで説明されることが示される。(Appendix C)

第二ステップに関して、非粘性の場合、式(28)に対し構造格子にも非構造格子にも適用可能な離散化手法として有限体積法を用いると、次のように書ける。(保存系ではない。)

$$\begin{aligned} \delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \mathbf{u}_i \cdot \sum_j \delta p_{i,j} \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} - \frac{c^2 \Delta t^2}{V} \sum_j \nabla \delta p_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} \\ = R.H.S. \end{aligned} \quad (29)$$

また、次式の関係及び、定義を用いる。

$$\sum_j \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} = 0 \quad (30)$$

$$V_{ni,j} \equiv \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} \quad (31)$$

圧力の移流を風上化し、セル境界の値を次の様に定義する。

$$\delta p_{i,j} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} = \frac{V_{ni,j} + |V_{ni,j}|}{2} \delta p_i + \frac{V_{ni,j} - |V_{ni,j}|}{2} \delta p_j \quad (32)$$

$$(\nabla \delta p \cdot \mathbf{n})_{i,j} = \frac{\delta p_j - \delta p_i}{\Delta h_{i,j}} \quad (33)$$

ここで  $\Delta h_{i,j}$  は、セル中心間の距離のセル境界垂直ベクトルへの射影距離である。

これらを用いると式(29)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left[ \frac{|V_{ni,j}|}{2} \delta p_i + \frac{V_{ni,j} - |V_{ni,j}|}{2} \delta p_j + c^2 \Delta t \frac{\delta p_i - \delta p_j}{\Delta h_{i,j}} \right] ds_{i,j} \\ = R.H.S. \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、下記の関係を用いた。

$$\sum_j V_{ni,j} ds_{i,j} = 0 \quad (35)$$

また、式(34)は次のように書き直すことができる。

$$\delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left[ \frac{\sigma_{i,j}}{2} \delta p_i + \frac{\hat{V}_{ni,j} - \sigma_{i,j}}{2} \delta p_j \right] ds_{i,j} = R.H.S. \quad (36)$$

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + 2Cn l_{i,j} c \quad (37)$$

$$Cn l_{i,j} = \frac{c \Delta t}{\Delta h_{i,j}} \quad (38)$$

ここで、 $Cn l$  は音速ベースの局所クーラン数に相当する。これは、LU-SGS 等に用いられる圧縮性 CFD の数値散逸がスペクトル半径；

$$\sigma = |V_n| + c \quad (39)$$

に比例することと比較すると、音速が  $2Cn l$  倍された形になっている。

圧力に対する右辺離散化にも、スキームに内在する数値散逸が含まれることや、粘性の簡易的な扱いを考慮して、最終的に  $\sigma$  を次のように定義する。

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + d_\mu + c \max(2Cn l_{i,j}, 1) \quad (40)$$

$$d_\mu = \frac{2(\mu + \mu_T) ds_{i,j}}{\rho_i V_i} \quad (41)$$

また、式(24,28)の評価に必要な下記の項は、中心差分的に次のように評価する。

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{**} \approx \frac{1}{2V} \sum_j \nabla \delta \mathbf{u}_j^{**} \cdot \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} \quad (42)$$

$$\nabla \delta p \approx \frac{1}{2V} \sum_j \delta p_j \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} \quad (43)$$

### 4. 右辺の評価

GC-SMAC は  $\delta$ 形式で書かれているので、右辺には安定性や精度の異なる様々な離散化を用いることができる。ここでは、保存変数に対する MUSCL 有限体積法の例を示す。

圧縮性 Navier-Stokes 方程式は積分形式で次のように書ける。

$$\iiint \mathbf{Q}_i dv + \iint (\hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{R}}) ds = 0 \quad (44)$$

本論では非粘性流束の評価に集中する。非粘性流束は次のように書ける。

$$\hat{\mathbf{E}} = \dot{m} \Phi + p \mathbf{N} \quad (45)$$

$$\dot{m} = \rho V_n \quad (46)$$

$$\Phi = (1, u, v, w, h)^T \quad (47)$$

$$\mathbf{N} = (0, x_n, y_n, z_n, 0)^T \quad (48)$$

$$h = (e + p) / \rho \quad (49)$$

これを多面体 (二次元では多角形) の計算セルに適用することにより、構造/非構造格子に共通の有限体積法の基礎式が得られる。

$$\bar{\mathbf{Q}}_i + \frac{1}{V_i} \sum_j (\tilde{\mathbf{E}}_{i,j} - \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}) ds_{i,j} = 0 \quad (50)$$

流束が正確な平均であれば式は厳密である。MUSCL では、セル内再構築で高精度を実現し、一般には、不連続を含む、セル境界の左右の物理量から Riemann 流束を用いて非粘性流束を計算する。

エントロピー変数での右辺、式(18-20)は、エントロピー変数ベクトルを  $\mathbf{s}$  とし、上記離散化から変数変換で次のように得られ

る。Newton 反復が収束すれば右辺=0 が成立する。

$$\delta \mathbf{s}^* \equiv \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{Q}} \left[ \mathbf{Q} - \theta_1 \mathbf{Q}^n + \theta_2 \mathbf{Q}^{n-1} - \delta t \frac{1}{V_i} \sum_j (\tilde{\mathbf{E}}_{i,j} - \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}) ds_{i,j} \right] \quad (51)$$

### 5. 不要な圧力擾乱減衰のための SLAU 系スキームの改良

Riemann 流束として、簡単かつ堅牢であり、低マッハ数での散逸が少ない AUSM<sup>®</sup> 族スキームの SLAU<sup>®</sup> を基礎とする。

AUSM 族スキームの非粘性数値流束は、次の様な形式で書ける。

$${}_{AUSM-Family} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Phi_L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Phi_R + \tilde{p} \mathbf{N} \quad (52)$$

質量流束による輸送と圧力が分離され、質量流束の符号により風上化されている。質量流束  $\dot{m}$ 、境界圧力  $\tilde{p}$  の違いにより様々な AUSM 族スキームが定義される。全速度スキームの SLAU<sup>®</sup> に対しては、次の様に定義される。(強い非対称膨張への対策項は省略している。)

$${}_{SLAU} \dot{m} = \text{ave}(\rho V_n) - |\bar{V}_n| \text{diff}(\rho) - \frac{f_p}{c} \text{diff}(p) \quad (53)$$

$${}_{SLAU} \tilde{p} = \text{ave}(p) - (\beta_L^+ - \beta_R^-) \text{diff}(p) + (1 - \chi) (\beta_L^+ + \beta_R^- - 1) \text{ave}(p) \quad (54)$$

$$\text{ave}(q) = \frac{1}{2} (q_R + q_L) \quad (55)$$

$$\text{diff}(q) = \frac{1}{2} (q_R - q_L) \quad (56)$$

ここで、

$$\bar{c} = \text{ave}(c) \quad (57)$$

$$V_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (58)$$

$$M = V_n / \bar{c} \quad (59)$$

$$|\bar{V}_n| = \text{ave}(\rho |V_n|) / \text{ave}(\rho) \quad (60)$$

$$\beta_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (2 \mp M_{L/R}) (M_{L/R} \pm 1)^2, & |M_{L/R}| < 1 \\ \frac{1}{2} (1 + \text{sign}(\pm M_{L/R})) & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (61)$$

$\chi$  は次のように定義され、 $M=0 \rightarrow 1$  で  $\chi=1 \rightarrow 0$  となり、亜音速での数値散逸を制御している。

$$\hat{M} = \min \left( 1.0, \frac{1}{c} \sqrt{\text{ave}(|\mathbf{u}|^2)} \right) \quad (62)$$

$$\chi = (1 - \hat{M})^2 \quad (63)$$

非常に低いマッハ数の場合に問題になるのが、質量流束中の圧力差分項の無次元係数  $f_p$  である。オリジナルの SLAU では次のように定義され、低マッハ数では  $f_p \approx 1$  となる。

$$f_p = \chi \quad (64)$$

質量流束中の圧力差分項は密度変動の抑制を通して、圧力に対

する数値散逸として働く。例として、一次元で空間一次精度かつ速度 0 の場合を考える。

$$\rho_t \approx \frac{f_p}{2\bar{c}\Delta x} (p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) \approx \frac{\Delta x f_p}{2\bar{c}} p_{xx} \quad (65)$$

更に、等エントロピーを仮定すると、

$$p_t = c^2 \rho_t \approx \frac{\bar{c} \Delta x f_p}{2} p_{xx} \quad (66)$$

これは圧力の拡散方程式であり、 $f_p$  が圧力の拡散量をコントロールしていることが分かる。式(15)は、次の厳密解を持つ。ここで、 $T_d$  は減衰特性時間である。

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{t}{T_d} + ikx\right) \quad (67)$$

$$T_d = \frac{2}{c \Delta x f_p k^2} \quad (68)$$

$T$  を周期、 $L$  を波長として、音波の関係式を代入すると、

$$T_d = \frac{1}{2\pi^2 f_p} \frac{L}{\Delta x} T \quad (69)$$

これは、 $f_p$  が定数であれば、減衰特性時間は格子サイズによって異なり、格子が精細な部分では不要な擾乱も含め、圧力変動が減衰しにくい事を示している。そこで、減衰特性時間が、格子サイズによらない  $f_p$  の定義として、時間次元の制御変数  $T_c$  を用いて次の様な形式を考える。

$$f_p = \frac{c T_c}{\Delta x} \quad (70)$$

これを用いた場合、減衰特性時間は、下記のように表せる。

$$T_d = \frac{2}{c \Delta x f_p k^2} = \frac{2}{c^2 T_c k^2} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{T}{T_c} T \quad (71)$$

したがって、減衰特性時間は、格子サイズによらず、かつ、次の条件が満たされれば、減衰特性時間が周期より十分長くなる。

$$T_c \ll T \Rightarrow T_d \gg T \quad (72)$$

したがって、 $T_c$  が音波の周期よりも十分小さいという要請が満足されれば、減衰特性時間は周期より十分長くなり、大きな減衰なしに音波を計算できる。逆に、周期が、 $T_c$  以下では、格子サイズによらず、減衰が大きくなりノイズを抑制する効果が期待される。また、 $T_c$  をどれだけ小さくしても、オリジナル SLAU の陽解法で計算できる以上に短い波長は計算できないので、最終的に次を用いる。

$$f_p = \chi \max \left( 1, \frac{\bar{c} T_c}{\Delta x} \right) \quad (73)$$

音波の減衰が格子サイズによらず、一樣になることから、この数値流束スキームを UD(Uniform Dumping)-SLAU と名づける。

UD-SLAU では、右辺の数値散逸が増強されることになるので、それに対応して、LU-SGS 陰解法等に用いられる、スペクトル半径も次のように変更する必要がある。

$$|V| + c \rightarrow |V| + \max \left( 1, \frac{\bar{c} T_c}{\Delta x} \right) c \quad (74)$$

一方、GC-SMAC の場合には、式(41)との比較から下記のように定義することで安定性が確保できる。

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + d_{\mu} + c \max\left(1, \frac{\bar{c}T_c}{\Delta x}, 2CnI_{i,j}\right) \quad (75)$$

式(37,38)および式(73)の比較より、下記が成立していれば、GC-SMAC 側は変更なしに安定に計算可能なことが分かる。

$$2\Delta t > T_c$$

(76)

非定常計算の時間刻みより短い周期の音波は解像できないのは明らかであり、そのような音波はノイズでしかあり得ない。そこで、非定常計算の場合には、次の定義を  $T_c$  のデフォルト値とする。

$$T_c \approx \Delta t \quad (77)$$

この選択は、式(73)からも明らかのように、音速ベースの Courant 数を 1 以下とした時にはオリジナルの SLAU に戻るということも意味しており、高速側スキームとの連続性の点でも自然である。注意点として、 $T_c$  は定数でないため数値振動を招くことが数値実験で判明しているため、 $\Delta t$  の変動を許す場合でも  $T_c$  は、固定しておく必要がある。

### 6. 他の SLAU 系スキームとの比較による UD-SLAU の特徴

運動量の散逸が  $M$  に比例する低散逸スキームの場合、単調性条件からは、低マッハ数で、 $f_p$  が  $1/M$  に比例する必要がある<sup>[11]</sup>、例えば次のように定義される

$$f_p = \frac{\chi}{1-\chi} \approx \frac{1}{2M} \quad (78)$$

式(78)を式(68)に代入すると、

$$T_d = \frac{M}{\pi^2 f_p} \frac{L}{\Delta x} T \quad (69)$$

したがって、マッハ数が下がるほど、また、格子が大きくなるほど、音波の減衰が早くなることが分かる。WS-SLAU<sup>[11]</sup>では、圧力差分からウィグルを検知し、必要な場所だけで数値散逸が働くような工夫をしているが、計算が複雑になるとか、非常に低いマッハ数では、数値散逸が十分小さくなる保証がない等の問題も残されている。更によどみ点での 0 割を防ぐための  $Mc$  の導入が必要になることは共通の問題である。

一方、UD-SLAU では  $f_p$  はマッハ数に無関係に  $T_c$  によって制御されるが、この挙動を評価してみる。低マッハ数流れでは、最小格子サイズと移流速度から決まる特性時間が、数値計算で発生する現象の時間スケールを決める。したがって、時間刻みは、非定常計算において、下記のように定めるのが普通である。

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{U} \quad (79)$$

等間隔格子を仮定し、これを、式(77)を考慮して UD-SLAU に適用すると、式(73)は、

$$f_p = \chi \max\left(1, \frac{\bar{c}}{U}\right) = \chi \frac{1}{M} \approx \frac{1}{M} \quad (80)$$

即ち、低マッハ数での非定常計算に適切な時間刻みを選べば、等間隔格子では、ほぼ単調スキームが実現される。格子依存性に関しては、前項に示されたとおりである。

## 7. 数値例

### 7.1.2 次元翼型(NACA0012)周りの非粘性流れ

定常解への収束加速に対する一例として、NACA0012 翼型の

非粘性流れにおける収束の様子を示す。O 型格子を用い、移流速度ベースの Courant 数が 1 程度になるように時間刻みを定めている。一次精度陰解法を用い局所時間法は併用していない。

Fig.1-3 に  $M=0.5, 0.1, 0.01$  での速度場の収束履歴を SLLAU と MFGS,TC-PGS1<sup>[7]</sup>、GC-SMAC の組みあわせおよび SMUC (UD-SLAU+GC-SMAC)について示す。どのケースも時間ステップは 10000 で固定し、横軸は CPU 時間を取っている。

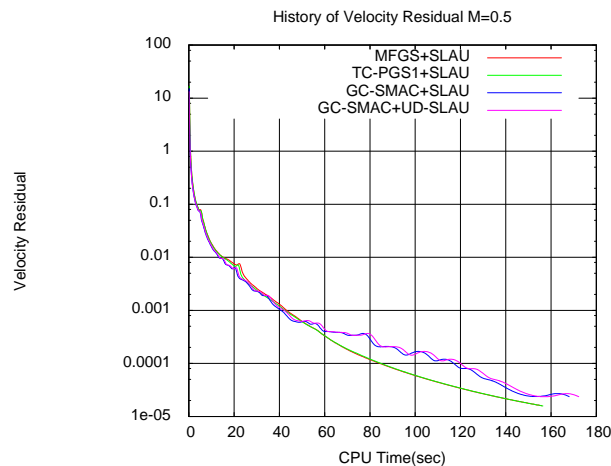


Fig.1 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.5.

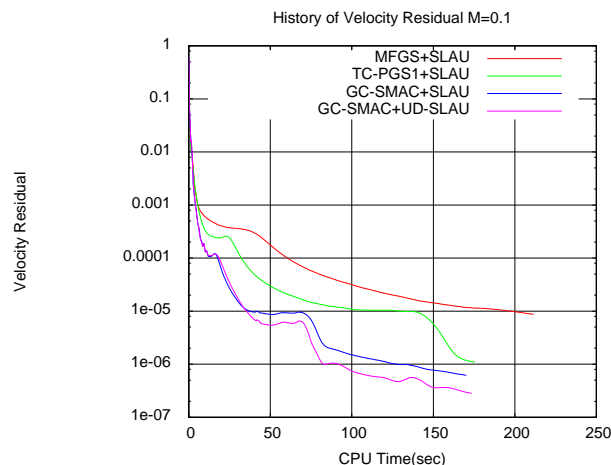


Fig.2 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.1.

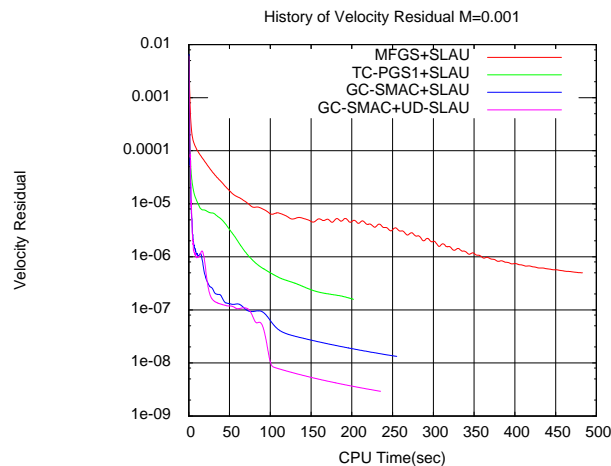


Fig.2 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.01.

M=0.5 では、どれも大差なく、また 1 ステップあたりの計算時間にも大きな違いはないことが分かる。M=0.1,0.01 と低下するほど、GC-SMAC や SMUC の優位性は明らかになる。MFGS の計算時間が多いため、内部反復を残差が初期の 1/10 に落ちた時点で打ち切っているため、残差が落ちにくくなって、GS 反復回数が増えているのが原因である。GC-SMAC では SSOR を用いている。

Fig.4,5 に SLAU+GC-SMAC と SMUC の翼後縁 10% 翼弦長付近の圧力分布を示す。SLAU では、O 型格子による格子の歪みに起因するウィグルが生じているが、UD-SLAU では解消されている。

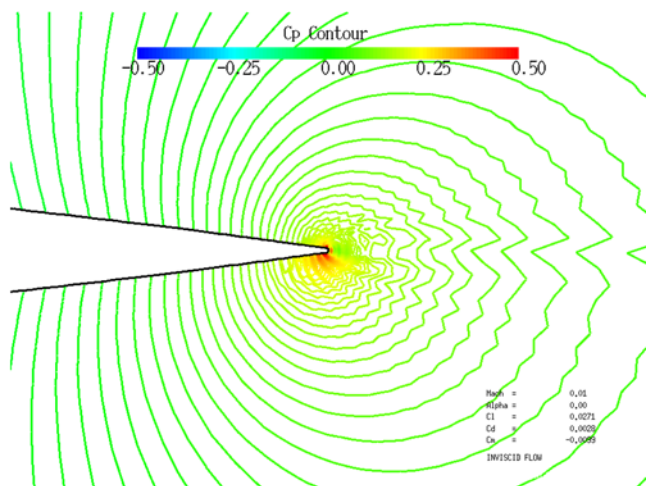


Fig.4 Enlarged view of the contour of the pressure coefficient at 10% chord of the trailing edge of NACA0012 airfoil computed using GC-SMAC and SLAU. Mach=0.01.

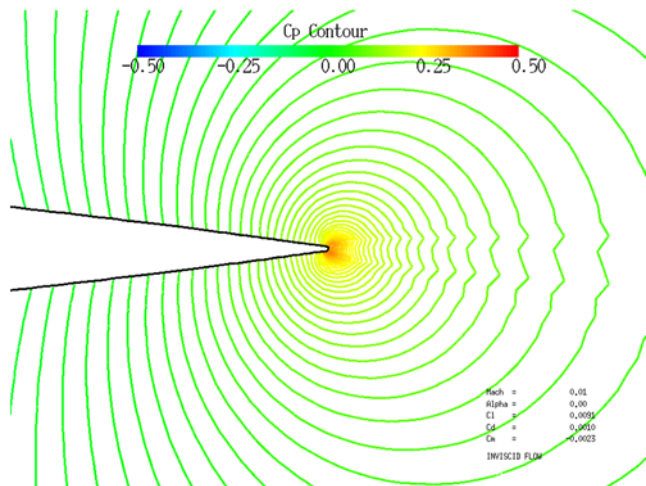


Fig.5 Enlarged view of the contour of the pressure coefficient at 10% chord of the trailing edge of NACA0012 airfoil computed using GC-SMAC and UD-SLAU. Mach=0.01.

## 7.2 非定常流れ場での Newton 反復の収束

Re=100 の円柱周りの剥離流れを対象に、非定常計算中の、Newton 反復の収束状況を示す。Fig.6-8 に 5 時間ステップでの Newton 反復での速度、圧力、密度の収束履歴を示す。Newton 反復は 20 回、内部反復は初期残差 1/10 までの収束としている。SMUC、MFGS、TC-PGS1 の比較を示す。MFGS,TC-PGS1 には SLAU を組み合わせている。また GC-SMAC の内部ソルバーは SSOR である。

圧力と密度は同様の傾向を示しており、(高マッハ数向きの) MFGS が最も早く、SMUC と TC-PGS1 はほぼ同じである。速度に

関しては、SMUC が最も早い。

相対的計算時間は、MFGS:TC-PGS1:SMUC=1.00:0.54:1.17 である。計算時間を考慮すると、総合的には、TC-PGS1 が最速と思われる。しかし、後述のように TC-PGS1 は音波の計算には向かないので、音の解析を伴わない場合に限られる。音波の解析が可能な MFGS と SMUC を比較すると、MFGS は速度の収束が遅すぎて、実用には耐えない。したがって、同時解析に対しては SMUC が最速と考えられる。

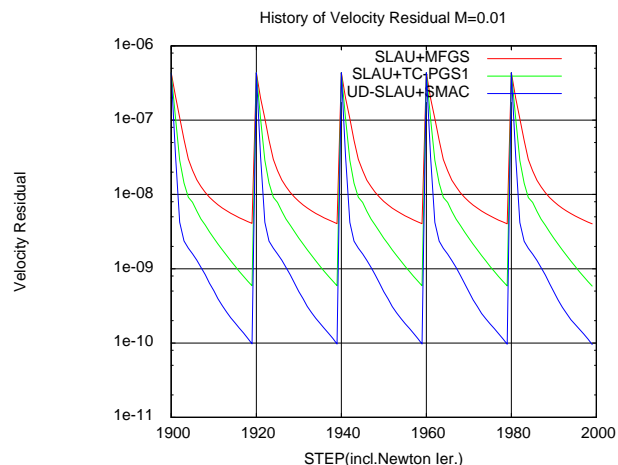


Fig.6 History of velocity residual including the Newton iteration of the flow around cylinder at Mach=0.01 and Re=100.

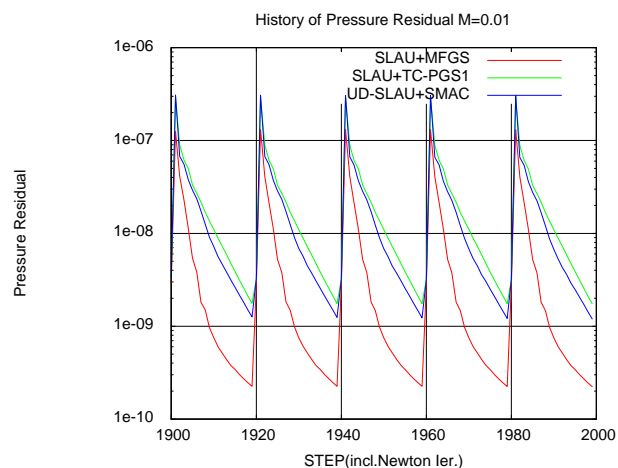


Fig.7 History of pressure residual including the Newton iteration of the flow around cylinder at Mach=0.01 and Re=100.

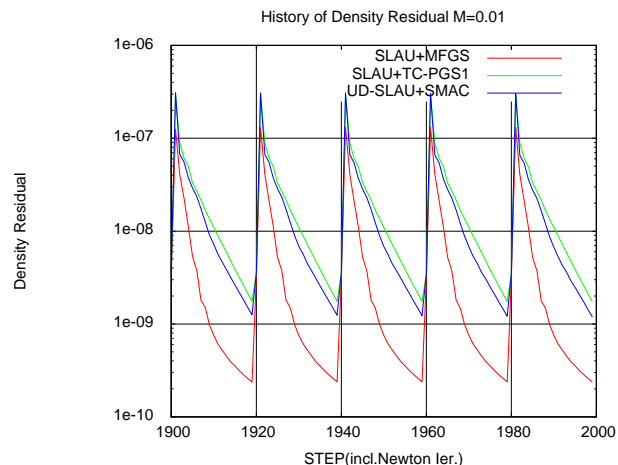


Fig.8 History of density residual including the Newton iteration of the

flow around cylinder at Mach=0.01 and Re=100.

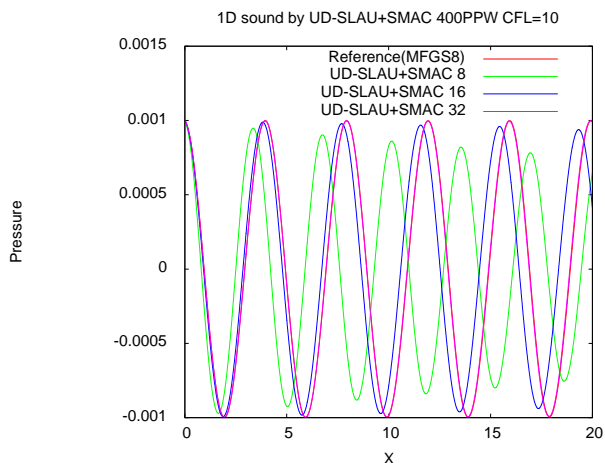


Fig.9 1D sound propagation computed using SMUC.

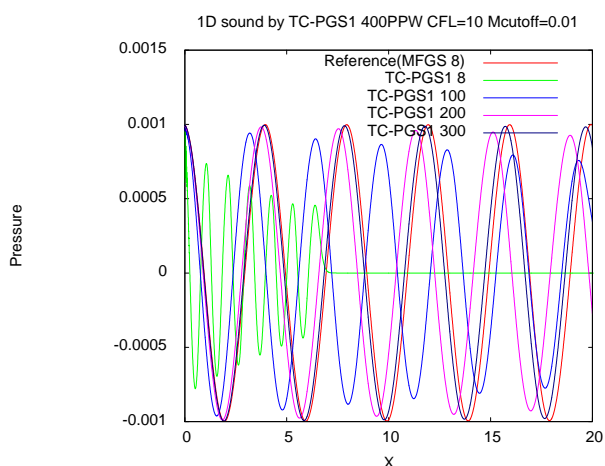


Fig.10 1D sound propagation computed using TC-PGS1.

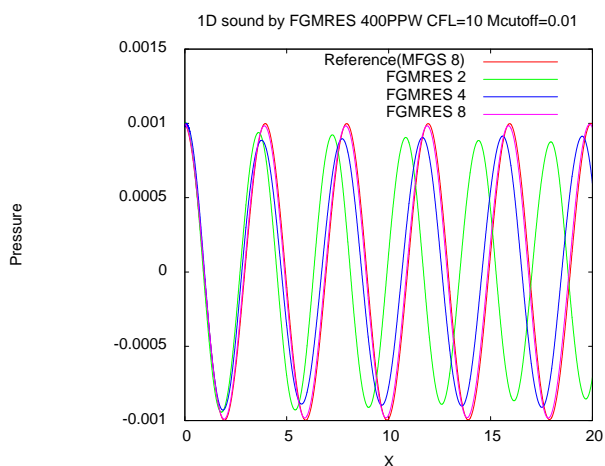


Fig.11 1D sound propagation computed using FGMRES.

### 7.3 一次元音波

陰解法によっても原理的には、時間刻み、空間刻みが、周期、波長よりも充分小さければ、音波の計算は可能である。ここでは、一波長あたり 400 セル、Courant 数 10 での一次元音波（空間三次精度、時間二次精度）の解析例を示す。低マッハ数流れ場でも、音波だけの計算であれば、格子の工夫でもっと効率的な計算は可能であるが、乱流など複雑な流れ場の内部を通過する音波の効率的な計算には、流れ場を中心に考えた格子と時間幅での、このよう

な条件での計算が必須となる。参照値としては MFGS と Newton 反復 8 回を組み合わせたものを用い、これは、ほぼ厳密解と一致している。

Fig.9 に SMUC (UD-SLAU+GC-SMAC) の Newton 反復を、8,16,32 と変えた結果を示す。また Table 1 に各ケースのまとめと無次元化した計算時間を示す。SMUC では、MFGS より多い 32 回の反復を必要としている。これは、SMUC に含まれる圧力に対する陰的散逸が MFGS より大きいことによる。ただし、これは SMUC が MFGS より計算効率が劣ることを意味するわけではない。低マッハ数では流れ場の時間精度の要請から MFGS の方が多くの Newton 反復を要し、計算の効率が大幅に劣るので、総合的には SMUC の方が効率が良いと考えられる。また、SMUC の数値散逸は Courant 数に、ほぼ比例するので、音波の計算を、それに適した大きな格子で行うなら条件は良くなる。なお、Riemann 流束を SLAU に変えても結果は、ほとんど変わらない。

これは、Fig.9 に示す、(時間微分前処理法の考え方をういた) SLAU+TC-PGS1 の結果と比較すると明らかである。ここでは、低マッハ数流れ場への適用を配慮して、 $Mc=0.01$  としている。MFGS と同程度の結果を得るには 300Newton 反復を要している。Mc が小さくすると更に条件は厳しくなる。これは、Mc を必要としない SMUC に比べて大きなデメリットである。また、格子が粗くなくても、Mc の影響はなくなる点も欠点である。

Fig.10 に文献[7]では最も効率の良かった、TC-PGS1( $Mc=0.01$ )を行列前処理に用いた F(lexible)GMRES の結果を示す。FGMRES では 8Newton 反復程度で収束している。計算時間は SMUC の 63% 程度であり、このケースでは SMUC を含めても最速である。ただし、行列前処理に TC-PGS1 を用いるので、同様に Mc の調整が必要であり、マッハ数が更に低下すると計算効率の劣化は避けられない。

Mc の調整が不要であり、格子が音波の解像に必要な程度になれば、自動的に、収束性が向上する SMUC には、低マッハ数流れと音波の同時解析において、大きなメリットがあると言える。

Table 1. Schemes and relative CPU time of 1D sound propagation cases.

CASE	Scheme	#Newton	Rel. CPU
MFGS 8	SLAU+MFGS	8	1.00
UD-SLAU+SMAC 8	UD-SLAU+SMAC	8	1.21
UD-SLAU+SMAC 16	UD-SLAU+SMAC	16	2.42
UD-SLAU+SMAC 32	UD-SLAU+SMAC	32	4.83
TC-PGS1 8	SLAU+TC-PGS1	8	1.00
TC-PGS1 100	SLAU+TC-PGS1	100	13.06
TC-PGS1 200	SLAU+TC-PGS1	200	26.42
TC-PGS1 300	SLAU+TC-PGS1	300	39.90
FGMRES 2	SLAU+FGMRES	2	0.78
FGMRES 4	SLAU+FGMRES	4	1.53
FGMRES 8	SLAU+FGMRES	8	3.07

### 8. まとめと今後の課題

圧力ベース圧縮性ソルバーのアイデアを  $\delta$  形式陰解法と MUSCL 有限体積法の枠組みに導入した SMUC 法を提示し、その定式化と数値例を示した。

- SMUC 法は、MUSC 陰的有限体積法の枠組みの中で、影響の大きい、陰解法 (GC-SMAC) と Riemann 流束 (UD-SLAU) の組み合わせからなる。

- GC-SMAC は、時間微分前処理の応用による手法とは異なり、Mc など流れ場依存のパラメータの調整なしに非常に低いマッハ数まで安定に計算が可能である。計算効率に関し、亜音速以上で

は、MFGS 等と同等であるが、大きなメリットは無い。M<0.1 以下では従来法に比べて優位は明らかである。

・UD-SLAU では、SLAU 系スキームの低マッハ数特性の鍵である、質量流束項中の速度差分項を、GC-SMAC と親和性の高い方法で修正することで、これまで、低マッハ数での安定化に必要であった、Mc の調整を取り除いた。更に、低マッハ数の流れ計算と音波の計算が同時に可能であることを、簡単な数値例で示した。

今後の課題として次の点があげられる。

・本論では十分に述べる事が出来なかったが、内部線形反復に関し、MFGS、TC-PGS1 と GC-SMAC は、性質が異なっており、MFGS 等で得られているノウハウでは十分ではない。MFGS 等では、過剰緩和は有効ではないので SGS を用いて 20 回以下程度の反復で初期残差から 1/10 に低下し、これがトータルの計算時間短縮には最適であることが分かっている。一方、GC-SMAC に関しては過剰緩和が有効である。反復回数に関しては、初期残差の 1/10 まで収束の収束に 50-250 回の SOR 反復を要している。

・GC-SMAC に対し、現状は、単純な SSOR 法を用いているが、圧力ベースソルバーで用いられる、より洗練された手法の利用が有効な可能性がある。

・検証は、基本的な流れ場や音の伝播にとどまっているので、より現実的で複雑な流体-音響連成問題での実証が必要である。

## 参考文献

- [1]Harlow, F. HH and Welch, J. E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Physics of Fluids, \$8-12(1965),2182.
- [2]Amsden, Anthony A., and Francis H. Harlow. "A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations." Journal of Computational Physics 6.2 (1970): 322-325.
- [3]Beam, Richard M., and RoF Warming. "An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations." AIAA journal 16.4 (1978): 393-402.
- [4]Jameson, Antony, and Eli Turkel. "Implicit schemes and LU decompositions." Mathematics of Computation 37.156 (1981): 385-397.
- [5]E. Turkel, "Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations", J. Comp.Phys., Vol 72, Issue 2, (1987)
- [6]J.M. Weiss and W.A. Smith, Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows, AIAA J., Vol. 33, No.11, pp.2050-2057 (1995)
- [7]Shima E and Kitamura K (2013), "New approaches for computation of low Mach number flows", Computers & Fluids. Vol. 85, pp. 143-152. Pergamon.
- [8] M.-S. Liou, C.J. Steffen Jr., A new flux splitting scheme, J. Comp. Phys. Vol10, pp723-39. (1993)
- [9]Shima E and Kitamura K (2011), "Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds", AIAA journal. Vol. 49(8), pp. 1693-1709.
- [10]Inagaki, M., et al. "Numerical prediction of fluid-resonant oscillation at low Mach number." AIAA journal 40.9 (2002): 1823-1829.
- [11]Shima E (2013), "On the improvement of the all-speed flux scheme for very low Mach number flows", AIAA Paper 2013-2696.

## APPENDIX A:SMAC 法との類似性

2項で定式化を示した GC-SMAC に対して、時間一次精度陰解法を用い、Newton 反復を一回に留める。更に初期値を前ステップ値に設定し、第一ステップ式(21)に式(18)を代入する。

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}^{**} + \delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^{**} + \frac{\partial \mathbf{R}_m}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^{**} \right\} \\ & = -\delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \mathbf{R}_m^n \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

左右の微分オペレータの一致と粘性項の線形性を仮定すると、次の様に書きなおせる。

$$\mathbf{u}^{**} + \delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{**} + \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \mathbf{R}_m^{**} \right\} = 0 \quad (\text{A-2})$$

ここで次の定義を用いている。

$$\mathbf{u}^{**} \equiv \mathbf{u}^n + \delta \mathbf{u}^{**} \quad (\text{A-3})$$

これは移流等を陰的に扱っているが、SMAC 法の移流ステップに相当する。

同様に第二ステップは、式(24)に式(15)(18)を代入して、

$$\begin{aligned} & \delta p + \delta t \left( \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \right) \delta p - \delta t^2 c^2 \nabla \cdot \nabla \delta p \\ & = -\delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^n + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{**} + R_p^n \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

左右の微分オペレータが一致し粘性項を線形と仮定すると、次の様に書きなおせる。

$$\begin{aligned} & \delta p + \delta t \left( \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^{n+1} + R_p^{n+1} \right) - \delta t^2 c^2 \nabla \cdot \nabla \delta p \\ & = -\delta t \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{**} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

c>>U の場合、c<sup>2</sup> の掛った項のみが残って、下記のようになり SMAC 法の圧力ステップと一致することが示される。

$$\nabla \cdot \nabla \delta p = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{**} \quad (\text{A-6})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{**} - \delta t \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \quad (\text{A-7})$$

したがって、非圧縮性 CFD の SMAC 法は、GC-SMAC の特別な場合であることが示された。

## Appendix B: 因数分解誤差分析のためのオーダー評価

スキームの構築には、ほとんど影響しないエントロピーを簡単化のために省略し、速度と圧力を合わせてベクトル表記するとともに、微分オペレータを次のようにグループ化する。

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \quad (\text{B-1})$$

$${}_u \mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-2})$$

$${}_u \mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \nabla \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-3})$$

$${}_p \mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho c^2 \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-4})$$



$${}_{\rho} \mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial R_p}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (\text{B-5})$$

この表記を用いて式(11)(12)は次のように書き直す事が出来る。

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u + {}_p \mathbf{A}_p \}] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^* \quad (\text{B-6})$$

式(21)-(26)の二段解法は、次の近似因数分解と同等である。

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u \}] [\mathbf{I} + \delta t \{ {}_p \mathbf{A}_p \}] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^* \quad (\text{B-7})$$

この因数分解には、次のような因数分解誤差が含まれる。

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u \}] [\mathbf{I} + \delta t \{ {}_p \mathbf{A}_p \}] \delta \mathbf{s} \\ & - [\mathbf{I} + \delta t \{ {}_p \mathbf{A}_p \}] [\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u \}] \delta \mathbf{s} \\ & = \delta t^2 {}_u \mathbf{A}_u {}_p \mathbf{A}_p \delta \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

ここで、微分オペレータの乗算の次の関係を用いた。

$${}_a \mathbf{A}_b {}_c \mathbf{A}_d \delta \mathbf{q} = \begin{cases} 0 & b \neq c \\ \neq 0 & b = c \end{cases} \quad (\text{B-9})$$

近似因数分解に誤差は避けられないが、できるだけ、これを小さくする必要がある。因数分解誤差評価のため、各微分作用素の次元解析を行う。高 Re 数流れを意識し、粘性項の影響は小さいものとする。

$${}_u \mathbf{A}_u \delta \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \cdot \nabla + \frac{\partial \mathbf{R}_m}{\partial \mathbf{u}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{s} = O\left(\frac{U^2}{L}\right) \quad (\text{B-10})$$

$${}_u \mathbf{A}_p \delta \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \nabla \\ \rho & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{s} = O\left(\frac{\Delta P}{\rho L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\right) \quad (\text{B-11})$$

$${}_p \mathbf{A}_u \delta \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho c^2 \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix} \delta \mathbf{s} = O\left(\frac{\rho C^2 U}{L}\right) \quad (\text{B-12})$$

$${}_p \mathbf{A}_p \delta \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}^n \cdot \nabla \end{pmatrix} \delta \mathbf{s} = O\left(\frac{U \Delta P}{L}\right) = O\left(\frac{\rho U^3}{L}\right) \quad (\text{B-13})$$

ここで、C,U は音速および移流速度の代表スケールであり、圧力変動量に関しては、次の関係を用いた。

$$O(p - p_\infty) = O(\rho U^2) \quad (\text{B-14})$$

低マッハ数では  $C \gg U$  であり式(B-12)だけが極めて大きい。したがって、低マッハ数では  ${}_p \mathbf{A}_u$  のかかる項が誤差に残らないようにする必要がある。このような二項への因数分解は、(B-7)以外には、次の1通りしかない。

$$[\mathbf{I} + \delta t \{ {}_u \mathbf{A}_u + {}_p \mathbf{A}_p \}] [\mathbf{I} + \delta t {}_p \mathbf{A}_p] \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}^* \quad (\text{B-15})$$

式(B-15)は次のステップから成る。

第一ステップ：

$$\delta \mathbf{u}^{n+1} + \delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p^* \right\} = \delta \mathbf{u}^* \quad (\text{B-16})$$

$$\delta p^{**} + \delta t \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^{n+1} = \delta p^* \quad (\text{B-17})$$

第二ステップ：

$$\delta p^{n+1} + \delta t \left\{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \delta p^{n+1} + \frac{\partial R_p}{\partial p} \delta p^{n+1} \right\} = \delta p^{**} \quad (\text{B-18})$$

即ち、圧力の移流拡散項が第二ステップに分離されただけで、他は第一ステップに残されていて、元の式から殆ど簡略化されていない。低マッハ数では、圧力の移流拡散は、殆ど無視して良いことを考えると、式(B-15)を採用する価値はない。したがって式(B-7)から導出される SMAC 的な手法は低マッハ数流れへの応用において良好な唯一のスキームであるということになる。

### Appendix C: 他の圧縮性陰解法との比較、時間微分前処理法との関係

第一ステップには、数値的取り扱いの困難はなく、如何に第二ステップを計算するかが鍵である。要は、式(24)(25)の離散化式が構成する、疎行列が反転できれば良い。ここで問題になるのが左辺を構成する疎行列の優対角性である。SOR などの古典的な手法で必須であるし、GMRES 等の Krylov 部分空間法を用いる場合にも、近似 LDU 分解などを用いた行列前処理が効率的な計算には必須であり、そこでは、やはり優対角性が必要となる。GC-SMAC では、圧力の移流を風上法で離散化することで、無条件優対角となる。

一方、LU-SGS の様な圧縮性陰解法では、式(24)(25)の速度と圧力を連立させた状態で解く。優対角にするには、特性速度に応じた数値粘性を加える風上化が必須である。説明の簡単化のために一次元非粘性の場合を考える。式(24)(25)はマトリックス表記で次の様に表わせる。

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta p \end{pmatrix} + \delta t \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \delta u^{**} \\ \delta p^{**} \end{pmatrix} \quad (\text{C-1})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & u \end{pmatrix} \quad (\text{C-2})$$

この固有値は、下記となる。

$$\lambda_{\pm} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4c^2}}{2} \quad (\text{C-3})$$

したがって、優対角化のために風上差分を用いると、この固有値が係数となる数値散逸が加わることになる。 $|U| \ll c$  の時、固有値は、ほぼ音速に等しく、この数値散逸は速度場に対して過大であり数値散逸が支配的となってしまつて誤差が大きくなる。このような問題は高亜音速では生じない。

一方、Weiss-Smith の時間微分前処理法を用いると、係数行列は次の様に变化する。

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \varepsilon \rho c^2 & \varepsilon u \end{pmatrix} \quad (\text{C-4})$$

これにより、固有値も次の様に变化する。

$$\lambda'_{\pm} = \frac{\varepsilon u \pm \sqrt{\varepsilon^2 u^2 + 4\varepsilon^2 c^2}}{2} \quad (\text{C-5})$$

したがって、 $\varepsilon$  がマッハ数のオーダーであれば、固有値も移流速度のオーダーとなり、速度場に対して適切なスケールとなる。ただし、物理的な時間発展は計算できなくなる。

GC-SMAC では方程式レベルでの変形で行列の性質を変えることで、数値散逸の付加なしに優対角性が確保できていることがメリットであるといえる。

#### Appendix D: 第二ステップの数値解法詳細

非粘性の場合、式(28)を構造格子にも非構造格子にも適用可能な手法として、有限体積法により離散化すると、次のように書ける。(ただし、保存系ではない。)

$$\delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \mathbf{u}_i \cdot \sum_j \delta \mathbf{p}_{i,j} \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} - \frac{c^2 \Delta t^2}{V} \sum_j \nabla \delta p_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} \quad (\text{D-1})$$

= R.H.S.

また、次式の関係及び、定義を導入する。

$$\sum_j \mathbf{n}_{i,j} ds_{i,j} = 0 \quad (\text{D-2})$$

$$V_{ni,j} \equiv \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} \quad (\text{D-3})$$

圧力の移流を風上化するため、セル境界の値を次の様に定義する。

$$\delta p_{i,j} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} = \delta p_{i,j} V_{ni,j} = \begin{cases} \delta p_i V_{ni,j} & V_{ni,j} > 0 \\ \delta p_j V_{ni,j} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{D-4})$$

$$(\nabla \delta p \cdot \mathbf{n})_{i,j} = \frac{\delta p_j - \delta p_i}{\Delta h_{i,j}} \quad (\text{D-5})$$

または、次のようにも書ける。

$$\delta p_{i,j} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} = \frac{V_{ni,j} + |V_{ni,j}|}{2} \delta p_i + \frac{V_{ni,j} - |V_{ni,j}|}{2} \delta p_j \quad (\text{D-6})$$

式(D-5)で  $\Delta h_{i,j}$  は、セル中心間の距離のセル境界垂直ベクトルへの射影距離である。

これらを用いると式(D-1)は次のように書ける。

$$\delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left[ \frac{|V_{ni,j}|}{2} \delta p_i + \frac{V_{ni,j} - |V_{ni,j}|}{2} \delta p_j + c^2 \Delta t \frac{\delta p_i - \delta p_j}{\Delta h_{i,j}} \right] ds_{i,j} = R.H.S. \quad (\text{D-7})$$

ただし、下記の関係を用いた。

$$\sum_j V_{ni,j} ds_{i,j} = 0 \quad (\text{D-8})$$

対角項と非対角項を分離すると、

$$\left[ 1 + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left\{ \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} + \frac{|V_{ni,j}|}{2} \right\} ds_{i,j} \right] \delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left[ \frac{V_{ni,j} - |V_{ni,j}|}{2} - \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} \right] \delta p_j ds_{i,j} = \delta p^* \quad (\text{D-9})$$

また、優対角条件は、下記で表わされる。

$$1 + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left\{ \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} + \frac{|V_{ni,j}|}{2} \right\} ds_{i,j} \geq \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left\{ \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} + \frac{|V_{ni,j}| - V_{ni,j}}{2} \right\} ds_{i,j} \quad (\text{D-10})$$

ここで、(D-8)を用いて次のように整理される。

$$\frac{\Delta t}{V} \sum_j \left\{ \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} + \frac{|V_{ni,j}| - V_{ni,j}}{2} \right\} ds_{i,j} = \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left\{ \frac{c^2 \Delta t}{\Delta h_{i,j}} + \frac{|V_{ni,j}|}{2} \right\} ds_{i,j} \quad (\text{D-11})$$

したがって、式(D-10)は無条件に成立する。一方、圧力の移流を中心差分で評価すると、CFL 的条件の元でのみ優対角となること

を示せる。

また、式(D-7)は次のように書き直すことが出来る。

$$\delta p_i + \frac{\Delta t}{V} \sum_j \left[ \frac{\sigma_{i,j}}{2} \delta p_i + \frac{\hat{V}_{ni,j} - \sigma_{i,j}}{2} \delta p_j \right] ds_{i,j} = R.H.S. \quad (\text{D-12})$$

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + 2Cn_{i,j}c \quad (\text{D-13})$$

$$Cn_{i,j} = \frac{c \Delta t}{\Delta h_{i,j}} \quad (\text{D-14})$$

ここで、 $Cn_{i,j}$  は音速ベースの局所クーラン数に相当する。圧力に対する離散化にも、圧縮性スキームの数値散逸が含まれることと粘性の簡易的な扱いを考慮して、最終的に次のように定義する。

$$\sigma_{i,j} = |V_{ni,j}| + d_\mu + \text{Max}(2Cn_{i,j}, 1)c \quad (\text{D-15})$$

$$d_\mu = \frac{2(\mu + \mu_T) ds_{i,j}}{\rho_i V_i} \quad (\text{D-16})$$

#### Appendix E: M=0.1 UD-SLAU と各種陰解法の組み合わせ

UD-SLAU は SLAU 等と容易に入れ替え可能な Riemann 流束なので、単独で利用が可能であり、その場合でも不要な高波数音波をダンピングする効果が期待できる。ただし、数値散逸の性質が変わっているので、陰解法の修正等が必要となる。

UD-SLAU を既存の CFD コードに組み込むための予備調査として、種々の陰解法と組み合わせた場合の収束特性を比較する。テストケースとしては、M=0.1 の NACA0012 翼型周りの非粘性流れを用いる。本文中に示したように、より高マッハ数では差は小さくなり、逆に、より低マッハ数では、違いがより明確になる。

用いる手法は、Riemann 流束としては SLAU および UD-SLAU、陰解法としては、LU-SGS、MFGS、TC-PGS1、GC-SMAC であり、両者の組み合わせ 8 通りに関してテストを行った。

LU-SGS と MFGS に関しては、安定化のため、本文中の式(74)に従いスペクトル半径を変更している。TC-PGS1 では、圧力の陰の数値散逸を独立して変更できるので、その中の音速のみを変更している。

Fig.F1 に全ケースの比較、Fig.F2 に Riemann 流束に UD-SLAU を用いた場合のみ、Fig.F3 に Riemann 流束に UD-SLAU を用いた場合のみを示す。

まず、UD-SLAU 導入の影響については Fig.F1 に示されるように、LU-SGS、MFGS に関しては、収束性が悪化、TC-PGS1、GC-SMAC に関しては逆に収束性が改善している。これは、TC-PGS1 と GC-SMAC では、陰解法の中で圧力の数値散逸だけを、UD-SMAC に釣り合う形で独立に増強できるのに対し、LU-SGS、MFGS では全変数で共通に大きくなってしまっているので、数値散逸が過大になり、収束性が悪化したものと思われる。

Fig.F2 に示されるように、M=0.1 程度の極端ではない低マッハ数で、SLAU との組み合わせであっても、低マッハ数用の陰解法である TC-PGS1 や GC-SMAC の優位さは明らかである。ただし、TC-PGS1 は、この程度のマッハ数では、LU-SGS や MFGS に比べて、2 倍程度の高速化に留まるので、あえてスキームを入れ替えるほどのメリットは無いとも言える。(より低マッハ数ではメリットは明確になる。) 一方、GC-SMAC は TC-PGS1 よりも更に倍程度高速であり、改善は明らかである。

UD-SLAU の場合には、前記のように、LU-SGS、MFGS では、収束性悪化、TC-PGS1、GC-SMAC では改善と、差を拡大する方向に働くので、GC-SMAC の優位性は更に明確になる。(Fig.F3) LU-SGS と比較すると、GC-SMAC は 20 倍程度高速である。また、LU-

SGS は、MFGS を 1 往復反復に限定したのと、ほぼ同等なので、LU-SGS で収束が振動的になっているのは、GS 反復の収束が不十分なためではないかということが MFGS との比較から予想される。

結論として、LU-SGS、MFGS と UD-SLAU との組み合わせは可能ではあるが、効率を考えると、GC-SMAC の利用は必須と云えるレベルである。

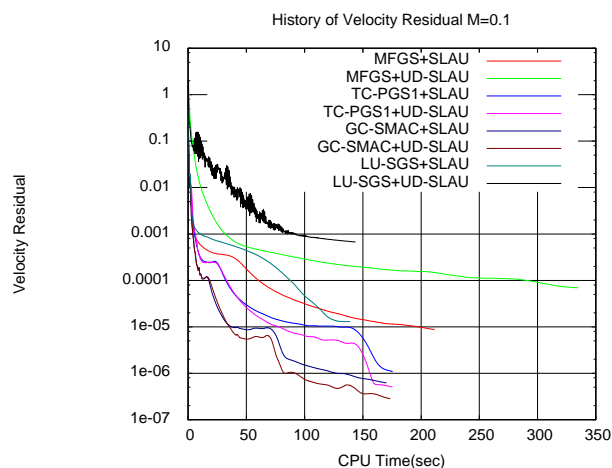


Fig.F1 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.5 for the combinations of each implicit scheme and Riemann flux.

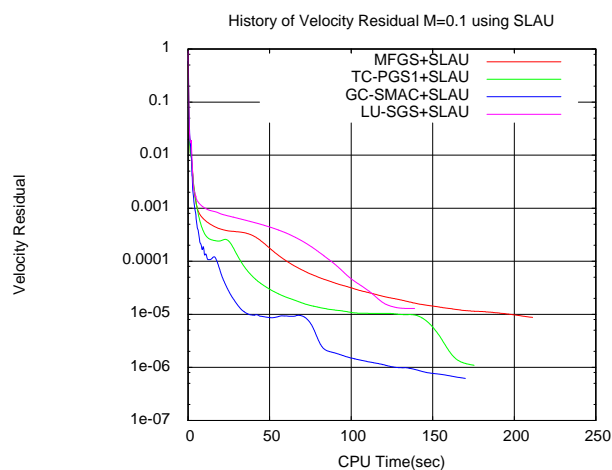


Fig.F3 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.5 for the combinations of each implicit scheme and SLAU.

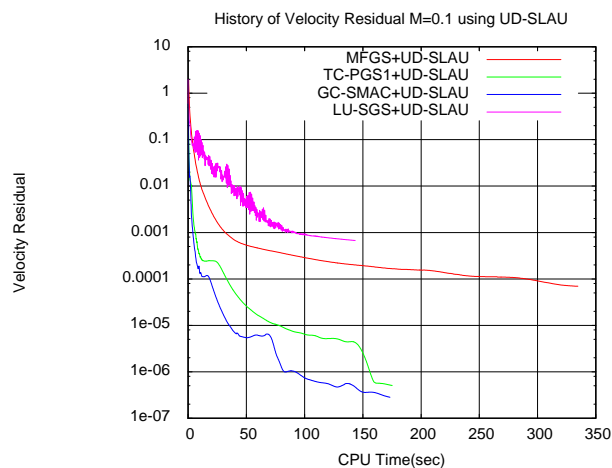


Fig.F2 History of velocity residual of flow around NACA0012 at Mach=0.5 for the combinations of each implicit scheme and UD-SLAU.