

Matrix-free defect correction を用いた陰的・高次精度 FR ソルバーの構築

Matrix-free defect correction scheme for implicit high-order flux reconstruction solver

- 芳賀 臣紀, 宇宙航空研究開発機構, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, haga.takanori@jaxa.jp
 嶋 英志, 宇宙航空研究開発機構, 神奈川県相模原市由野台 3-1-1, shima.eiji@jaxa.jp
 Takanori Haga, JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan
 Eiji Shima, JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan

A simple and low memory storage implicit scheme of the high-order flux reconstruction method is presented. This scheme is based on the defect correction procedure in which the solution is improved by solving a simplified linear system using the residual for high-order discretization. In order to construct simple and converging iterative scheme, a sub-cell which is represented by a solution point in a grid cell is introduced and then a diagonally dominant Jacobian matrix is obtained by the first-order upwind discretization for sub-cells. The proposed scheme can save intensive CPU cost for computing high-order Jacobian and therefore it requires no storage for the huge high-order Jacobian. The newly developed Defect Correction on Sub-Cell (DECS) scheme is applied to solve the Euler and Navier-Stokes equations and the computational cost is compared to the conventional high-order implicit scheme.

1. 始めに

高次精度の非構造格子法は、複雑形状周りの実用 LES を実現する次世代の流体ソルバーの構築法として期待されており、特に欧米では盛んに研究・開発が行われてきた。代表的な手法は不連続ガレルキン (discontinuous Galerkin, DG) 法^(1,2) であるが、最近ではより構築が容易な流束再構築 (Flux Reconstruction, FR) 法⁽³⁾ が提案され、関連する研究が多数報告されている。いずれも空間を分割する計算要素(セル)内に高次精度化のための自由度を持ち、セル境界の流束を近似リーマン解法などの数値流束で評価することが特徴である。高次精度化に必要なステンシルの情報がセル毎にまとまっているため CPU のキャッシュ利用効率が高く、また領域分割の際の通信に必要なデータがセル界面の流束だけで済むため高い並列性を期待できるという利点もある。

これらの手法は近年幅広い分野で適用例が報告されているが、特に航空宇宙分野においてはいまだ実用的に利用されているとはいえない。DG 法などは、従来広く用いられている空間 2 次精度の有限体積法 (FVM) や有限要素法 (FEM) と比べると、同規模の格子を用いた場合に、計算コストが非常に大きいことが指摘されてきた。これまでに陰解法や解適合法などの効率解法の研究が進み、数十サイクルで収束解が得られるクリロフ部分空間法^(4,5) などが利用されているが、左辺のヤコビアンの高次精度離散化のコストが非常に大きく大規模な計算は難しい。最近行われた高次精度手法ワークショップ⁽⁶⁾ においても、NASA-CRM の RANS 解析を行うのに従来 FVM の 10 倍以上の計算コストを要するとの報告があり、プロダクトコードとしての利用は難しい状況である。レイノルズ数が比較的低い (Re~O(10⁴)) LES などは、適用例が多くこれらの高次精度手法の有効性が示されているが、RANS などの定常計算については、計算コストが低い効率的な陰解法の構築が難しく、未だに FVM に対する優位性を示すことが難しい。

そこで本研究では、従来の FVM や高次精度の構造格子法でも利用されている、左辺のヤコビアンを低次精度の近似をセル内自由度に対応するサブセルに対して適用することで、計算量が少なく、かつ安定で収束する簡易な陰解法を構築することを目標とする。従来の高次精度離散化を用いた Block LU-SGS 陰解法⁽⁷⁾ と計算コスト (CPU 時間およびメモリ使用量) を比較して本手法の有効性を示す。

2. Flux Reconstruction 法

計算領域は六面体セルで分割されているとする。デカルト座標系 (x, y, z) で表される物理空間の全てのセルを、それぞれ一般座標 (ξ, η, ζ) で表される計算空間の標準セル $E_s = \{\xi, \eta, \zeta | -1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1\}$ に変換する。物理空間の各セル形状は N 個の定義点 $\vec{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$ とそれらに対応する形状関数 $M_j(\xi, \eta, \zeta)$ を用いて次のように表すことができる。

$$\vec{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi, \eta, \zeta) \vec{x}_j \quad (1)$$

変換のヤコビアン $J := |\partial(x, y, z) / \partial(\xi, \eta, \zeta)|$ とメトリックス $J \nabla \xi$ などはこれらの微分を基に計算することができる。

基礎方程式は一般曲線座標での強保存形式の Navier-Stokes 方程式である。

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\hat{Q} = JQ$, $\hat{E} = J \nabla \xi \cdot \vec{F}$ などであり、 Q は保存量のベクトル、 $\vec{F} = (E, F, G)$ はデカルト座標の流束関数である。式(2)を解くために、各セルに内点 (内部自由度) を導入し解を多項式近似する。一般座標の各方向に $K+1$ 個の解の定義点 (Solution point, SP と呼ぶ) を用いると K 次のラグランジュ多項式が得られ、セル内分布は各方向の多項式のテンソル積として与えられる。

$$Q_i(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j,k,l=0}^K Q_{i,j,k,l} \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \phi_l(\zeta) \quad (3)$$

ここで i はセルのインデックス、 j, k, l は SP のインデックスであり、 $\phi_j(\xi)$ は K 次のラグランジュ多項式である。セル内の SP の選び方には任意性があるが、本稿ではガウス点を用いた K 次の近似多項式を用いることにより空間 $K+1$ 次精度のスキームとなる。

内部自由度 $Q_{i,j,k,l}$ の時間発展を解くために、流束の微分を計算する。まず ξ 方向について考える ($\eta = \eta_k, \zeta = \zeta_l$ と固定)。 \hat{E} のセル内分布は SP における値を計算し、式(3)により K 次多項式

で近似できる.

$$\hat{E}_i(\xi, \eta_k, \zeta_l) = \sum_{j=0}^K \hat{E}_{i,j,k,l} \phi_j(\xi) \quad (4)$$

この ξ 方向微分は次のように計算できる.

$$\partial_\xi \hat{E}_i = \sum_{j=0}^K \hat{E}_{i,j,k,l} \phi_j'(\xi) \quad (5)$$

しかし, この流束近似 \hat{E}_i は周囲セルの情報を反映せずセル境界で不連続な分布となる. そこで, セル境界で共通の流束値を取るような分布 \hat{E}_i^c を再構築する. この共通の数値流束を求めるセル境界上の点は, 各方向に並んだ SP を通る直線とセルを囲む面の交点とし, Flux point (FP) と呼ぶ. 数値流束を計算するため, 境界の両側のセルから FP における解 Q^L, Q^R を式(3)を用いて外挿する. 非粘性流束は近似リーマン解法を利用して風上の求める. 本稿の検証問題では特に明示しないかぎり Roe スキームを用いる. 粘性流束は Bassi-Rebay2 スキーム⁽⁴⁾ で求める.

\hat{E}_i^c は, $\partial_\xi \hat{E}_i^c$ の次数が解の近似多項式の次数 K と等しくなるよう, $K+1$ 次の多項式とする. Huynh⁽⁵⁾ は不連続な分布 \hat{E}_i に加える修正を, 左右 2 つの境界からの寄与に分離した. 今, 左のセル境界 ($i-1/2$ で表す) に着目すると, 共通流束 $\hat{E}_{i-1/2}^{com}$ と一致するためには次のような修正分布を加えればよい.

$$[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1)]g_L(\xi) \quad (6)$$

ここで左の境界に対する修正関数 g_L は左端 ($\xi = -1$) で 1, 右端 ($\xi = 1$) で 0 となるような $K+1$ 次多項式である. 文献⁽³⁾ ではいくつかの修正関数が提案されているが, 本研究では g_{Ga} と呼ばれる修正関数を用いる.

以上により, 左右境界からの修正を加えた流束 \hat{E}_i^c は次のようになる.

$$\begin{aligned} \hat{E}_i^c(\xi) = & \hat{E}_i(\xi) + [\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1)]g_L(\xi) \\ & + [\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(1)]g_R(\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

したがって式(2)における ξ 方向の流束微分は次式で計算される.

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{E}_i^c = & \partial_\xi \hat{E}_i + [\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1)]g_L'(\xi) \\ & + [\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(1)]g_R'(\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

η および ζ 方向の流束微分も同様に計算することができる. 以上により FR 法の半離散化式が得られた.

2. 高次精度・非構造格子法の陰解法

新手法を導入する前に, 従来の高次精度・非構造格子法の陰解法について整理する. FR 法の半離散化式に Euler 陰解法を用いると, 空間項を $R = (\partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G})/J$ とおいて次のように書ける.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -R(Q^{n+1}) \quad (9)$$

ここで $\Delta Q \equiv Q^{n+1} - Q^n$ である. 空間項を解ベクトル Q について線形化すると次式を得る.

$$\left(\frac{I}{\Delta t} - \frac{\partial R}{\partial Q}\right) \Delta Q = -R(Q^n) \quad (10)$$

時間ステップを無限大にすると, これは定常問題 $R(Q) = 0$ に対するニュートン法となる. 通常, 左辺のヤコビアンは計算コストとメモリの制約から簡略化されたものが用いられるが, 近似の仕方によっては収束性や安定性が得られないため, それらを担保しつつかつ計算コストが少ない近似を行うかが実用的な陰解法を構築する鍵となる.

高次精度 FR 法では, 計算セル同士のカップリングは従来の有限体積法と同様に面を共有する隣接セルだけなので, 左辺のヤコビ行列は各行に対角ブロックと非対角ブロックが隣接セルの数だけ並んだ疎行列となる. しかしセル内の SP 間のカップリングがあるため, 各ブロックは密行列であり次元も自由度に比例して大きい. たとえば, 三次元の六面体セルではセル内自由度が $(K+1)^3$ なので, 保存変数の数を 5 とすると, 行列サイズは $(5 \times (K+1))^2$ となり, K の 6 乗に比例する. Table 1 に各近似次数に対するブロック行列のサイズと 1 セル当たりのメモリ要求を示す. 空間 4 次精度 ($K=3$) の場合, $320^2=102,400$ もの行列成分となり, 計算コストとメモリ量が非現実的に大きい (10 万セル格子で 76GB のメモリ要求となる). 欧米ではクリロフ部分空間法を用いた解法⁽⁴⁵⁾ がよく使われているが, 対角ブロックだけでなく非対角ブロック (またはその一部) を用いた手法が多く, 左辺の演算・メモリコストが大きく実用化の障壁となっている.

他方, セル平均値のみをもつ FVM では, 保存変数を 5 成分とすると, 各セルのブロック行列は 5×5 と小さく, さらに対角化の近似を行うことで行列反転が不要な陰解法が利用されている. しかし, DG 法や FR 法などの高次精度手法では, 左辺を単純に低次精度で近似すると, 特に粘性計算で係数行列の優対角性が失われ, ヤコビ法やガウス・ザイデル法などの定常反復法が利用できないことが知られている.⁽⁶⁾

低次精度の近似として, セル内多項式近似の次数を下げる方法では, 例えば 0 次多項式 (定数) 近似の場合, 内部自由度の数に対してセル平均値という 1 つの自由度 (積分量) だけしか使わないことになりかなり粗い近似となる. そこで内部自由度の情報を捨てずにヤコビアンを簡略化すること考える. 具体的には各セル内の SP が代表するサブセルを考え, それに対して一次精度の FVM 離散化を適用する. 以下では, まずサブセルという概念を導入するために FR 法の離散的保存則について述べる.

Table 1 高次精度離散化によるヤコビアンのメモリ要求

次数 K	ブロック行列のサイズ	メモリ要求セル [MB]
1	40x40	0.012
2	135x135	0.14
3	320x320	0.78
4	625x625	2.98

3. FR 法におけるサブセルの導入と離散的保存

基礎方程式のセル内での積分により, 次の関係が得られる. (\hat{E}_i^c 等は FR 修正後の流束である.)

$$\int_{-1}^1 \partial_{\xi} \hat{E}_i^C d\xi = \hat{E}_{i+1/2}^C - \hat{E}_{i-1/2}^C \quad (11)$$

また, $\partial_{\xi} \hat{E}_{i,j}^C$ を SP での $\partial_{\xi} \hat{E}_i^C$ とする. 位置が重複しない任意の $K+1$ 点の SP が与えられた時, $\partial_{\xi} \hat{E}_i^C$ が K 次までの多項式であれば, 次を満たす ω_j が存在する.(ただし任意の SP 位置の場合 $\omega_j > 0$ は保証されない)

$$\int_{-1}^1 \partial_{\xi} \hat{E}_i^C d\xi = \Delta \xi \sum_{j=0}^K \omega_j \partial_{\xi} \hat{E}_{i,j}^C \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^K \omega_j = 1 \quad (13)$$

なお, SP が Gauss 点で定義されていれば ω_j は Gauss 積分のものと一致し, $2K+1$ 次までの多項式で等号が成立する. ここで次の定義を導入する.

$$\Delta \xi_j \equiv \Delta \xi \omega_j \quad (14)$$

$$\check{E}_{1/2}^C \equiv \hat{E}_{i-1/2}^C \quad (15)$$

$$\check{E}_{j+1/2}^C \equiv \check{E}_{j-1/2}^C + \Delta \xi_j \partial_{\xi} \hat{E}_{i,j}^C \quad (16)$$

この表記を用いると式(12)は次のように小区間の流束収支の総和として表すことができる.

$$\int_{-1}^1 \partial_{\xi} \hat{E}_i^C d\xi = \sum_{j=0}^K (\check{E}_{j+1/2}^C - \check{E}_{j-1/2}^C) \quad (17)$$

また, 式(16)より流束の微分は次のように書ける.

$$\partial_{\xi} \hat{E}_{i,j}^C = \frac{\check{E}_{j+1/2}^C - \check{E}_{j-1/2}^C}{\Delta \xi_j} \quad (18)$$

η, ζ 方向に関しても同様なので, 基礎方程式の反離散化式は次のように表される.

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{Q}_{j,k,l} + \frac{\check{E}_{j+1/2}^C - \check{E}_{j-1/2}^C}{\Delta \xi_j} + \frac{\check{F}_{k+1/2}^C - \check{F}_{k-1/2}^C}{\Delta \eta_k} \\ + \frac{\check{G}_{l+1/2}^C - \check{G}_{l-1/2}^C}{\Delta \zeta_l} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

これにより離散的保存関係が示された. 算出手順から $\check{E}_{j+1/2}^C$ 等は SP および FP での \hat{E}_i^C の線形結合で表わされることは明らかである. したがって, 式(19)を差分式の形に変形することができ, したがって, FR 法はセル内での差分法の一つといえる.

ヤコビアン $J := |\partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \zeta)|$ から, サブセルの検査体積および面積ベクトル (ξ 一定の面上) は

$$V_{j,k,l} \approx \Delta \xi_j \Delta \eta_k \Delta \zeta_l J_{j,k,l} \quad (20)$$

$$\check{s}_{j+1/2,k,l} \approx \Delta \eta_k \Delta \zeta_l (J \nabla \xi)_{j+1/2} \quad (21)$$

と評価できる. 等号では無いのは, FDS 的に求めた値と FVM 的な検査体積が一致するわけではないためである. 無限小では両者は一致する. これらの対応関係を用いて, FVM と FDS の様々な手法を相互利用することが可能になる. 本研究では, FR 法とのコンパチビリティを重視した方法を用いる. サブセルの体積は SP のヤコビアンを用いて式(20)の右辺で評価する. サブセル境界の面積ベクトルは, 通常の FR 法では使われていないので新しく計算する必要がある.

4. Defect Correction on Sub-cell (DECS) 陰解法

高精度の離散化に忠実に左辺を構築したとしても, その結果得られる係数行列が優対角になるとは限らず, 計算コストも大きい. 近似的にでも優対角となる左辺の行列を構成できれば, 簡易な反復法が利用でき, 左辺の計算コストの大幅な削減が可能となる. 定常反復法は収束が遅く, 反復回数は多くなるが, 1反復当たりの計算コストを大きく削減できれば結果として高速な陰解法を構築できる可能性がある.

前節の議論から, セル内の $SP(j, k, l)$ について計算空間内で $\Delta \xi_j \Delta \eta_k \Delta \zeta_l$ の体積を有する検査体積と, サブセルのセルインターフェースでのメトリック (物理空間での面積ベクトルに対応) を定義できる. これにより FVM に対して開発された MFSGS 等の陰解法を定義することが可能となる. 各 $SP(j, k, l)$ に対応するサブセルについて, 有限体積法で離散化すると次のように書ける.

$$\frac{\Delta Q_{SP}}{\Delta t} + \frac{1}{V_{SP}} \sum_m \check{F}_{SP,m} s_{SP,m} = 0 \quad (22)$$

ここで添え字 m はサブセル $SP(j, k, l)$ の m 番目の境界面もしくは隣接するサブセル, V, s はサブセルの体積および境界の面積を表す. \check{F} は境界面における垂直方向の流束であり, 式(16)の FR 法の流束を用いれば空間高精度の離散化となる. オイラー陰解法は左辺に一次精度風上法を用い線形化を行って, 従来の有限体積法と同様に書ける.

$$\begin{aligned} \left[\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{V_{SP}} \sum_m s_{SP,m} \check{A}_{SP,m}^+ \right] \Delta Q_{SP} \\ - \frac{1}{V_{SP}} \sum_m s_{SP,m} \check{A}_{m,SP}^+ \Delta Q_m = -R_{SP}(Q^n) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで $\check{A} = \partial \check{F} / \partial Q$ であり, $\check{A}_{SP,m}^+$ はサブセル SP の m 番目の境界面における正方向 (SP から m へ) の数値流束のヤコビアンである. 式(23)の右辺に高精度 FR 法の離散化を用いれば, 式(10)の左辺のヤコビアンを近似した式とみなせる. 風上法を用いると優対角性が保証できるので, 緩和法が利用できる. 各時間ステップ n において収束解が得られれば, 左辺の近似によらず右辺の空間高精度の解が得られる. 解くべき高精度離散化式の残差を利用して, 線形化システムを近似的に解き, 数値解を修正する手順は, defect correction(DC)法⁹⁾ の一種と考えることができる.

式(23)を解くためには, FDM や FVM 用に開発された, LU-ADI, LU-SGS, MFSGS,⁽¹⁰⁾ TC-PGS⁽¹¹⁾ 等が利用できるが, 本研究では MFSGS を用いる. 定常計算では各時間ステップで完全に収束させる必要はないので, 反復回数の最大値($kmax$)を設定した. 右辺に比べて左辺の計算コストはとて小さいため, 収束に必要な反復回数が多くなってもトータルの計算コストの低減が期待できる.

DECS 法の計算手順を以下にまとめる。

1. 時刻 n ステップにおける解を Q^n とし, FR 法の高次精度離散化により右辺の残差 $R_{SP}(Q^n)$ を計算. 残差の収束判定の条件を満たしていれば計算終了.
2. 各セル内の SP が代表するサブセルについて, 式(23)の左辺の行列の非ゼロ成分 ($\hat{A}_{SP,m}^+$, $\hat{A}_{m,SP}^+$ など) を計算.
3. 式(23)の線形化システムを反復法で計算 (本研究では MFGS を用いる). 以下のようなループ構造となる.
 $\Delta Q^{k=0} = 0$ (for all SPs)
 Do $k=1, kmax$ (内部反復のループ)
 Do $iCell=1, nCell$ (セルのループ, k の偶奇に応じて対称スイープを適用)
 Do $iSP=1, nSP / iSP=nSP, 1, -1$ (SP のループ, 前進・後退のスイープを適用)
 ・ 式(23)を解き, ΔQ_{SP}^k を更新
 End do
 End do
 ・ 内部反復の収束判定を満たせばステップ 4 へ
 End do
 $Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q^k$ (for all SPs) としてステップ 1 に戻る.

5. 計算結果

定常流れのテストケースとして, NACA0012 翼型まわりの 2 次元流れ場を計算する. 計算格子は Fig. 1 に示すような O 型のトポロジで作成した. 格子の解像度は 4 種類用意した: (80x20, 160x40, 320x80, 640x160). ソルバーは 3 次元なので, スパン方向に 1 セル分押し出した六面体セルの格子となっている. 物体壁境界では, 高次精度 FR 法の内部自由度の増加を考慮し, 粗い格子でも曲面形状を精度良く表現できるように 2 次の形状関数を用いている. 遠方境界は翼弦の中心とする半径 1000c (c: コード長) の円とし, 主流条件を与える.

初めに, 主流マッハ数 0.3, 迎角 0.5° の亜音速非粘性流れに DECS 陰解法を適用した. 従来法との比較として, 左辺に高次精度離散化を用いた Block LU-SGS 法⁷⁾ を用いた. この BLU-SGS 法はヤコビアン対角ブロックだけを用いるが, 2 節で示したように要素数が次数 p の 6 乗に比例する密行列となるため, 左辺の計算が全体の計算時間の大部分を占める. Fig. 2 に収束履歴を示す. 残差が 6 桁減少するまでの時間ステップ数を比べると, p1 (2 次精度) では BLU-SGS の方が収束が早いだが, 高次精度 (p2 および p3) では計算初期に CFL 数の制約が厳しく収束が遅くなっている. また各時間ステップにおける内部反復回数 ($kmax$) が異なることにも留意されたい (DECS では 10 回, BLUSGS では 6 回 (往復 3 回) とした). CPU 時間に対する収束を比較すると, DECS 法の優位性は明らかである. 特に 3 次精度以上では BLU-SGS に対して数倍から 10 倍近い高速化が得られており, 高次精度になるほど効率的となる. 加えて DECS 法ではメモリ使用量も陽解法と同等に少ないという利点もある.

次に遷音速非粘性流れの計算を行った. 主流条件は, マッハ数 0.8, 迎角 1.25° である. Fig. 3 に空間 4 次精度 (p3), 320x80 の格子で計算したマッハ数分布を示す. 衝撃波捕獲法として, LAD スキーム¹²⁾ を用いた. 近似次数と格子解像度をそれぞれ変化させたときの収束履歴を Fig. 4 に示す. 2 次精度 (p1) に比べると高次精度化で若干収束が悪くなるが, 3 次と 4 次の収束はほぼ同等である. また格子解像度の依存性も少ない良好な結果が得られた. 残差が 4-6 桁程度減少した後の収束が遅いが, 実用的には空力係

数がほぼ収束した結果が数万ステップで得られる. さらなる収束性の改善には, 残差が桁減少したところで, Matrix free のクリロフ部分空間法に切り替える方法や, マルチグリッド法と組み合わせる方法などが考えられる.

最後に亜音速粘性流れに DECS 法を適用した. 主流条件は, マッハ数 0.5, 迎角 1.0° , レイノルズ数は 5000 である. Fig. 5 に空間 4 次精度 (p3), 320x80 の格子で計算したマッハ数分布を示す. 近似次数と格子解像度をそれぞれ変化させたときの収束履歴を Fig. 6 に示す. 非粘性のケースとは異なり, 収束性は近似次数および格子解像度の増加に対して悪化する結果となった. DECS 法の左辺のヤコビアンは, 従来の FVM と同様にスペクトル半径を用いた対角化近似を行っているが, 粘性流れのヤコビアン評価を工夫することで収束性が改善できるか, 今後の課題である.

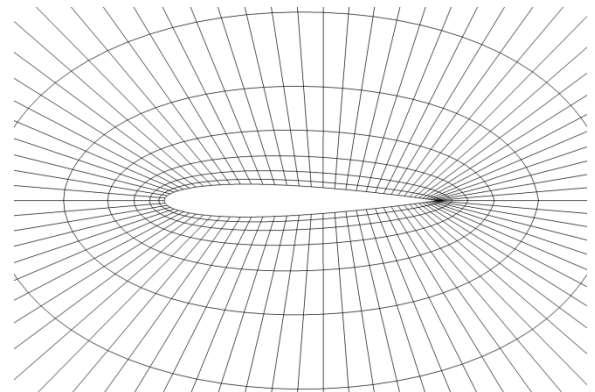


Fig. 1 Computational grid around NACA0012 airfoil (80x20 cells).

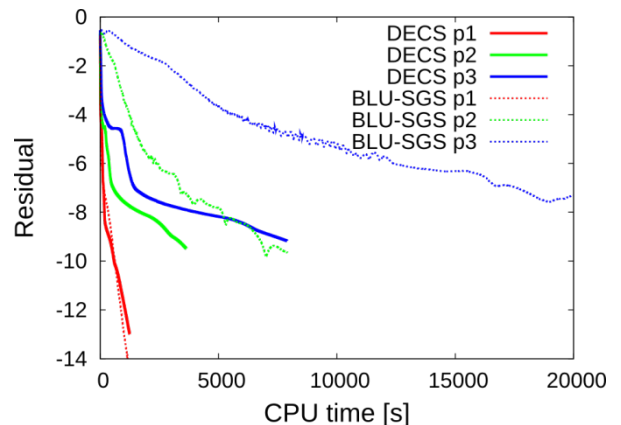
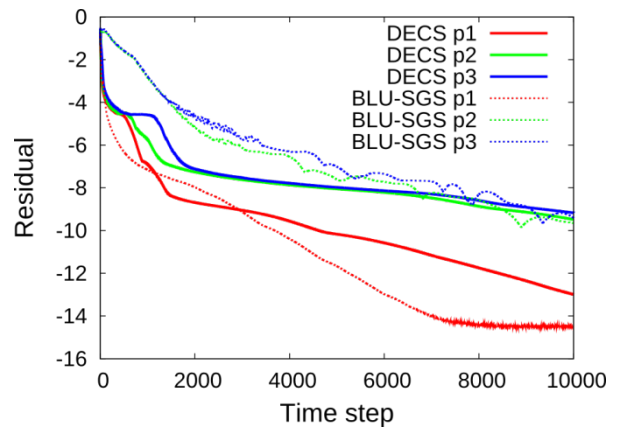


Fig. 2 Residual histories for inviscid subsonic flow over NACA 0012.

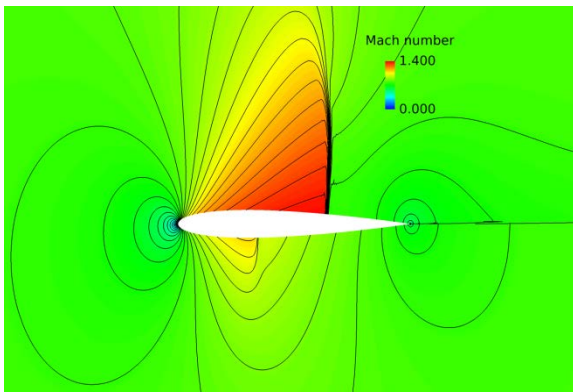


Fig. 3 Mach number contours for transonic inviscid condition obtained by p=3 approximation with 320x80 grid.

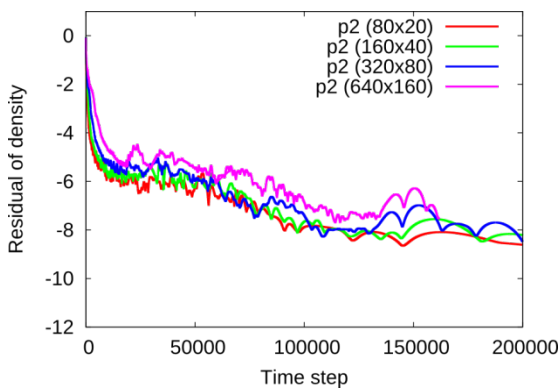
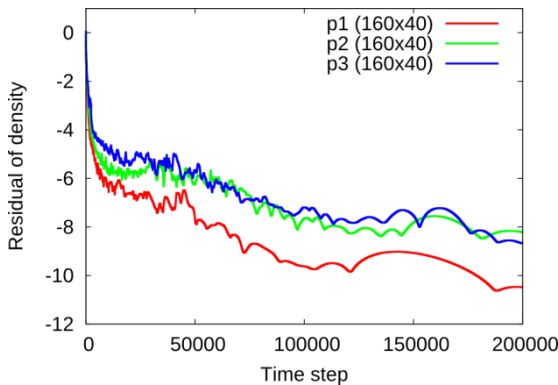


Fig. 4 Residual histories for inviscid subsonic flow over NACA0012.

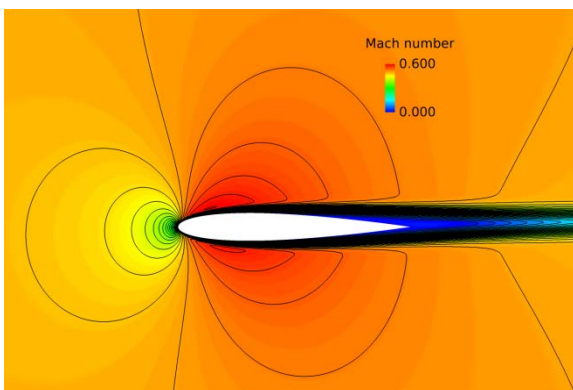


Fig. 5 Mach number contours for subsonic viscous condition obtained by p=3 approximation with 320x80 grid.

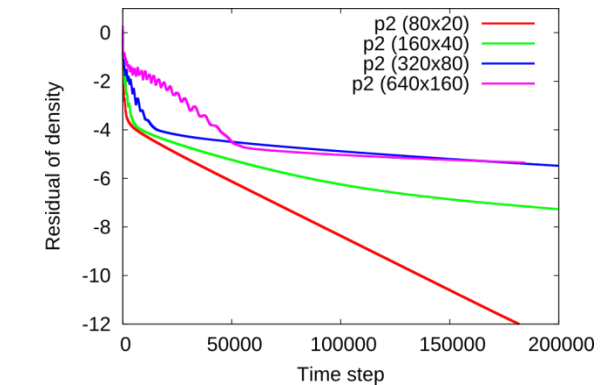
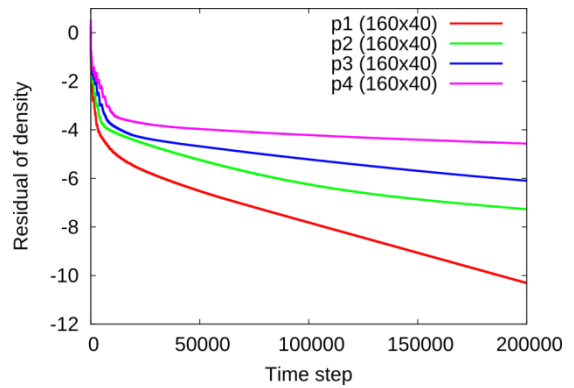


Fig. 6 Residual histories for inviscid subsonic flow over NACA0012.

6. まとめ

空間高次精度の FR 法に対する簡易で効率的な DECS 陰解法を構築した。本手法はセル内の内部自由度を考慮してサブセルを導入し、有限体積的な離散化により左辺のヤコビアンを近似することが特徴であり、MFGS 等の様々な手法を選択することができる。従来の高次精度離散化でヤコビアンを計算する方法に比べて、高次精度ステンシルを用いないことからブロック行列の大幅な簡略化が可能となるため、左辺の計算量が少なくメモリ使用量もほとんど増えないという利点がある。

翼型周りの定常流れを計算し、従来法の一つである BLU-SGS に対する優位性を示した。非粘性計算では、衝撃波を含む遷音速流れでも FR 法の近似次数および格子解像度にほとんど依存しない良好な収束性を確認した。粘性計算では、近似次数および格子解像度の増加に対して収束性が悪化する傾向が見られ、今後改善の余地がある。

参考文献

- (1) B. Cockburn, C.-W. Shu, "The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems," *J. Comput. Phys.* 141 (1998), pp. 199-224.
- (2) F. Bassi, S. Rebay, "A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations," *J. Comput. Phys.* 131 (1) (1997), pp. 267-279.
- (3) H.T. Huynh, "A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods," AIAA Paper 2007-4079.
- (4) F. Bassi, S. Rebay, "GMRES discontinuous Galerkin solution of the compressible Navier-Stokes equations," in *Lecture Note in Computational Science and Engineering 11*, Springer Verlag, New York, (2000), 197-208.

- (5) P.-O. Persson, J. Peraire, “Newton-GMRES Preconditioning for Discontinuous Galerkin Discretizations of the Navier–Stokes Equations,” *SIAM J. Sci. Comput.*, 30 (2008), 2709–2733.
- (6) 3rd International Workshop on High-Order CFD Method, 53rd AIAA ASM, January 3-4, (2015), <https://www.grc.nasa.gov/hiocfd/>
- (7) T. Haga, K. Sawada, Z.J. Wang, “An implicit LU-SGS scheme for the spectral volume method on unstructured tetrahedral grids,” *Commun. Comput. Phys.* **6(5)**, (2009) pp. 978-996.
- (8) H. Asada, Y. Ogino, K. Yasue, K. Sawada, “A third order accurate cellwise relaxation implicit discontinuous Galerkin scheme for unstructured hybrid meshes,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 176752.
- (9) H.J. Stetter, “The defect correction principle and discretization methods,” *Numer. Math.*, vol. 29, (1978) pp. 425-443.
- (10) 嶋, “構造/非構造格子CFDのための簡単な陰解法,” 第29回流体力学講演会, (1997) 2C9.
- (11) 嶋, “圧縮性CFDによる低マッハ数流れ計算のための新しい陰的時間積分法,” 第25回数值流体力学シンポジウム, (2009) C02-4.
- (12) T. Haga, S. Kawai, “Toward accurate simulation of shockwave-turbulence interaction on unstructured meshes: a coupling of high-order FR and LAD schemes,” AIAA Paper 2013-3065.