

# 繰り返し変数再構築に基づくコンパクトな高次精度有限体積法の提案

## Proposal of a Compact High-Order Finite-Volume Method based on Iterative Variable Reconstruction

- 玉置義治, 東大院, 東京都文京区本郷 7-3-1, 4644981114@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp:  
今村太郎, 東大院, 東京都文京区本郷 7-3-1, timat@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp:  
Yoshiharu Tamaki, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan.  
Taro Imamura, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan.

A new compact high-order variable reconstruction scheme for finite-volume methods is proposed. The approximation of derivatives is split into multi-step first-order least-squares methods, and then converges during iteration. In a time-dependent problem, the converged value at the previous time-step is used as an initial value of the iteration, and thus the iteration converges efficiently. The present scheme is used for reconstruction of a test function, and then, it is confirmed that the scheme has the designed accuracy. In a vortex-advection problem, grid-convergence is again confirmed. No serious instability is observed when the spatial accuracy is enhanced. In addition, it is shown that only one iteration of the reconstruction per time-step gives sufficient convergence under a stable CFL condition of the time-explicit scheme, and that high-order accuracy is achieved efficiently.

### 1. 序論

航空機のような複雑形状周りの計算格子には、格子配置の柔軟性の大きい非構造格子が適している。非構造格子では従来、Green-Gauss 法や重み付き最小二乗法(Least-squares method: LSQ)<sup>(1,2)</sup>でセル内の変数の勾配(1 階微分値)を再構築することで計算が行われてきた。これらの手法では、一般的には再構築される勾配が空間 1 次精度以下に留まることや、流束の面積分の精度などの要因から、空間精度は 2 次に留まる。しかし、乱流や音波等の非定常現象のシミュレーションでは、解像度の観点から、より空間高次精度のスキームを用いることが望ましい。

非構造格子上で有限体積法に基づく高次精度スキームは、これまでにも提案されてきた<sup>(3-6)</sup>。空間 2 次以上の精度を持つスキームは、各セルで更新された変数のセル平均値を用いて各時間ステップの冒頭でセル内の物理量の分布を再構築することによって得られる。Barth ら<sup>(3)</sup>は任意形状の非構造格子において任意精度の再構築が得られる k-exact 法を提案している。しかし、空間精度が高くなるにつれて、再構築におけるステンシルが外側に広がり、計算量、メモリ消費の増大や並列性の悪化が生じる。

有限体積法ではセル内でセル平均量のみを時間積分するのに対し、セル内における時間積分量を複数設定することによって高次精度を得る手法も存在する。例としては Discontinuous-Galerkin (DG)法<sup>(7)</sup>、Flux-reconstruction 法<sup>(8)</sup>、Spectral-volume/difference 法<sup>(9,10)</sup>などが挙げられる。これらの手法では各自由度に対する時間発展方程式を解いてセル内分布を更新することにより、有限体積法に比べステンシルをコンパクトにできる利点を持つ。一方で、計算量が増大することや、CFL 上限が低いこと<sup>(8,11)</sup>、任意形状のセルに対する定式化が困難であることなどが問題となる。

有限体積法においてよりコンパクトなステンシルで再構築する手法については近年、いくつかの研究グループによって提案されている。また Haider<sup>(12)</sup>らは再構築を複数ステップに分割し、隣接セルのみの参照で実質的に広いステンシルを用いた再構築を行う手法を提案している。また、Wang ら<sup>(13)</sup>は反復計算を用いて三重対角行列を反転することで陰的に再構築を行うスキームを提案している。

本研究では、変数の再構築を複数ステップの最小二乗法に分割し、反復計算を導入することで、隣接セルのみの参照で任意の精度の変数分布を得る方法を提案する。各ステップは 1 次の最小二

乗法であるため、上記の手法に比べ計算コストが小さく、実装が簡便である。さらに、時間依存問題では、前時間ステップで再構築された値を次時間ステップにおける再構築の初期値として用いることで、効率的な収束が可能である。最後に、この繰り返し最小二乗法を用いてテスト関数の再構築および時間依存問題の数値計算を行い、所定の精度の格子収束が得られることを示すとともに、各時間ステップにおける再構築の反復回数について考察する。

### 2. 非構造格子における有限体積法

#### 2.1 支配方程式

有限体積法では積分型の支配方程式が用いられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 0 \quad (1)$$

ここで第 1 項は物理量  $u$  の検査体積  $\Omega$  内での体積分を、第 2 項は数値流束  $\mathbf{F}$  のセル表面上  $\partial\Omega$  での面積分を示す。ただし  $\mathbf{dS}$  は面積ベクトルである。これを Fig. 1 のようなある多角形のセル  $i$  上で展開すると、

$$V_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j \in T_i} (\tilde{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) S_{ij} = 0 \quad (2)$$

となる。 $\bar{u}_i$  はセル内での変数の平均値、 $V_i$  はセル体積、 $T_i$  はセル  $i$  の隣接セル群、 $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ 、 $\mathbf{n}_{ij}$ 、 $S_{ij}$  はそれぞれ自セル  $i$  と隣接セル  $j \in T_i$  の間に存在する面  $ij$  上での流束の面平均値、法線ベクトル、面積を示す。つまり、有限体積法においては、各面上での面平均流束を求めることにより、各セルにおいて変数のセル平均値  $\bar{u}$  が時間積分される。以上をまとめると、各時間ステップにおける計算の流れは以下の通りである。

- 1) 周囲のセルの持つセル平均値  $\bar{u}$  を用いてセル内の変数分布  $u = \mathcal{P}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  を再構築する。
- 2) 面上の流束評価点における変数値を求め、数値流束に変換する。
- 3) 数値流束を各面上で数値積分する。

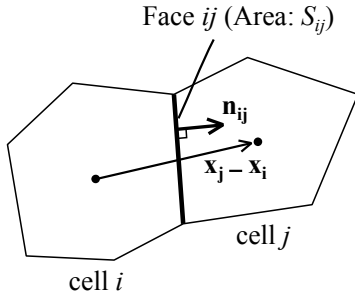


Fig. 1 Definition of variables.

## 2. 2 変数分布の再構築

ここでは、最小二乗法に基づき、各セルの持つセル平均値から任意の精度のセル内の変数分布を求める方法(*k*-exact 法)について記述する。以下、簡単のため2次元問題に限定して説明する。

セル*i*内での変数分布はテーラー展開を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) &= u_i + u_{x_i}(x - x_i) + u_{y_i}(y - y_i) \\ &+ \frac{u_{xx_i}}{2}(x - x_i)^2 + u_{xy_i}(x - x_i)(y - y_i) \\ &+ \frac{u_{yy_i}}{2}(y - y_i)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。セル*i*内でこの多項式を積分した後セル体積で割ると、式(4)のようにセル平均値が求められる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} \mathcal{P}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega \\ &= u_i + u_{x_i}\bar{x}_i + u_{y_i}\bar{y}_i \\ &+ \frac{1}{2}u_{xx_i}\bar{x}_i^2 + u_{xy_i}\bar{x}_i\bar{y}_i + \frac{1}{2}u_{yy_i}\bar{y}_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ただし、検査体積モーメントとして

$$\bar{x}^p \bar{y}^q = \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} (x - x_i)^p (y - y_i)^q d\Omega \quad (5)$$

を定義して用いた。セルの代表点 $\mathbf{x}_i$ はセル重心であるため、1次元モーメント $\bar{x}_i$ 、 $\bar{y}_i$ は0である。なお、一般的に2次以上のモーメントは0にならないことから、式(4)より、セル中心値 $u_i$ とセル平均値 $\bar{u}_i$ が2次以上の項で異なることが示される。この2次以上のモーメントについては、計算の冒頭においてガウス積分等を用いて求め、セルに格納しておく。

次に、セル*i*の値で表した変数分布(3)をある近傍セル*j*内で積分し、セル*j*のセル平均値 $\bar{u}_j$ を表現すると、

$$\bar{u}_j = \frac{1}{V_j} \int_{\Omega_j} \mathcal{P}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega + \text{Res}_{ij} \quad (6)$$

となる。変数分布(3)は近似であるので、残差 $\text{Res}_{ij}$ が存在する。ここで、式(6)を変形し、

$$\begin{aligned} \text{Res}_{ij} &= \bar{u}_j - \frac{1}{V_j} \int_{\Omega_j} \mathcal{P}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega \\ &= \bar{u}_j - \frac{1}{V_j} \int_{\Omega_j} \mathcal{P}_i((\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)) d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

とする。 $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$ は定数であり、また、セル*j*内での $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ の積分はセル*j*に格納されている検査体積モーメントで置換できるので、式(7)の変形によって積分を単純化できる。よって、1次元モー

メントが省略されることに注意して、最終的に式(7)は

$$\begin{aligned} \text{Res}_{ij} &= \bar{u}_j - \bar{u}_i - u_{x_i}\Delta x_{ij} - u_{y_i}\Delta y_{ij} \\ &- \frac{u_{xx_i}}{2}(\bar{x}_j^2 - \bar{x}_i^2 + \Delta x_{ij}^2) \\ &- u_{xy_i}(\bar{x}_j\bar{y}_j - \bar{x}_i\bar{y}_i + \Delta x_{ij}\Delta y_{ij}) \\ &- \frac{u_{yy_i}}{2}(\bar{y}_j^2 - \bar{y}_i^2 + \Delta y_{ij}^2) \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

と変形できる。ただし、セル*i*から*j*に向かうベクトルを

$$(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = (\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}) \quad (9)$$

と定義した。

ここで、(重み付き)最小二乗法では近傍セル $j \in T_i$ に対する残差の自乗の合計

$$\mathcal{R}_i = \sum_{j \in T_i} w_{ij} (\text{Res}_{ij})^2 \quad (10)$$

が最小になるような各微分値を求める。すなわち、セル*i*の持つ多項式分布が、周囲のセルの値を最も精度良く表すように各微分値を定める。 $w_{ij}$ は重み関数であり、本研究ではセル間距離の逆数

$$w_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \quad (11)$$

を用いる。ここで、式(10)の残差が最小になる条件は、

$$\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{x_i})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{y_i})} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{xx_i})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{xy_i})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{yy_i})} = 0 \dots$$

である。例えば、

$$\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial (u_{x_i})} =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in T_i} 2w_{ij}\Delta x_{ij} \left\{ -(\bar{u}_j - \bar{u}_i) + u_{x_i}\Delta x_{ij} + u_{y_i}\Delta y_{ij} \right. \\ &+ \frac{u_{xx_i}}{2}(\bar{x}_j^2 - \bar{x}_i^2 + \Delta x_{ij}^2) \\ &+ u_{xy_i}(\bar{x}_j\bar{y}_j - \bar{x}_i\bar{y}_i + \Delta x_{ij}\Delta y_{ij}) \\ &\left. + \frac{u_{yy_i}}{2}(\bar{y}_j^2 - \bar{y}_i^2 + \Delta y_{ij}^2) + \dots \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

である。よって式(12)をまとめると、最終的に連立方程式

$$\mathbf{M}_{mn} \mathbf{d}_n = \sum_{j \in T_i} w_{ij} \Delta u \hat{\mathbf{x}}_m, \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_{mn} = \sum_{j \in T_i} w_{ij} \hat{\mathbf{x}}_m \hat{\mathbf{x}}_n,$$

$$\mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ \frac{u_{xx_i}}{2} \\ u_{xy_i} \\ u_{yy_i} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_m = \begin{pmatrix} \hat{x}_{ij} \\ \hat{y}_{ij} \\ \hat{x}_{ij}^2 \\ \hat{x}_{ij}\hat{y}_{ij} \\ \hat{y}_{ij}^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Delta u = \bar{u}_j - \bar{u}_i, \quad (15)$$

が形成される。ただし、

$$\begin{aligned} \widehat{x^p y^q}_{ij} &= \frac{1}{V_j} \int_{\Omega_j} \{(x - x_j) + (x_j - x_i)\}^p \{(y - y_j) \\ &\quad + (y_j - y_i)\}^q d\Omega - \overline{x^p y^q}_i, \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \sum_{l=0}^q \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k! (p-k)!} \frac{q!}{l! (q-l)!} \times$$

$$(x_j - x_i)^k (y_j - y_i)^l \overline{x^{p-k} y^{q-l}}_i - \overline{x^p y^q}_i$$

である。各微分値は式(15)において逆行列 $\mathbf{M}_{mn}^{-1}$ を求めることで計算される。ここで、行列 $\mathbf{M}_{mn}^{-1}$ は計算結果に依存しないため、計算の冒頭に求めて各セルに保存すればよい。また式(4)の保存性を満たすため、セル中心値は最終的に求めた次数までの勾配値を用い、

$$u_i = \bar{u}_i - \left( \frac{u_{xxi}}{2} \bar{x}_i^2 + u_{xyi} \bar{x}_i \bar{y}_i + \frac{u_{yyi}}{2} \bar{y}_i^2 + \dots \right) \quad (17)$$

として計算する。

このスキームの問題点は、再構築行列 $\mathbf{M}_{mn}$ のサイズが求める微分値の数 $N_d$ の2乗に比例することである。例えば上記の2次元3次精度では $5 \times 5$ であるが、3次元4次精度では $19 \times 19$ であり、セルに格納する行列サイズが大幅に拡大する。さらに、式(10)に対する最小二乗問題が成立するためには、用いる近傍セル $j \in T_i$ の数が $N_d$ より多くなければならず、一般的に安定性の観点から $2N_d$ 以上のセルを用いることが推奨される<sup>6)</sup>。しかし、三角形セルでは面で隣接しているセル(Fig. 2 中 $T_i^{(1)}$ )が3つしか存在しないため、3次

精度のスキームでは図中 $T_i^{(2)}$ に含まれるセルまで参照する必要がある。このようなステンシルの拡大により、式(14)の右辺を構築する演算量の増大、および計算の並列性の悪化が引き起こされる。なお、文献<sup>6)</sup>では特異値分解を利用して擬似逆行列を求めることで式(10)以下の最小二乗問題を解いているが、同じく高次精度化に伴うメモリ消費の増大やステンシルの拡大が問題となる。

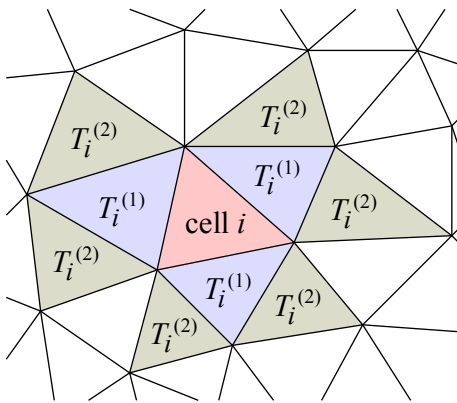


Fig. 2 Stencils for variable reconstruction.

### 3. 繰り返し最小二乗法に基づく高次精度変数再構築

#### 3. 1 定式化

前節で示したように $k$ -exact法では、多項式の次数が上がるのに従ってステンシルが拡大し、メモリ消費や計算量も増加する。そこで本節では、変数再構築を複数ステップの最小二乗法に分け、反復計算を導入することで、隣接セルのみの参照で任意精度の再構築を行うスキームを提案する。

まず、2階以上の微分値が定数であるとみなして、 $T_i^{(1)}$ のステン

シルのみを用いて1次の最小二乗法を行う。

$$\mathbf{M}_{mn} \mathbf{d}_n = \sum_{j \in T_i^{(1)}} w_{ij} \Delta u \hat{\mathbf{x}}_m, \quad (18)$$

ただし、

$$\mathbf{M}_{mn} = \sum_{j \in T_i^{(1)}} w_{ij} \hat{\mathbf{x}}_m \hat{\mathbf{x}}_n,$$

$$\mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_m = \begin{pmatrix} \hat{x}_{ij} \\ \hat{y}_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\Delta u = \left\{ \bar{u}_j - \bar{u}_i - \left( \frac{u_{xxi}}{2} \bar{x}_{ij}^2 + u_{xyi} \bar{x}_{ij} \bar{y}_{ij} + \frac{u_{yyi}}{2} \bar{y}_{ij}^2 \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{u_{xxx_i}}{6} \bar{x}_{ij}^3 + \frac{u_{xxx_i}}{2} \bar{x}_{ij}^2 \bar{y}_{ij} + \frac{u_{xyy_i}}{2} \bar{x}_{ij} \bar{y}_{ij}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_{yyy_i}}{6} \bar{y}_{ij}^3 \right) - \dots \right\} \quad (19)$$

である。この時点で2階以上の微分値は決定していないため、適当な初期値を与える。次に、1階微分値に対して最小二乗法を適用し、2階微分値を

$$\mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} u_{xx_i} \\ u_{xy_i} \end{pmatrix},$$

$$\Delta u = \left\{ u_{x_j} - u_{x_i} - \left( \frac{u_{xxx_i}}{2} \Delta x_{ij}^2 + u_{xxy_i} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_{xyy_i}}{2} \Delta y_{ij}^2 \right) - \dots \right\} \quad (20)$$

$$\mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} u_{xy_i}^{(2)} \\ u_{yy_i} \end{pmatrix},$$

$$\Delta u = \left\{ u_{y_j} - u_{y_i} - \left( \frac{u_{xxy_i}}{2} \Delta x_{ij}^2 + u_{xyy_i} \Delta x_{ij} \Delta y_{ij} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_{yyy_i}}{2} \Delta y_{ij}^2 \right) - \dots \right\} \quad (21)$$

として求める。これらは式(19)とは異なりセル中心値に関する微分近似であるため、右辺の高階微分値の係数が式(16)で定義される長さではないこと、また $\hat{x}_{ij} = \Delta x_{ij}$ 、 $\hat{y}_{ij} = \Delta y_{ij}$ であることに注意が必要である。ただし $u_{xy_i}$ は $u_{x_i}$ の $y$ 方向微分近似(20)、および $u_{y_i}$ の $x$ 方向微分近似(21)の2通りで求められるが、ここではその平均値

$$u_{xy_i} = \frac{u_{xy_i}^{(1)} + u_{xy_i}^{(2)}}{2} \quad (22)$$

を用いる。 $k$ 次精度の再構築では $kk-1$ 階微分値まで必要であるため、同様に1つ低階の微分値の1階微分により計算する。

式(19)に存在する2階以上の微分値は、この時点では正確なものでないため、実際に求められる勾配値は $k$ 次精度とにならない。そこで、式(20)および(21)、およびさらに高階の微分値の近似式で求めた2階以上の微分値を式(19)に再び代入し、反復計算を行うことで高次精度の微分値を得る。また、最終的にセル中心値は式(17)を用いて計算される。以上のようにして、1つ高階の微分値を求めていく操作を行い、式(19)に再び代入して繰り返すことで、任意の次数の精度の多項式を隣接セルのみの参照で再構築することができる。またこの繰り返し最小二乗法では再構築行列 $\mathbf{M}_{mn}$ は全てのステップで共通であり、そのサイズは2次元で $2 \times 2$ 、3次元で $3 \times 3$ であるので、メモリ消費も通常の $k$ -exact法に比べ削減できる。

収束計算の計算コストについては、Wangら<sup>(13)</sup>は陰解法における内部反復と組み合わせ、各時間ステップ内においては再構築を初期化しないことで計算コストが低減できるとしている。しかし、実際には陽解法においてはCFL制限や時間精度の観点から、陰解法においても時間精度の観点から、1ステップでセル内分布が大

大きく変化するような時間刻み幅を設定できない。よって、内部反復のみでなく、物理時間においても前時間ステップにおける再構築値を保存し、次時間ステップの再構築の初期値とすることで効率的な収束が可能であると考えられる。

### 3. 2 変数再構築の安定化

Haider ら<sup>(12, 14)</sup>によると、最小二乗法を用いた再構築は、隣接セルの数が少ないときに不安定になりやすい。特に三角形格子や四面体格子においては、安定性への考慮が必要である。そこで Haider ら<sup>(12)</sup>は再構築の最後に以下のような操作を行うことを提案している。

$k + 1$ 次精度再構築において、最高次数の勾配値である $k$ 階の微分値を $\nabla^k u$ とする。ここで、 $\nabla^k u$ に求められる空間精度は1次精度である。よってスムージングとして、ステンシル $T_i^{(1)}$ を用いて、凸結合

$$\nabla^k u_{i,new} = \sum_{j \in T_i^{(1)}} w_j \nabla^k u_j \quad (23)$$

で微分値を置き換える。ここで重み関数 $w_j$ はセル $j$ の体積に比例し、その和は1である。これは $\nabla^k u_j$ が $\nabla^k u_i$ に対する1次精度の近似であることを利用している。

本研究では、式(22)において、セル $i$ 自身もステンシルに加えて、

$$\nabla^k u_{i,new} = w_i \nabla^k u_i + \sum_{j \in T_i^{(1)}} w_j \nabla^k u_j \quad (24)$$

とする。さらに低次の微分値についても、

$$\nabla^m u_{i,new} = w_i \nabla^m u_i + \sum_{j \in T_i^{(1)}} w_j \nabla^m u_i^{(j)} \quad (1 \leq m < k) \quad (25)$$

とすることで安定性を向上させる。ここで $\nabla^m u_i^{(j)}$ はセル $j$ の再構築値を使って計算されるセル $i$ の $m$  ( $1 \leq m \leq k$ )階微分値である。例えば $x$ 方向の1階微分値については、

$$u_{x_i}^{(j)} = u_{x_j} + u_{xx_j}(x_i - x_j) + u_{xy_j}(y_i - y_j) + \dots \quad (26)$$

となる。以上のスキームをまとめると Fig. 3 のようになる。

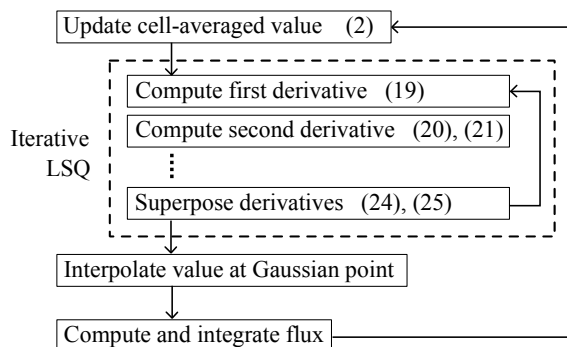


Fig. 3 Flowchart of high-order FVM based on iterative reconstruction.

## 4. 検証計算

### 4. 1 変数再構築精度の検証

2次元格子において前節で述べた繰り返し最小二乗法を用いた変数再構築精度の検証を行う。テスト関数は、

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{x+y}{5}\pi\right) \quad (27)$$

と与える。なお、各格子におけるセル平均値および式(5)のモーメ

ントは7点5次精度ガウス積分<sup>(15)</sup>を利用して計算する。計算領域は $10 \times 10$ の正方形であり、Fig. 4に示したような不均一な三角形格子で構成される。また、計算格子の解像度は Tab. 1に示したように Grid 1~Grid 4の4通りに設定し、格子収束を調査する。ここでは、初期値として1次の最小二乗法<sup>(1)</sup>による勾配計算を行った後に、3次精度( $k=2$ )もしくは4次精度( $k=3$ )の繰り返し最小二乗法を適用する。

Tab. 2, 3に再構築されたセル中心値 $u_i$ および、各階微分値の解析解との誤差を示す。ただし Grid  $m$ と Grid  $m+1$ の間での空間精度は

$$O = \ln\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}}\right) / \ln\left(\frac{\sqrt{N_{m+1}}}{\sqrt{N_m}}\right) \quad (28)$$

と計算される。ただし、 $\varepsilon_m$ ,  $N_m$ はそれぞれ Grid  $m$ における解析解との誤差、総セル数を表す。再構築の収束値において、 $k$ 次精度再構築を用いた時、セル中心値は $k$ 次精度、 $m$  ( $1 \leq m \leq k$ )階微分値は $k - m$ 次精度で格子収束が得られている。このことから、セル内の変数分布(3)にそれぞれの値を代入した時、セル内の任意の場所の変数値が $k$ 次精度で得られる。また、4次精度再構築では3次精度再構築に比べ全体的に誤差が小さく、より少ないセル数で波を良く解像している。

次に、セル中心値の解析解との誤差の L1,  $L_\infty$ ノルムについて、反復回数に対する収束履歴を Fig. 5 および Fig. 6 に示す。セル数の増大、および再構築次数の増加により、収束が遅れる傾向が見える。特に4次精度再構築、格子4では、最大値ノルムの収束に10回程程度の反復を程度要しており、計算量の増大が懸念される。しかしながら、3.1節に示したように、時間依存問題においては前時間ステップでの値を収束計算の初期値として与えることで、収束が大幅に早められる。特に、Grid 4のように変数分布のスケールに対して格子が多いときは、前時間ステップからのセル内分布の変化が小さいため、ここで述べたような収束性の悪化が実際には問題となることは少ないと予想される。

Tab. 1 Setting of computational grids.

	Total cell number $N$	Typical length $1/\sqrt{N}$
Grid 1	176	0.07538
Grid 2	692	0.03801
Grid 3	2868	0.01867
Grid 4	11388	0.009371

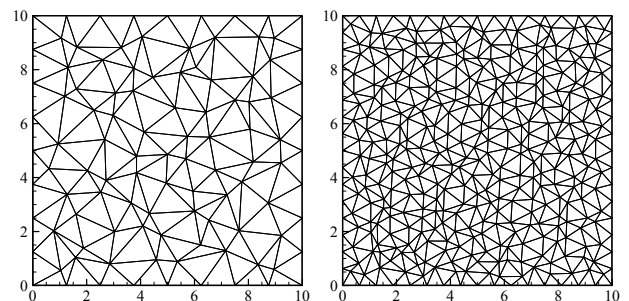


Fig. 4 Irregular triangular grid for numerical simulation. (Left : Grid 1, Right : Grid 2)

Tab. 2 Grid convergence study of 3<sup>rd</sup>-order iterative LSQ.

Cell-centered value $u_i$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	2.010E-03	-	5.623E-03	-
Grid 2	1.721E-04	3.590	5.167E-04	3.487
Grid 3	1.314E-05	3.619	9.030E-05	2.454
Grid 4	1.331E-06	3.321	1.263E-05	2.852

First derivative $u_{x_i}$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	8.936E-03	-	2.770E-02	-
Grid 2	1.375E-03	2.735	5.607E-03	2.334
Grid 3	2.919E-04	2.180	1.884E-03	1.534
Grid 4	6.724E-05	2.129	5.254E-04	1.853

Second derivative $u_{xx_i}$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	4.152E-02	-	8.191E-02	-
Grid 2	1.328E-02	1.665	3.813E-02	1.117
Grid 3	4.441E-03	1.541	2.465E-02	0.614
Grid 4	1.812E-03	1.300	9.745E-03	1.346

Tab. 3 Grid convergence study of 4<sup>th</sup>-order iterative LSQ.

Cell-centered value $u_i$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	2.034E-04	-	7.540E-04	-
Grid 2	2.116E-05	3.305	6.632E-05	3.551
Grid 3	1.482E-06	3.740	5.902E-06	3.403
Grid 4	9.165E-08	4.037	4.293E-07	3.801

First derivative $u_{x_i}$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	3.738E-03	-	1.074E-02	-
Grid 2	3.172E-04	3.603	1.364E-03	3.014
Grid 3	3.298E-05	3.184	2.048E-04	2.668
Grid 4	4.028E-06	3.050	2.881E-05	2.845

Second derivative $u_{xx_i}$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	4.018E-03	-	1.305E-02	-
Grid 2	8.388E-04	2.288	4.901E-03	1.431
Grid 3	2.548E-04	1.676	1.205E-03	1.973
Grid 4	6.074E-05	2.079	3.268E-04	1.893

Third derivative $u_{xxx_i}$				
	L1 norm	Order	$L_\infty$ norm	Order
Grid 1	2.691E-02	-	5.868E-02	-
Grid 2	7.510E-03	1.864	2.200E-02	1.433
Grid 3	2.640E-03	1.470	1.316E-02	0.723
Grid 4	1.107E-03	1.260	6.619E-03	0.997

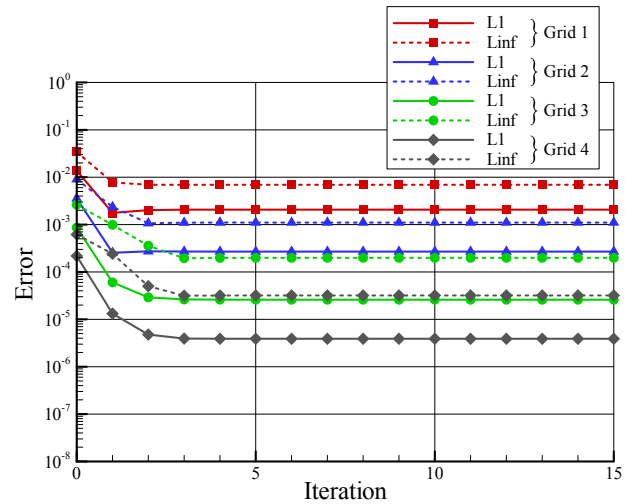


Fig. 5 Convergence history of 3<sup>rd</sup>-order iterative LSQ.

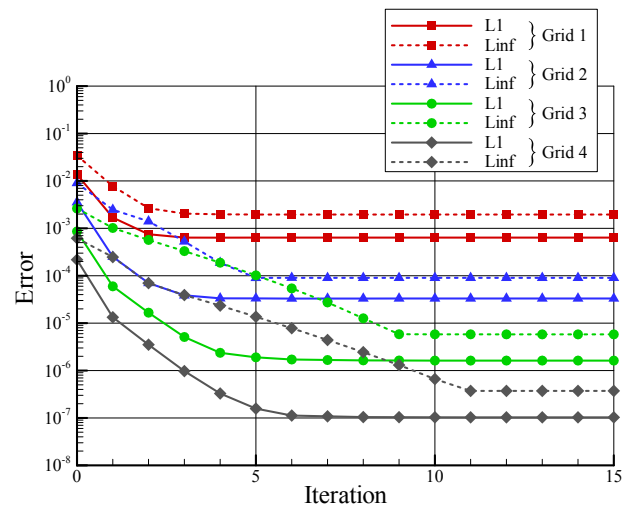


Fig. 6 Convergence history of 4<sup>th</sup>-order iterative LSQ.

#### 4. 2 等エントロピ渦移流問題における検証

非線形の時間依存問題への応用例として、繰り返し最小二乗法を用いて等エントロピ渦の移流問題の解析を行う。支配方程式は2次元圧縮性 Euler 方程式であり、初期値は文献<sup>(1)</sup>に従い、以下のように与える (Fig. 7 参照)。

$$\rho^0 = \left[ \frac{1}{S_\infty} \left( T_\infty - \frac{(\gamma - 1)\Gamma^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$u^0 = u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{y}$$

$$v^0 = v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} \bar{x}$$

$$p^0 = S_\infty (\rho^0)^\gamma$$

ただし一様流条件は、 $(\rho_\infty, u_\infty, v_\infty, p_\infty) = (1, 1, 1, 1/\gamma)$ 、渦強度  $\Gamma = 5$ 、比熱比  $\gamma = 1.4$  である。また  $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  は渦中心  $(x_c, y_c)$  に対する座標を表しており、 $r = \sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}$  である。計算に用いる格子は 4.1 節と同一であり、外部境界は周期境界条件である。渦の初期位置は (5, 5) とする。数値流束は Roe の近似 Riemann ソルバー<sup>(16)</sup> で計算する。再構築精度については 3 次精度と 4 次精度とし、計算冒頭に再構築の反復計算を 200 回行って収束させてから時間積分を始める。

まず、時刻  $t = 10$  において渦が再び初期位置に戻ってくる時点

で誤差評価を行うことで、格子収束性を調査する。時間積分は 4 段階 Runge-Kutta 法を用いる。時間刻み幅は Grid 1 で  $5.0 \times 10^{-3}$  とし、以下格子を 1 段階細かくするごとにその半分の時間刻み幅としている。

Tab. 4 に計算結果を示す。3 次精度、4 次精度再構築では、反復回数に関わらず、それぞれ 3 次、4 次精度の格子収束が得られる。また、反復回数が 1 回の時と 2 回の時で結果がほぼ変わらないことから、各時間ステップにおいて 1 回の反復計算でほぼ再構築が収束していると考えられる。

次に、時間ステップを大きくした時の誤差の変化を調べる。各時間ステップにおける繰り返し回数は 1~4 回に設定し、100 [step] 計算を進めた後に誤差評価を行う。ここでは Grid 3 を使い、時間刻み幅は  $5.0 \times 10^{-3}$ ,  $1.0 \times 10^{-2}$ ,  $2.0 \times 10^{-2}$  とする。なお、この時間刻みは前述の格子収束の調査における時間刻みの 4 倍から 16 倍に相当し、最大 CFL 数はそれぞれ 0.622, 1.24, 2.49 である。ただし、CFL 数は、

$$CFL = \frac{\|a\| \Delta t}{r_i} \quad (30)$$

で定義する。ここで、 $\|a\|$  は一様流速を用いて計算される最大特性速度 ( $= 1 + \sqrt{2}$ )、 $r_i$  はセル内接円の半径である。なお、時間刻み幅を  $4.0 \times 10^{-2}$  とした時は、再構築を行わない空間 1 次精度のスキームにおいても安定的に計算できなかったため、少なくとも本問題設定および格子においては、提案手法の導入による安定性への影響は小さいと考えられる。

Fig. 8 および Fig. 9 に各時間ステップにおける反復回数と 100 [step] 目におけるセル中心値の計算誤差の関係を示す。時間刻み幅の増大によりやや収束が鈍化する傾向はあるが、反復回数が 1 回の時と 2 回の時の間の差異は最大 4 [%] 程度である。このことから、少なくとも時間陽解法で安定的に計算が行えるような時間刻み幅においては、各時間ステップにおける再構築の反復回数は 1 回で十分であると言える。以上より、繰り返し最小二乗法では前時間ステップの再構築結果を用いることにより、時間依存問題では効率的に空間高次精度が得られることが示された。

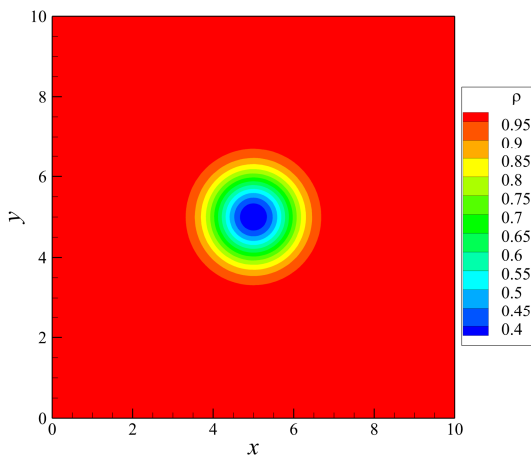


Fig. 7 Initial value of density in vortex advection problem.

Tab. 4 Grid convergence study in isentropic vortex advection problem.

3 <sup>rd</sup> -order iterative LSQ (Iteration=1)				
	L1 norm	Order	L <sub>∞</sub> norm	Order
Grid 1	1.335E-02	-	2.166E-01	-
Grid 2	4.687E-03	1.529	1.293E-01	0.754
Grid 3	6.214E-04	2.842	1.053E-02	3.527
Grid 4	7.454E-05	3.076	1.382E-03	2.945

Tab. 4 Grid convergence study in isentropic vortex advection problem (continue).

3 <sup>rd</sup> -order iterative LSQ (Iteration=2)				
	L1 norm	Order	L <sub>∞</sub> norm	Order
Grid 1	1.335E-02	-	2.166E-01	-
Grid 2	4.688E-03	1.529	1.293E-01	0.753
Grid 3	6.217E-04	2.842	1.053E-02	3.527
Grid 4	7.458E-05	3.075	1.383E-03	2.945

4 <sup>th</sup> -order iterative LSQ (Iteration=1)				
	L1 norm	Order	L <sub>∞</sub> norm	Order
Grid 1	1.040E-02	-	1.650E-01	-
Grid 2	2.710E-03	1.972	8.370E-02	0.995
Grid 3	1.950E-04	3.696	3.350E-03	4.520
Grid 4	1.270E-05	3.951	2.540E-04	3.731

4 <sup>th</sup> -order iterative LSQ (Iteration=2)				
	L1 norm	Order	L <sub>∞</sub> norm	Order
Grid 1	1.042E-02	-	1.651E-01	-
Grid 2	2.715E-03	1.965	8.376E-02	0.992
Grid 3	1.945E-04	3.709	3.321E-03	4.540
Grid 4	1.262E-05	3.967	2.525E-04	3.737

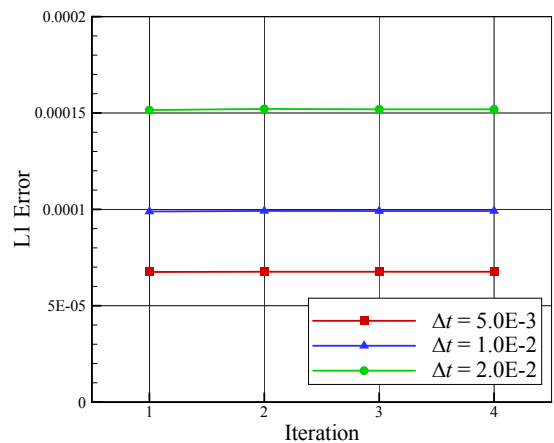


Fig. 8 Relationship between the calculation error and iteration number of reconstruction at a large time increment. (3<sup>rd</sup>-order iterative LSQ)

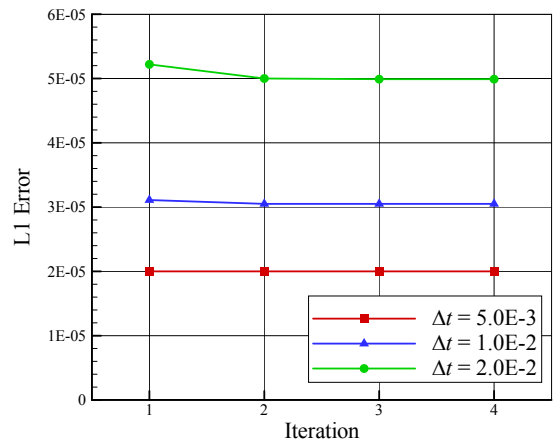


Fig. 9 Relationship between the calculation error and iteration number of reconstruction at a large time increment. (4<sup>th</sup>-order iterative LSQ)

## 5. 結論

有限体積法における変数分布の再構築を複数ステップの最小二乗法に分割し、反復計算を導入することで、隣接セルのみの参照で任意の精度の変数分布を得る方法を提案した。各ステップは 1 次の最小二乗法であるので、計算量およびメモリ消費が小さく、また実装が簡便である。さらに、時間依存問題では、前時間ステップで再構築された値を次時間ステップにおける再構築の初期値として用いることで、効率的な収束を可能とした。

この繰り返し最小二乗法を用いてテスト関数の再構築を行い、所定の精度の格子収束が得られることを示した。また、時間依存問題の例として、渦移流問題における計算を行い、格子収束を検証した。併せて、各時間ステップにおける再構築の反復回数と結果の精度について調査した。スキームの安定性については、空間精度の向上に伴う問題は観察されなかった。さらに時間陽解法の安定性が保たれるような時間刻み幅においては、反復回数を 1 回としても十分な再構築の収束が得られ、効率的に空間高次精度が得られることが示された。

## 参考文献

- (1) Mavriplis, D. J., "Revising the Least-square Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured method," AIAA Paper, No. 2003-3986.
- (2) Shima, E., Kitamura, K. and Fujimoto, K., "New Gradient Calculation Method for MUSCL Type CFD Schemes in Arbitrary Polyhedra," AIAA Paper, No. 2010-1081.
- (3) Barth, T. J. and Frederickson, P., "High order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction," AIAA Paper, No. 90-0013.
- (4) Hu, C. and Shu, C-W., "Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular Meshes," J. Comp. Phys., 150 (1999), pp. 97-127.
- (5) Dumbser, M., Käser, M., Titarev, V.A. and Toro, E. F., "Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems," J. Comp Phys., 226 (2007), pp. 204-243.
- (6) Ollivier-Gooch, C., Nejat, A., and Michalak, K., "Obtaining and verifying high-order unstructured finite volume solutions to the Euler equations," AIAA Journal, 47.9 (2009), pp. 2105-2120.
- (7) Cockburn, B. and Shu, C-W., "The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems," J. Comp. Phys., 141.2 (1998), pp. 199-224.
- (8) Huynh, H. T., "A Flux Reconstruction Approach to High-Order Schemes Including Discontinuous Galerkin Methods," AIAA Paper, No. 2007-4079.
- (9) Liu, Y., Vinokur, M., and Wang Z. J., "Spectral difference method for unstructured grids I: Basic formulation," J. Comp. Phys., 216.2 (2006), pp. 780-801.
- (10) Wang, Z. J. "Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. basic formulation: Basic formulation," J. Comp. Phys., 178.1 (2002), pp. 210-251.
- (11) Dumbser, M, Balsara, D. S., Toro, E. F., and Munz, C-D., "A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes," J. Comp. Phys., 227.18 (2008), pp. 8209-8253.
- (12) Haider, F., Brenner, P., Courbet, B., and Croisille, J. P., "Efficient implementation of high order reconstruction in finite volume methods," Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives., Springer Berlin Heidelberg, pp-553-560, 2011.
- (13) Wang, Q., Ren, Y-X., and Li, W., "A Compact High Order Finite Volume Method for Hyperbolic Conservation Laws on Unstructured Grids," AIAA paper, No.2015-3193.
- (14) Haider, F., Croisille, J-P., and Courbet, B., "Stability analysis of the cell centered finite-volume MUSCL method on unstructured grids." Numerische Mathematik 113.4 (2009), pp. 555-600.
- (15) Dunavant, D. A., "High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle," International J. for numerical methods in engineering 21.6 (1985), pp. 1129-1148.
- (16) Roe, P. L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes," J. Comp. Phys., 43.2 (1981), pp. 357-372.