

非定常流体解析における陰的時間積分法の一検討

A study on implicit time integration method for unsteady flow simulation

- 松尾 裕一, JAXA 航空, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, matsuo.yuichi@jaxa.jp
 溝渕 泰寛, JAXA 航空, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, mizobuchi.yasuhiro@jaxa.jp
 菱田 学, 菱友システムズ, 名古屋市港区大江町 6-19, manabu_hishida@mail.ryoyu.co.jp
 Yuichi MATSUO, JAXA/ATD, 7-44-1 Jindaiji Higashi-machi, Chofu-shi, Tokyo 182-8522
 Yasuhiro MIZOBUCHI, JAXA/ATD, 7-44-1 Jindaiji Higashi-machi, Chofu-shi, Tokyo 182-8522
 Manabu HISHIDA, Ryoyu Systems, 6-19 Oye-cho, Minato-ku, Nagoya 455-0024

Time integration methods for unsteady flow simulation are studied. First, several explicit Runge-Kutta methods (TVD-RK2, TVD-RK3, RK4) are tested for 1d advection equation and Burgers equation, and it is found that RK4 can get a reasonable result even at CFL=1. Note that for all tests 1st upwind, 2nd central, 3rd MUSCL, 4th WENO are used as the spatial discretization. Second, two implicit methods (2nd-order backward difference; BDF2 and 4th-order explicit singly diagonally implicit RK; ESDIRK4) are compared for 1d advection equation and Burgers equation, and it is found that the ESDIRK4 scheme has more desirable characteristics than BDF2 in dispersion error. Finally, the BDF2 and ESDIRK4 are tested for 2d Euler equation for the vortex advection.

1. はじめに

流体の支配方程式 (Euler, Navier-Stokes) は, 時間微分項と空間微分項から成る偏微分方程式であり, 空間微分項は, (高次精度) 差分法, 有限体積法, 有限要素法等を通じて評価される. 一方, 時間微分項は, オイラー前進 (後退) 法 (Euler Forward/Backward, 以下 EF/EB), ルンゲクッタ法 (Runge-Kutta, 以下 RK) 等を通じて評価 (積分) される. 定常解を求める場合は, できるだけ早く収束する ($\partial_t = 0$ となる) 方法 (オイラー後退法等) が採用される. しかし, 非定常解析の場合は, 時間積分の精度 (次数) にも注意する必要があり, 2 次精度後退差分 (Backward Difference, 以下 BDF) 等がよく使われる. 空間項と時間項の評価は, リーマン問題等を考えると当然相互に関連する (直接法: Direct space-time; DST) が, 線の方法 (Method of lines; MOL) [1]により, 空間項を評価した後, 常微分方程式を解くといった方法が採用されることが多いように見える. 時間積分する際の大きな関心事に時間刻みの制約がある. 流体の場合はクーラン数 (CFL) の制約 (CFL 条件) と言い換えても良い. 採用する時間積分法によって, 取り得る時間刻み (Δt) の最大値に制限があることは良く知られている. 非定常解析では, 非定常現象を解像したいわけであるから, 大きすぎる Δt を採れることにあまり意味はないものの, CFL=1~10 程度の Δt が安定して取れれば, 工学的には有用である. CFL=0.5, 1.2 では時間ステップ数が 2-4 倍異なることになり, 計算時間に大きな差が出るからである.

近年, 時間積分において, 陰陽ルンゲクッタ法 (Implicit/Explicit Runge-Kutta, 以下 IMEX-RK) [2]と呼ばれる方法が用いられる機会が増えているようである. 特に, 反応流のような Stiff な問題ではその傾向が強い. 中心課題は, 陰的ルンゲクッタ法 (Implicit Runge-Kutta, 以下 IRK) であるが, 完全 IRK はコーディングが煩雑であり計算時間もかかるため, 一部を陰的に扱うことにより, Δt の制約を緩和するとともに, RK 法の高次精度性を担保するような方法である (と著者らは解釈している). 対角要素の取り方により, Singly Diagonally Implicit RK (SDIRK) [3], Explicit Singly Diagonally Implicit RK (ESDIRK) [4], Rosenbrock-Wanner (ROW) [5]と呼ばれる方法が提案されている. 陰的ルンゲクッタ法では, 一般的に, 行列反転の際にヤコビアンの評価とニュートン法等による反復計算が必要になるが, 疑似時間項の付加 (Dual time stepping 法, 以下 DTS[1]) により, 多次元における ADI 的な扱いやヤコビアン の簡略化が可能となる. 時間積分法の検討には, Bijl ら[6]の例や嶋ら[7], 青野ら[8]による例があり, 空力音響問題など

への関心の高まりもあって, 注目している分野と我々は認識する.

本稿では, 時間積分法の理論的詳細は他書 ([9]等) に譲り, 上記に挙げた幾つかの方法論を比較することにより, 時間積分法の基本的特性について検討した結果を報告する. なお, 本稿で用いている方法論の日本語名は, 著者ら独自に使用しているものであり, 慣例的な呼び方とは必ずしも合っていないことに注意する.

2. 時間積分法

1 次元スカラーの保存則方程式

$$u_t + f_x = 0 \quad (2.1)$$

の時間積分について考える. $f = cu$ のとき線形の移流方程式, $f = 0.5u^2$ のとき非線形の Burgers 方程式を与える. 以下に, 式 (2.1) を時間積分する方法論を列挙する.

2.1 前進/後退差分法

1 次の前進/後退差分法 (EF/EB) は,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (f_x)^n = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (f_x)^{n+1} = 0 \quad (2.3)$$

と書ける. 式 (2.2) EF は,

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t (f_x)^n \quad (2.4)$$

により, u^n から u^{n+1} の計算が可能である. 式 (2.3) EB は, 一般には u^{n+1} を求めるための反復計算が必要となる. そこで, DTS 法により疑似時間項 $\partial u / \partial \tau$ を導入し,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u - u^n}{\Delta t} + f_x = 0 \quad (2.5)$$

を解くことを考える. 疑似時間項に EB 法を用いると

$$\frac{u^{v+1} - u^v}{\Delta \tau} + \frac{u^{v+1} - u^n}{\Delta t} + (f_x)^{v+1} = 0 \quad (2.6)$$

となり, $\Delta u = u^{v+1} - u^v \rightarrow 0$ のとき $u^v \rightarrow u^{n+1}$ となる.

$$(f_x)^{v+1} = (f_x)^v + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \quad (2.7)$$

と線形化 ($A = \partial f / \partial u$) すると, 式 (2.6) は

$$\left[1 + \frac{\Delta\tau}{\Delta t} + \Delta\tau \frac{\partial}{\partial x} A\right] \Delta u = -\Delta\tau \left(\frac{u^v - u^n}{\Delta t} + (f_x)^v \right) \quad (2.8)$$

と書け、式 (2.5) を解くことは、式 (2.8) の内部反復計算に帰着する。ここで、 $\Delta\tau = \Delta t$ とすれば、ニュートン法になることに注意する。2次精度の後退差分法 (BDF2) は、

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + (f_x)^{n+1} = 0 \quad (2.9)$$

となり、同様に DTS 法を適用すると

$$\left[1 + \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t} + \Delta\tau \frac{\partial}{\partial x} A\right] \Delta u = -\Delta\tau \left(\frac{3u^v - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + (f_x)^v \right) \quad (2.10)$$

の内部反復を毎ステップ解くことに帰着する。

2.2 陽的ルンゲクッタ法

ルンゲクッタ法 (RK) は、Multi-stage 法とも呼ばれ、1 時間ステップを幾つかの段 (Stage) に刻む。一方、BDF2 は Multi-step 法と呼ばれることがある。

2 次の TVD ルンゲクッタ法 (TVD-RK2) は、

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n \\ u^{(2)} &= u^n - \Delta t f_x^{(1)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^{(2)} - \frac{1}{2}\Delta t f_x^{(2)}$$

ここで、 $f_x^{(1)} = f_x(u^{(1)})$ などを表す。3 次の TVD ルンゲクッタ法 (TVD-RK3) は、

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n \\ u^{(2)} &= u^n - \Delta t f_x^{(1)} \\ u^{(3)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(2)} - \frac{1}{4}\Delta t f_x^{(2)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(3)} - \frac{2}{3}\Delta t f_x^{(3)}$$

4 次の古典的なルンゲクッタ法 (RK4) は

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n \\ u^{(2)} &= u^n - \frac{1}{2}\Delta t f_x^{(1)} \\ u^{(3)} &= u^n - \frac{1}{2}\Delta t f_x^{(2)} \\ u^{(4)} &= u^n - \Delta t f_x^{(3)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$u^{n+1} = u^n - \frac{1}{6}\Delta t (f_x^{(1)} + 2f_x^{(2)} + 2f_x^{(3)} + f_x^{(4)})$$

式 (2.4) の第 4 式は、実計算上は以下で計算される。

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}(-u^{(1)} + u^{(2)} + 2u^{(3)} + u^{(4)}) - \frac{1}{6}\Delta t f_x^{(4)} \quad (2.14)$$

これら表式を一般化すると、 $u_t + F = 0$ に対する s 段 RK 法は

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u^n - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} F(t^{(j)}, u^{(j)}), i = 1, \dots, s \\ u^{n+1} &= u^n - \Delta t \sum_{i=1}^s b_i F(t^{(i)}, u^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

と書かれる。ここで、 $t^{(j)} = t^n + c_j \Delta t$ とした。式 (2.1) の場合

は、 $F = f_x$ にあたる。陽的 RK 法 (ERK) の場合は、 $j \geq i$ に対して $a_{ij} = 0$ とする。また、RK 法の各段の係数には、ある制約条件下で任意性があり、計算負荷や正値性を考慮した様々なルンゲクッタ法が提案されている。RK 法の係数は、以下 Fig. 1 のようなブッチャー配列 (Butcher tableau) で書くことと便利である。 s 段陽的 RK 法のブッチャー配列は、Fig. 2 のようになる。

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

Fig. 1 Butcher tableau for general Runge-Kutta methods

0	0	\dots	\dots	\dots	0
c_2	a_{21}	0	\dots	\dots	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	0	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss-1}	0
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Fig. 2 Butcher tableau for explicit Runge-Kutta methods

2.3 陰的ルンゲクッタ法

式 (2.15) に関して、 $j > i$ に対して $a_{ij} = 0$ とするものを半陰的 (Semi-implicit) RK 法あるいは対角陰的 (Diagonally implicit) RK 法 (DIRK) という。また、ある $j > i$ に対して $a_{ij} \neq 0$ のものを陰的 (Implicit) RK 法 (IRK)、すべての $j > i$ に対して $a_{ij} \neq 0$ のものを完全陰的 (Fully implicit) RK 法 (FIRK) という。陰的 RK 法では、 $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(s)}$ の連立方程式をニュートン法等の反復計算によって求める必要があり、計算量が膨大になる。半陰的 RK 法のうち、対角要素を同じ値にした方法が Singly Diagonally IRK 法 (SDIRK)、1 段目の対角要素を 0 にしたものが Explicit Singly Diagonally IRK 法 (ESDIRK) である。このあたりの係数の関係を、ブッチャー配列で簡略化して書くと、Fig. 3 のようになる[10]。実際の 4 次の ESDIRK4 のブッチャー配列は、Fig. 4 となる[11]。

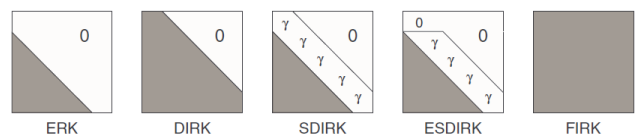


Fig. 3 Structure of the matrix in the Butcher tableau [10]

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
$\frac{83}{250}$	$\frac{8611}{62500}$	$-\frac{1743}{31250}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$\frac{31}{50}$	$\frac{5012029}{34652500}$	$-\frac{654441}{2922500}$	$\frac{174375}{388108}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{17}{20}$	$\frac{15267082809}{155376265600}$	$-\frac{711443401}{120774400}$	$\frac{730878875}{902184768}$	$\frac{2285395}{8070912}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$-\frac{2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$
b_j	$\frac{82889}{524892}$	0	$\frac{15625}{83664}$	$\frac{69875}{102672}$	$-\frac{2260}{8211}$	$\frac{1}{4}$

Fig. 4 Butcher tableau for ESDIRK4 [12]

式 (2.15) の各段の計算に DTS 法を適用すると,

$$u_\tau^{(i)} + \frac{u^{(i)} - u^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^i a_{ij} F^{(j)} = 0 \quad (2.16)$$

を解く. ただし, $F^{(j)} = F(t^{(j)}, u^{(j)})$ とした. 式 (2.16) は

$$u_\tau^{(i)} + \frac{u^{(i)}}{\Delta t} + a_{ii} F^{(i)} + \left(-\frac{u^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F^{(j)} \right) = 0 \quad (2.17)$$

と変形され, $u_\tau^{(i)}$ に BE 法を適用, $\Delta u = u^{(i)v+1} - u^{(i)v}$ とおくと,

$$\left[1 + \lambda + \Delta\tau \gamma \frac{\partial F^{(i)v}}{\partial u} \right] \Delta u = -(\lambda u^{(i)} + \Delta\tau \gamma F^{(i)v})^v + \left(\lambda u^n - \Delta\tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F^{(j)} \right) \quad (2.18)$$

を内部反復で解くことに帰着する. ここに, $\gamma = a_{ii}$, $\lambda = \Delta\tau/\Delta t$ である.

式 (2.18) は, 多次元やシステムの場合へも自然に拡張できる. 例えば, $F = f_x + g_y$ (2次元) の場合, ADI法を適用すると

$$[1 + \Delta\tau^* \partial_x A][1 + \Delta\tau^* \partial_y B] \Delta u = RHS \quad (2.19)$$

を解くことに帰着する. ただし, $\Delta\tau^* = \Delta\tau/(1 + \Delta\tau/\Delta t)$, $A = \partial f/\partial u$, $B = \partial g/\partial u$ である.

3. 計算結果と考察

時間積分法の基本的特性を調べるため, 式 (2.1) について計算した. 空間離散化は, 分割数を 256 点とし, 1 次精度風上, 2 次精度中心, 3 次精度 MUSCL, 5 次精度 WENO を試した.

移流方程式 ($f = u$) に対して, 孤立正弦波を初期値として CFL=1 の下で 2 周期回った結果を, TVD-RK3, RK4 について Figs. 5,6 に示した. MUSCL や WENO では, 位相遅れのないきれいな解が得られているのがわかる. ここに示してはいないが, TVD-RK2 では, CFL=1 で解は得られるものの歪が大きい, Fig. 7 は, Burgers 方程式 ($f = 0.5u^2$) を, CFL=1 とし RK4 で解いたものである. 2 次精度中心は解が発散しているが, MUSCL や WENO ではきれいな切立ちが得られている.

Figs. 8,9 は, 移流方程式を BDF2 陰解法で解く際に, 式 (2.10) の内部反復の相対残差を 1 桁, 3 桁, 5 桁落とした場合の解の様子 (空間精度は 3rd MUSCL) を CFL=2.4 について示したものである. 内部残差を 3 桁以上落とすとほぼ一定の解が得られているが, CFL=4 では位相誤差が相当に大きくなっている.

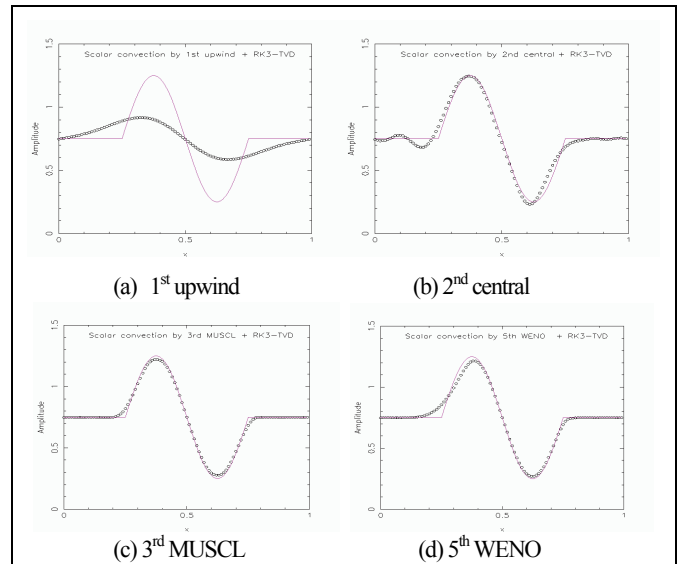


Fig. 5 TVD-RK3 result to advection equation for sinusoidal wave

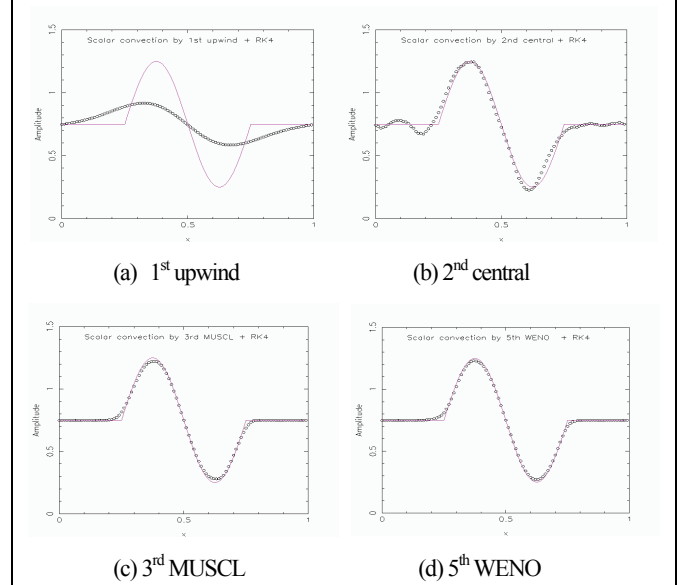


Fig. 6 RK4 result to advection equation for sinusoidal wave.

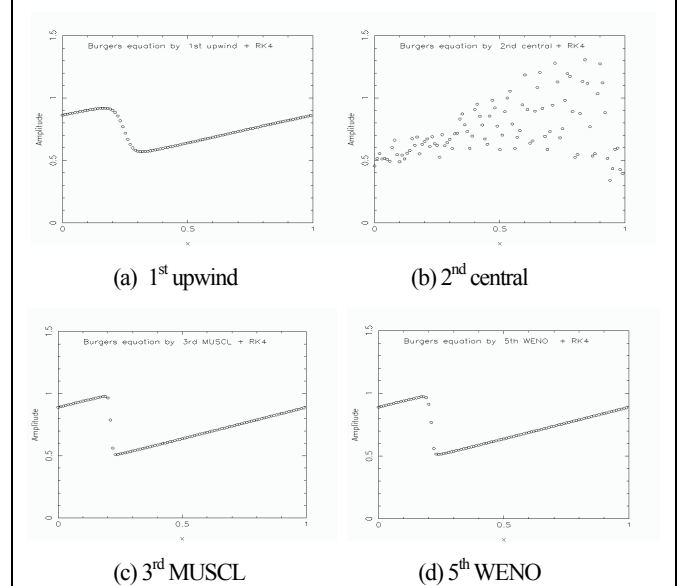


Fig. 7 RK4 result to Burgers equation for sinusoidal wave

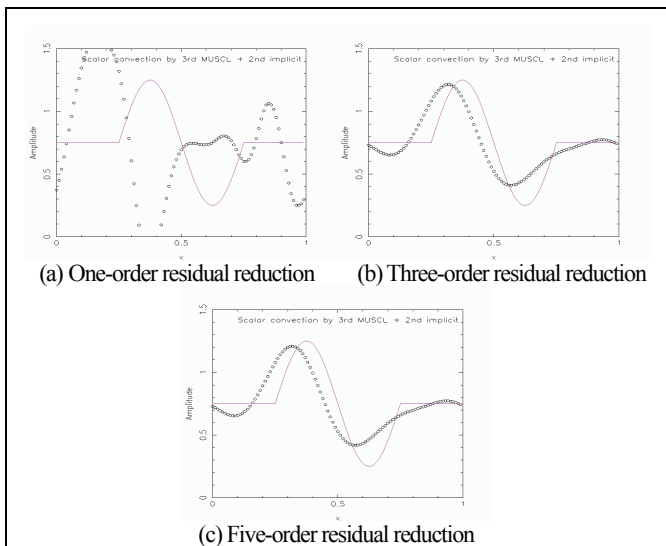


Fig. 8 BDF2 result to advection equation for sinusoidal wave
-Effects of the number of inner iteration at CFL=2

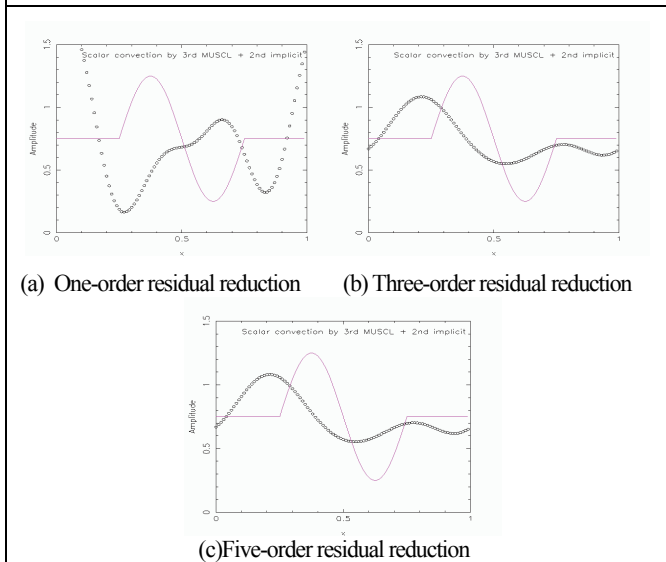


Fig. 9 BDF2 result to advection equation for sinusoidal wave
-Effects of the number of inner iteration at CFL=4

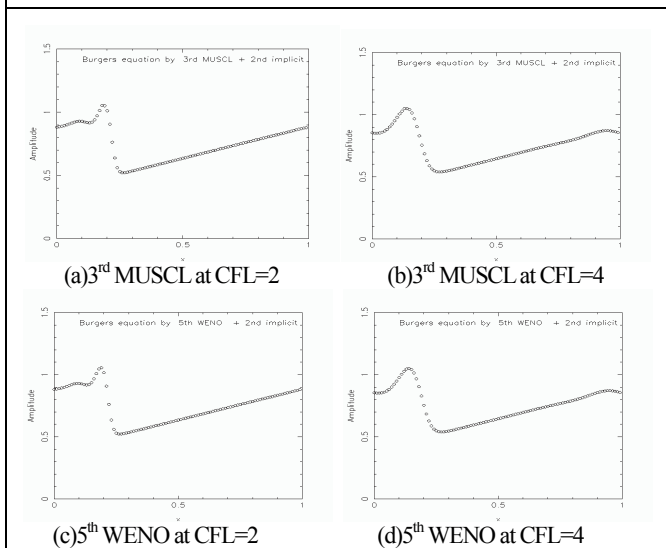


Fig. 10 BDF2 result to Burgers equation for sinusoidal wave
-Effects of CFL number

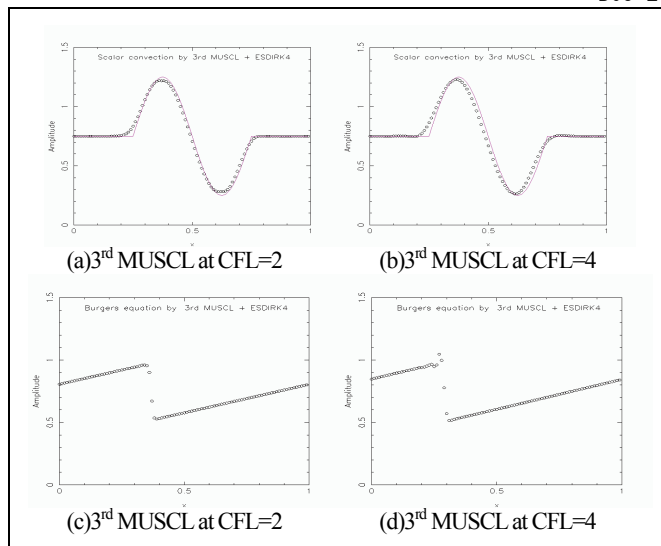


Fig. 11 ESDIRK4 result to advection equation/Burgers equation
for sinusoidal wave - Effects of CFL number

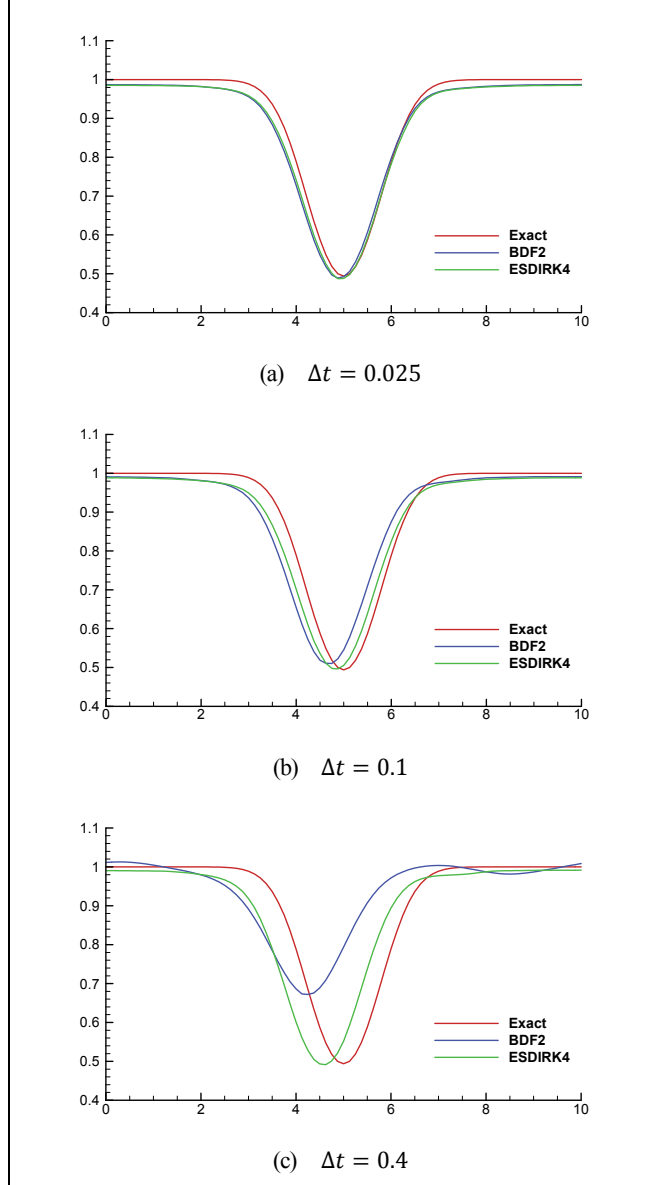


Fig.12 Comparison of centerline density distribution

Fig.10 は, Burgers 方程式を BDF2 で解いたものであり, CFL=2.4 で比較 (空間精度は 3rd MUSCL と 5th WENO) した. 波の先頭に振動が出ているのがわかる.

Figs. 11 は, ESDIRK4 を用いて移流方程式, Burgers 方程式を解いたものである. CFL=2 の場合, BDF2 で現れていた位相誤差や波の先頭の振動が消えているのがわかる.

次に 2 次元の Euler 方程式

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x + \mathbf{g}_y = 0 \quad (3.1)$$

について, BDF2 と ESDIRK4 の時間積分を試した結果を示す. ここに, $\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ の定義は慣例に従うものとして省略する.

式 (3.1) の時間積分に BDF2 と DTS を適用すると,

$$\left[1 + \Delta\tau^* \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \Delta u = -\Delta\tau^* \left[\frac{3u^v - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + (f_x + g_y)^v \right] \quad (3.2)$$

を内部反復で解くことに帰着する. $\Delta\tau^* = \Delta\tau / (1 + 3\Delta\tau / 2\Delta t)$. 左辺には ADI 法を適用する.

一方, 時間積分に ESDIRK4 を適用すると, 各ステージで

$$\begin{aligned} \left[1 + \Delta\tau^* \gamma \left(A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \Delta u = & -\Delta\tau^* \left(\frac{u^{(i)v}}{\Delta t} + \gamma (f_x + g_y)^v \right) \\ & + \Delta\tau^* \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (f_x + g_y)^{(j)} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

を内部反復で解くことに帰着する. ここに, $\gamma = a_{ii}$, $\Delta\tau^* = \Delta\tau / (1 + \Delta\tau / \Delta t)$ である. 左辺には同じく ADI 法を適用する.

ここでは, 文献[11]を参考に, 渦の移流問題を解いた. 初期値として

$$\begin{aligned} \rho &= T^{\gamma-1} \\ u &= M_\infty - \frac{V_s}{2\pi} (y - y_0) e^{G_s(1-r^2)} \\ v &= \frac{V_s}{2\pi} (x - x_0) e^{G_s(1-r^2)} \\ T &= T_\infty - \frac{V_s^2(\gamma - 1)}{16G_s\gamma\pi^2} e^{2G_s(1-r^2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

を設定 (ただし, $M_\infty = 0.5, V_s = 5.0, G_s = 0.5$) し, 計算領域を 10×10 , 格子点数を 80×80 とし, $(x_0, y_0) = (5, 5)$ に置いた渦が 3 周した後の解を比較した.

Fig.12 は, $\Delta t = 0.025, 0.05, 0.4$ の 3 通りの時間刻みに対して, BDF2 と ESDIRK4 の中心線 ($y = 5$) に沿った密度分布を比較したものである. BDF2 では, Δt が大きくなるにつれて, 渦の強さの減衰と位相誤差の拡大がみられる. ESDIRK4 では BDF2 ほどではない. ちなみに, Δt に対応した CFL は, 3.3, 14, 55 である. ESDIRK4 の場合, ステージごとに数回の右辺の計算が出てくるので, 計算時間については BDF2 の数倍程度は余計にかかる. 3 次元になるとその差はますます広がるので, BDF2 に比べ ESDIRK4 は, 解の質の点では望ましい特性を持っているが, 採用は計算時間とのトレードオフで考えるべきである.

4. まとめと今後の展開

本稿では, 時間積分法の幾つかの方法論を比較することにより, 時間積分法の基本的特性について調べ, 以下のことがわかった.

- (1) RK4 は CFL=1 でも安定に空間精度を反映した解が得られる. ただし, 計算時間は EF の 4 倍かかる.
- (2) BDF2 に DTS を適用した場合の内部反復は, 残差を 3 桁以上落とせば収束した解が得られる. 移流方程式では CFL=4 まで上げると, 位相誤差が拡大し解の形も崩れた. Burgers 方程式では波の切立ちの前部分に振動が見られた.
- (3) ESDIRK4 は, 大きな CFL 数に対しては BDF2 に比べ位相誤差の少ない減衰の少ない解が得られる. ただし, 計算コストは数倍以上かかる.

今後は, 実用問題へ適用を通じて陰解法の特性検討をより深く掘り下げて行きたい.

謝辞

本研究を進めるにあたり, JAXA 航空の相曾秀昭氏に有益なご助言をいただいた. 記して謝意を表する.

参考文献

- [1] Hirsch, C., Numerical Computation of Internal & External Flows, 2nd Edition, Elsevier 2007.
- [2] Ascher, U. M., Ruuth, S. J. and Spiteri, R. J., "Implicit-Explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations," Applied Numerical Mathematics, Vol. 25, p.151-167, 1997.
- [3] Hairer, E. and Wanner, G., Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. Springer, 2010.
- [4] Wang, L., Mavriplis, D. J., "Implicit solution of the unsteady Euler equations for high-order accurate discontinuous Galerkin discretizations," Journal of Computational Physics, Vol. 225, p.1994-2015, 2007.
- [5] Blom, D.S., Bigl, H., Birken, P., Meister, A. and A. H. Van Zuijlen, "Rosenbrock Time Integration for Unsteady Flow Simulations, V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, 2013.
- [6] Bijl, H., Carpenter, M. H.; Vatsa, V. N. & Kennedy, C. A., "Implicit Time Integration Scheme for the Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations: Laminar Flow," Journal of Computational Physics, Vol. 179, p313-329, 2002.
- [7] 嶋: 圧縮性 CFD による低マッハ数流れ計算のための新しい陰的時間積分法, 第 25 回数値流体力学シンポジウム講演論文集(2011).
- [8] 青野, 岡田, 野々村, 河合, 藤井: 陰解法の時時刻みと収束率が圧縮性非定常流体解析の精度・効率に与える影響, 第 28 回数値流体力学シンポジウム講演論文集(2014).
- [9] Hairer, E. and Wanner, G., Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. Springer, 2010.
- [10] Kristensen, M. R., "Development of Models and Algorithms for the Study of Reactive Porous Media Processes," PhD Thesis, Technical University of Denmark, 2008.
- [11] Pulliam, T. H., "Time Accuracy and the Use of Implicit Methods," NASA Ames Research Center, 2014.