

移流項に擬混合型を用いた 高次精度流束再構築法における保存量保存性

Conservation properties of high-order flux reconstruction schemes in pseudo skew-symmetric formulation

- 森中 一誠, 横国院, 横浜市 保土ヶ谷区常盤台 79 - 5, E-mail : morinaka-issei-wz@ynu.jp
- 阿部 圭晃, 東大院, 相模原市中央区由野台 3-1-1, E-mail : abe@flab.isas.jaxa.jp
- 芳賀 臣紀, JAXA, 相模原市中央区由野台 3-1-1, E-mail : haga.takanori@jaxa.jp
- 野々村 拓, JAXA/ISAS, 相模原市中央区由野台 3-1-1, E-mail : nonomura@flab.isas.jaxa.jp
- 宮路 幸二, 横国院, 横浜市 保土ヶ谷区常盤台 79 - 5, E-mail : miyaji@ynu.ac.jp

Issei Morinaka, Yokohama National University, 79-5, Tokiwadai, Hodogaya, Yokohama, Japan

Yoshiaki Abe, University of Tokyo, 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Japan

Takanori Haga, JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Japan

Taku Nonomura, JAXA/ISAS, 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Japan

Koji Miyaji, Yokohama National University, 79-5, Tokiwadai, Hodogaya, Yokohama, Japan

The primary conservation property (conservation of conservative quantities) of the high-order flux- reconstruction (FR) scheme with pseudo-skew-symmetric convective term is investigated. When the Gauss points are selected as solution points, the conservation property is not satisfied. On the other hand, the solution points are located in Gauss-lobatto points, the conservation property is satisfied regardless of the correction function. The developed scheme is tested for the computation of a two-dimensional convecting vortex.

1. はじめに

近年, コンピュータの能力の向上や数値流体力学 (CFD) 分野の研究の成果により, 燃焼, 音響などの問題に対して, DNS や LES を用いた高精度な非定常解析が可能となりつつある. また, 格子生成の容易さや複雑形状への適応を考える際, 非構造格子を用いた手法の適用が期待される. 非構造高次精度手法には不連続ガレルキン法 (Discontinuous Galerkin: DG 法) や流束再構築法 (Flux Reconstruction: FR 法)⁽¹⁾ などが挙げられる. これらは空間を分割する計算セル内に自由度を持たせ, セル境界の近似リーマン解法等の数値流束を評価する. 高次精度スキームを用いた非定常解析において数値的な不安定性が問題となる. この不安定性に対して自乗量保存特性を利用したスキームの利用が有用である. 森西⁽²⁾ や Pirrozoli⁽³⁾ はこれを利用し構造格子を用いた差分法において安定性の高いスキームを作ることに成功した. 非構造高次精度手法における自乗量保存スキームの研究は最近, Gassner⁽⁴⁾ により DG 法で行われた. 自乗量保存スキームを構築するにあたり, 支配方程式に非保存型である混合型や擬混合型を使用するが多くある. 自乗量保存と同時に保存量保存性を考えることは衝撃波速度を正確に捉える等の観点から圧縮性流体計算においては重要である. 非保存型における保存量保存性については, summation-by-parts (SBP) の特性を利用して Fisher⁽⁵⁾ 差分法で, Gassner は DG 法を用いて示した. 本研究では DG 法と同等の精度を有する FR 法に着目し, この手法の数値安定性を向上させることを目的にしている.

本稿では擬混合型を用いた FR 法に着目し, 保存量保存性に関して以下の事についてまとめる.

- (1) 擬混合型の FR 法において保存量保存性が満たされる条件を示す
- (2) 2次元の渦移流を用いた検証計算

2. 数値計算法

2.1 保存型の流束再構築法 (FR 法) について

ここではまず保存型 FR 法を用いた二次元のオイラー方程式の離散化について述べる. 支配方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

式 (1) の支配方程式を解く為に, FR 法では四角形で計算領域を分割する. さらに, これらのセルを計算空間の標準セル $E_s = \{\xi, \eta, -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ に変換する. 物理空間 $(\mathbf{r}_{n;j,k})$ の各セル形状は $N + 1$ 個の定義点とそれらに対応する形状関数 M を用いて次のように表せる.

$$\mathbf{r}_n(\xi, \eta) = I^N[\mathbf{r}_n] = \sum_{i=0}^N M_i(\xi, \eta) \mathbf{r}_{n;i,k} \quad (2)$$

変換のヤコビアン $J := |\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)|$ はこれらの微分を基に計算する. 計算空間におけるオイラー方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (3)$$

$$\hat{Q} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \hat{E} = \begin{bmatrix} \rho \hat{U} \\ \rho \hat{U} u + \hat{\xi}_x p \\ \rho \hat{U} v + \hat{\xi}_y p \\ \rho \hat{U} H \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} \rho \hat{V} \\ \rho \hat{V} u + \hat{\eta}_x p \\ \rho \hat{V} v + \hat{\eta}_y p \\ \rho \hat{V} H \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{U} = \hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v, \hat{V} = \hat{\eta}_x u + \hat{\eta}_y v, \quad (5)$$

$$\hat{\xi}_x = J\xi_x, \hat{\xi}_y = J\xi_y, \hat{\eta}_x = J\eta_x, \hat{\eta}_y = J\eta_y \quad (6)$$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), H = e + \frac{p}{\rho} \quad (7)$$

式 (3) を解く為に、各セル内に $K + 1$ 個の内点を導入し、これらを解の定義点 (SP, Solution points) とし、解を K 次のラグランジュ多項式で近似する。セル内分布は各方向の多項式のテンソル積として与える。

$$\hat{Q}_i(\xi, \eta) = I^K[\hat{Q}_i] = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^K \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \cdot \hat{Q}_{i;j,k} \quad (8)$$

ここで、 K 次のラグランジュ多項式は次式で与える。

$$\phi_j(\xi) = \prod_{m=0, m \neq j}^K \frac{\xi - \xi_m}{\xi_j - \xi_m} \quad (9)$$

SP の選び方には任意性があるが、本研究ではガウス点とガウスロバット点を用いる。ガウス点はセル境界上に点を持たないのでセル境界の物理量を与える際は、式 (8) を用いて外挿する必要があるが、ガウスロバット点では境界に解定義点を持つので不要である。

各 SP での $\hat{Q}_{i;j,k}$ の時間発展解を求める為に、流束の一階微分を求める。ここでは、一般性を失わずに \hat{E} の ξ 方向微分のみを取り上げる。ここで、流束についても式 (8) 同様に、 $\hat{E}_{i;j,k}$ を式 (10) のように K 次多項式で表すと、

$$\hat{E}_i(\xi) = I^K[\hat{E}_i] = \sum_{j=0}^K \phi_j(\xi) \cdot \hat{E}_{i;j,k} \quad (10)$$

この ξ 方向の微分は保存型 (divergence form) では以下式である。($\phi = \{1, u, v, H\}$)

$$(Div.) : \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \hat{U} \phi) \quad (11)$$

さらにこれは、ラグランジュ多項式の性質より式 (12) で求められる。

$$\frac{\partial \hat{E}_i(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial I^K[\hat{E}_i]}{\partial \xi} = \sum_{j=0}^K \phi_j'(\xi) \cdot \hat{E}_{i;j,k} \quad (12)$$

また、式 (10) は周囲のセル情報を反映しないため、セル境界が不連続となる。そこで、左右のセル境界でセル間で共

通の流束 $\hat{E}_{i \pm 1/2}^{com}$ を求め、この値をとるようなセル内の分布 \hat{E}_i^C を再構築する。この修正関数は式 (3) においての一階微分が Q_i の次数 K と等しくなるよう、 $K + 1$ 次式でなければならない。Huynh⁽⁴⁾ はこれを左右二つの境界からの寄与に分離した。

$$\hat{E}_i^C(\xi) = \hat{E}_i(\xi) + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1) \right] g_L(\xi) \quad (13)$$

$$+ \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(1) \right] g_R(\xi) \quad (14)$$

ここで、 g_L, g_R はそれぞれ左右の修正関数で、 g_L は左端 ($\xi = -1$) で 1、右端 ($\xi = 1$) で 0 となる $K + 1$ 次多項式である。また、 g_R と g_L は原点对称の関係にある。($g_R(\xi) = -g_L(-\xi)$) 修正関数には以下が提案されている。(本稿では $g_L = g_{DG, K+1}$ などとして用いる。)

$$g_{DG, K} = R_{R, K} = \frac{(-1)^K}{2} (P_K - P_{K-1}) \quad (15)$$

$$g_{Ga, K} = \frac{K}{2K-1} R_{R, K} - \frac{K-1}{2K-1} R_{R, K-1} \quad (16)$$

$$g_{Lump, Lo, K} = \frac{K-1}{2K-1} R_{R, K} - \frac{K}{2K-1} R_{R, K-1} \quad (17)$$

P_K は K 次のルジャンドル多項式、 $R_{R, K}$ は右ラダウ多項式である。 g_{DG} を用いると線形問題において DG 法に等しいスキームとなる、 g_{Ga} は g_{DG} に精度は劣るが広い安定な CFL 領域をもつ、 $g_{Lump, Lo}$ は SP をガウスロバット点に置いたとき、どちらかの境界以外で g' の値が 0 になるなどの特徴がある。これらを図示したのが Fig.1 である。これらの修正関数を用いて、 ξ 方向における修正された流束 \hat{E}_i^C の微分は次式で求められる。

$$\frac{\partial \hat{E}_i^C}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi} + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1) \right] g_L'(\xi) \quad (18)$$

$$+ \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(1) \right] g_R'(\xi)$$

式 (3) の η 方向も同様に計算することができ、任意の時間積分法を用いることで、全 SP で解 \hat{Q}_i を更新する。

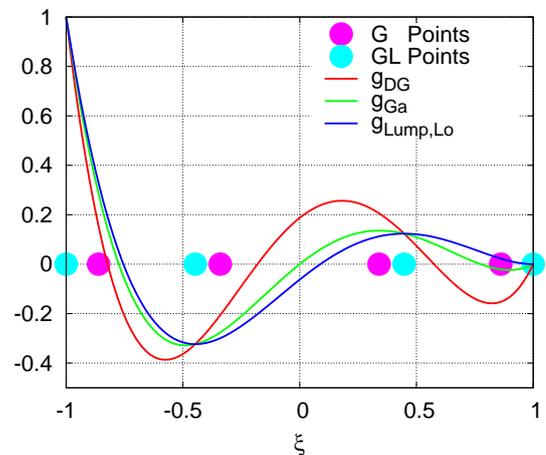


Fig. 1: 修正関数と SP

2.2 擬混合型について

自乗量保存スキームには保存型と非保存型の平均である混合型が用いられる。しかし、混合型は時間項の取り扱いが難しいことなどから、混合型のアナロジーで導かれた擬混合型が用いられることがある。擬混合型は自乗量保存は先天的には満たさないものの、スキームの数値安定性を向上させることから広く用いられている⁽³⁾。擬混合型の中で FE 型 (Feieresisen et al.⁽⁶⁾), BL 型 (Blaisdell et al.⁽⁷⁾), KG 型 (Kennedy and Gruber⁽⁸⁾) などが提唱されており、以下に本研究で用いた FE 型, BL 型, KG 型の ξ 方向の移流項を示す。

$$(Fe.) : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U} \phi}}) + \frac{1}{2} \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U}}}) + \frac{1}{2} \rho \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\phi}}) \quad (19)$$

$$(Bl.) : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U} \phi}}) + \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \phi}}) + \frac{1}{2} \rho \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U}}}) \quad (20)$$

$$(Kg.) : \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U} \phi}}) \quad (21)$$

$$+ \beta \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U}}}) + \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \phi}}) + \rho \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U} \phi}}) \right\}$$

$$+ (1 - \alpha - 2\beta) \left\{ \rho \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\phi}}) + \rho \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U}}}) + \hat{U} \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho}}) \right\} \quad (22)$$

KG 型は式内に α, β という自由度があり、エイリアシング誤差を減らすようにも選べるということが知られている。過去の研究⁽³⁾⁽⁸⁾では以下が有用であるとされている。

$$(Kg1.) : \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U} \phi}})$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U}}}) + \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \phi}}) + \rho \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U} \phi}}) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \rho \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\phi}}) + \rho \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U}}}) + \hat{U} \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho}}) \right\} \quad (23)$$

$$(Kg2.) : \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho \hat{U} \phi}})$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \rho \hat{U} \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\phi}}) + \rho \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\hat{U}}}) + \hat{U} \phi \frac{\partial}{\partial \xi} (\underline{\underline{\rho}}) \right\} \quad (24)$$

FR 法に擬混合型を取り入れる際、式 (18) の一項目を以下の通りに書き換えた。

$$\frac{\partial \hat{E}_i^C}{\partial \xi} = \underbrace{(\text{Div.})}_{\substack{\downarrow \\ \text{擬混合型に書き換え}}} + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1) \right] g'_L(\xi) \quad (25)$$

$$+ \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(1) \right] g'_R(\xi)$$

2.3 擬混合型 FR 法と保存量保存性について

本節では混合型の移流項を持つ場合に保存量保存性が満たされる条件を導く。緒言で述べたように、DG 法において混合型の移流項を持つ場合に保存量保存性が満たされる例は Gassner によって示されている⁽⁴⁾。しかし、DG 法を包含する FR 法において、混合型の移流項を持

つ場合に保存量保存性が満たされるかは未だ十分に議論されていない。混合型の移流項のうち、保存型 (式 (19) の 3 重線の部分) の部分は保存量保存性を満たす⁽⁹⁾。本節では非保存型 (式 (19) の 2 重線・1 重線の部分) の部分の保存量保存性を議論する。

2.3.1 擬混合型 FR 法において示すべき保存量保存性の定義

一般性を欠く事なく、FE 型の移流項に着目する。FE 型の移流項 (式 (19)) を用いた流束微分は、以下のように変形出来る：

$$\frac{\partial \hat{E}^C}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}(-1) \right] g'_L(\xi) \right. \\ \left. + \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}(1) \right] g'_R(\xi) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\phi \frac{\partial \rho \hat{U}}{\partial \xi} + \rho \hat{U} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}(-1) \right] g'_L(\xi) \right. \\ \left. + \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}(1) \right] g'_R(\xi) \right] \quad (26)$$

冒頭に述べた通り 3 重線部は保存型 FR 法での流束微分と同じである為、それ以外の項に着目する。保存量保存性を満たす為には、以下の 2 つ目の等号が数値的に成り立つ事が必要である。

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial \hat{E}^C}{\partial \xi} dx = \hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_{i-1/2}^{com}$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\phi \frac{\partial \rho \hat{U}}{\partial \xi} + \rho \hat{U} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}(-1) \right] g'_L(\xi) \right. \\ \left. + \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}(1) \right] g'_R(\xi) \right] d\xi \quad (27)$$

これはセル内の保存量積分値が左右の共通流束の差で書ける事を意味し (局所保存性：文献⁽⁹⁾の Sec.3.1 参照)、計算領域全体で足し合わせると境界値のみが残り保存量保存性が満たされる。

2.3.2 保存量保存性を満たす条件

式 (27) の 2 つ目の等号が数値的に成り立つ条件を示す。冒頭に導入した補間記号 I^K を用いると、流束微分 (式 (27) の被積分関数) は数値的には以下のように書ける：

$$I^K[\phi] \frac{\partial I^K[\rho \hat{U}]}{\partial \xi} + I^K[\rho \hat{U}] \frac{\partial I^K[\phi]}{\partial \xi} \\ + \left[\hat{E}_{i-1/2}^{com} - I^K[\hat{E}](-1) \right] g'_L(\xi) \\ + \left[\hat{E}_{i+1/2}^{com} - I^K[\hat{E}](1) \right] g'_R(\xi) \quad (28)$$

なお、 $\hat{E} = \rho \hat{U} \phi$ である。ここで重要なのは、 $\phi, \rho, \hat{U}, \hat{E}$ の多項式の次数は何次であっても構わない (数値的には全て K 次多項式で近似する為) 事である。すなわち、より

一般的に、任意の次数の多項式あるいは任意の関数 A, B を用いて以下のように書き換えて良い：

$$\begin{aligned} & \frac{I^K[A] \frac{\partial I^K[B]}{\partial \xi} + I^K[B] \frac{\partial I^K[A]}{\partial \xi}}{\quad} \\ & + [\hat{E}_{i-1/2}^{com} - I^K[AB](-1)]g'_L(\xi) \\ & + [\hat{E}_{i+1/2}^{com} - I^K[AB](1)]g'_R(\xi) \quad (29) \end{aligned}$$

下線部を $\xi \in [-1, 1]$ で数値積分する際、解の定義点 ($K+1$ 個) にガウス点またはガウスロバット点を用いるとそれぞれ以下が成り立つ。

ガウス点：

$$I_G^K[A](1)I_G^K[B](1) - I_G^K[A](-1)I_G^K[B](-1) \quad (30)$$

ガウスロバット点：

$$I_L^K[A](1)I_L^K[B](1) - I_L^K[A](-1)I_L^K[B](-1) \quad (31)$$

それぞれ下付きの G, L はガウス点、ガウスロバット点での補間を意味する。ここで、式 (29) の下線部は $2K-1$ 次多項式なので、 $K+1$ 個のガウス点及びガウスロバット点で数値積分を行うと厳密な数値積分が可能である事に注意する。このように、式 (29) の下線部が厳密に数値積分される事が1つ目の重要な点である。次に重要な点は、多項式としては $I_{G/L}^K[A]I_{G/L}^K[B] \neq I_{G/L}^K[AB]$ であるものの、解の定義点においては両者が離散的に一致する事である。ゆえに、積分領域の端点が $\xi = \pm 1$ である為、ロバット点を解の定義点に選んだ時のみ以下が成立する：

$$\begin{aligned} & I_L^K[AB](1) - I_L^K[AB](-1) = \\ & I_L^K[A](1)I_L^K[B](1) - I_L^K[A](-1)I_L^K[B](-1) \quad (32) \end{aligned}$$

以上をまとめると、解の定義点にガウスロバット点を用いた場合にのみ以下が成立する：

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left[I^K[A] \frac{\partial I^K[B]}{\partial \xi} + I^K[B] \frac{\partial I^K[A]}{\partial \xi} \right] d\xi \\ & \simeq \sum_{i=0}^K \omega_i \left[I^K[A] \frac{\partial I^K[B]}{\partial \xi} + I^K[B] \frac{\partial I^K[A]}{\partial \xi} \right] \\ & = I_L^K[AB](1) - I_L^K[AB](-1) \quad (33) \end{aligned}$$

ここで ω_i はガウスロバット点での数値積分時の重みとする。これは SP にガウスロバット点を用いて離散的に評価すると、元の多項式の次数によらず、2 次非線形項の厳密な定積分値を得るという著しい性質を意味する。式 (33) に基づくと、式 (29) を数値積分すると $\hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_{i-1/2}^{com}$ となり、所望の結果 (式 (27) の 2 つ目の等号) を得る。なお、 $g'_{L/R}(\xi)$ は K 次の多項式であるため、 $K+1$ 個の離散点を用いた数値積分で厳密な定積分値を得る事を用いた。

以上から、FE 型で保存量保存性を満足するための条件は以下である：

- SP (解の定義点) をガウスロバット点に置かなければならない
- 修正関数は何でも良い

なお本条件は FE 型に限らず、本稿で取り扱う BL 型と KG1 型に適用可能 (KG2 型には不適) である。また次に示すように、より一般的には 2 次の非線形項とみなせる混合型移流項を持つ場合に適用可能である。

2.3.3 保存量保存性が成り立つ混合型移流項の性質 先に示した通り、本稿で取り扱う擬混合型 FR 法の保存量保存性は、2 次の非線形項の数値積分を厳密に行える事に依存する。ゆえに本稿で導入した混合型移流項のうち、以下の 3 つは保存量保存性を満たすように離散化可能である：

$$(Fe.) : \rho \hat{U} \phi \rightarrow \rho \hat{U} \cdot \phi, \quad (34)$$

$$(Bl.) : \rho \hat{U} \phi \rightarrow \rho \phi \cdot \hat{U}, \quad (35)$$

$$(Kg1.) : \rho \hat{U} \phi \rightarrow \rho \hat{U} \cdot \phi, \quad \rho \phi \cdot \hat{U}, \quad \rho \cdot \hat{U} \phi. \quad (36)$$

矢印は、3 次の非線形項をどのように 2 次の非線形項とみなすかを示す (なお kg1. の式 (23) では 2,3 行目の係数が同じである為、行を跨いで 3 種類の 2 次の非線形項を見出せる)。すなわち本稿で示した 3 つの型以外にも、このように 3 次の (もしくはそれ以上) 非線形項を 2 次の非線形項とみなして分解した型ならば保存量保存性を満たす。ちなみに Kg2. の式 (24) は、2,3 行目の係数が異なる為、行を跨いで 2 次の非線形項とみなす事が出来ない。ゆえに SP をガウスロバット点に置いても保存量保存性は満たされない (Sec.3 の検証結果を参照)。

また KG 型のオリジナル論文⁽⁸⁾には、本稿で紹介した α, β の組み合わせ以外にも様々なセットが提案されている。しかし本節で示した通り、ガウスロバット点を用いて保存量保存性を満たす為に 2 次の非線形項の組み合わせで表現する必要がある。その条件は $\alpha = 1 - 3\beta$ であり、これを満足しない α, β の組み合わせ (例えば Kg2.) では保存量保存性が満たされない。このように保存量保存性の観点から混合型移流項の性質を整理した例は極めて少なく、本稿では取り扱わない自乗量保存特性の議論を進める上でも基礎となる知見である。

3. 検証計算

3.1 計算条件

前章の結果を検証する為に、2次元の渦移流問題⁽¹⁰⁾の計算を行った。計算の初期条件は以下の条件である。

$$\begin{aligned} u &= U_\infty - C \frac{(y - y_c)}{R_c^2} \exp \frac{-r^2}{2} \\ v &= C \frac{(x - x_c)}{R_c^2} \exp \frac{-r^2}{2} \\ p &= p_\infty - \frac{\rho C^2}{2R_c^2} \exp(-r^2) \\ r^2 &= \frac{[(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]}{R_c^2} \end{aligned} \quad (37)$$

なお、 $U_\infty = 0.1$, $R_c = 0.1$, $C/(U_\infty R_c) = 0.2$, $x_c = y_c = 0.1 \times 10 \times 10 (-1 \leq x, y \leq 1)$ の直交格子を用い、SP の数を 4 点 (3 次の多項式) とした。ガウス点、ガウスロバット点の両点を用い、修正関数には特に明記しない場合 g_{DG} を使用した。共通流束の評価には Rusanov flux を用いた。時間積分法には 3 次の RK 法 (cfl=0.04) を用い、渦が元的位置にも戻ってくるまで (t=20 まで) の計算をおこなった。

3.2 計算結果

保存量保存性を評価するために、全領域で保存変数 $\psi = \{\rho, \rho u, \rho e\}$ (質量, x 方向の運動量, 全エネルギー) をそれぞれの時間での値を初期値を用いて無次元化した式 (38) を用いて評価する。また、領域の積分には SP を利用したガウス (ロバット) 積分を用いた。Tab.1, Tab.2 がそれぞれの定式型と SP に置いたときの保存量保存性の誤差をまとめたものである。

$$err = \sum_{i=0}^N \left| \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi(x, y, t) dx dy}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi(x, y, 0) dx dy} - 1 \right| \quad (38)$$

Form	ρ	ρu	ρe
(Div.)	8.03×10^{-13}	9.30×10^{-13}	8.21×10^{-13}
(Fe.)	8.00×10^{-13}	1.58×10^{-6}	1.19×10^{-7}
(Bl.)	1.91×10^{-7}	1.57×10^{-6}	3.84×10^{-7}
(Kg1.)	1.91×10^{-7}	1.77×10^{-6}	3.86×10^{-7}
(Kg2.)	1.91×10^{-7}	1.77×10^{-6}	3.86×10^{-7}
(Kg1.)- g_{Ga}	1.55×10^{-7}	2.95×10^{-6}	3.22×10^{-7}
(Kg1.)- $g_{Lump,Lo}$	1.26×10^{-7}	3.56×10^{-6}	2.70×10^{-7}

Tab. 1: 保存量保存性の誤差 (ガウス点)

Form	ρ	ρu	ρe
(Div.)	8.00×10^{-13}	9.90×10^{-13}	8.05×10^{-13}
(Fe.)	8.07×10^{-13}	9.89×10^{-13}	8.10×10^{-13}
(Bl.)	8.05×10^{-13}	9.96×10^{-13}	8.07×10^{-13}
(Kg1.)	8.07×10^{-13}	9.89×10^{-13}	8.10×10^{-13}
(Kg2.)	8.04×10^{-13}	1.06×10^{-10}	2.58×10^{-12}
(Kg1.)- g_{Ga}	7.94×10^{-13}	8.15×10^{-13}	7.20×10^{-13}
(Kg1.)- $g_{Lump,Lo}$	7.91×10^{-13}	8.06×10^{-13}	7.25×10^{-13}

Tab. 2: 保存量保存性の誤差 (ガウスロバット点)

これらより、ガウス点を用いたものは、丸め誤差の範囲内である (Div.) と (Fe.) の ρ 以外の結果では保存しなかった。(Fe.) の ρ が保存した理由は、このケースにおいて $\phi = 1$ となり、式が (Div.) と一致するからである。以上より、SP をガウス点にした時の擬混合型は保存量保存を満たさないことが示された。一方、ガウスロバット点を用いたものは、(Kg2.) の以外の全ての結果で保存量が保存した。(Kg2.) の誤差は他と比べて微小であるが、長時間計算した誤差の時間履歴 (Fig.2), を見ると (Kg2.) が明らかに保存しないことが読み取れる。(Kg2.) の ρ が保存した理由は、このケースにおいて、式が (Kg1.) と一致するからである。また、Tab.1, Tab.2 下部は (Kg1.) の型において修正関数を変えたときの結果である。SP に関する傾向に変化がなく、修正関数に依存しないことがわかる。以上のことより前章で示した条件を数値計算で再現できることがわかった。

SP をガウスロバット点にした (Kg1.) において細かい格子 (40×40) で 3 周期分の計算を行った。Fig.3 は圧力場で、Fig.4 は y 方向の速度である。これらより、擬混合型において良好に渦を捉えられることが確認できる。

4. まとめ

数値安定性が高い流束再構築 (FR) 法を目指し、擬混合型を用いた FR 法の定式化に取り組んだ。

- (1) スキームの保存量保存性に着目し、どのような条件で保存するのかが示し、2次元の渦移流問題で検証計算を行った。
- (2) 移流項を擬混合型にする場合、保存量保存性に関しては SP をガウス・ロバット点に置く必要があること。3 次以上のライブニッツ則を有する擬混合には適用できないこと、修正関数に依存しないことがわかった。

これらの結果を踏まえ、今後は自乗量保存を考慮した FR 法の定式化に取り組みたい。

参考文献

- (1) Huynh,H.T ”A Flux Reconstruction Approach to High-Order Schemes Including Discontinuous Galerkin Methods”, AIAA Paper 2007-4089
- (2) Youhei Morinishi, “Skew-symmetric form of convective terms and fully conservative finite difference schemes for variable density low-Mach number flows”, JCP 229(2010) 276-300
- (3) Sergio Pirozzoli, “Stabilized non-dissipative approximations of Euler equations in generalized curvilinear coordinates”, JCP 230(2011) 2997-3014
- (4) Gregor J.Gassner, “A kinetic energy preserving nodal discontinuous Galerkin spectral element method”,Int J. Numer. Meth. Fluids 2014;76:28-50
- (5) Travis C. Fisher, Mark H. Carpenter, Jan Nordstrom, Nail K. Yamaleev , Charles Swanson, “Discretely conservative finite-difference formulations for nonlinear conservation laws in split form: Theory and boundary conditions”,JCP 234(2013) 353-375
- (6) W.J. Feiereisen, W.C. Reynolds,J.H. Ferziger, “Numerical simulation of a compressible homogeneous, turbulent shear flow”, Report TF-13, Thermoscience.Div., Mech. Eng.,stanford University, 1981.
- (7) G.A. Blaisdell, E.T.spyropoulos,J.H. Qin, ”The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods”, Appl. Numer. Math.21(3)(1996)207-219
- (8) C.A Kennedy, A. Gruber “Reduced aliasing formulations of the convective terms within the Navier-Stokes equations for a compressible fluid”,JCP 227(2008) 1676-1700
- (9) Yoshiaki Abe , Takanori Haga , Taku Nonomura , Kozo Fujii ”On the freestream preservation of high-order conservative flux-reconstruction schemes”, JCP281(2015)28-54
- (10) S.Kawai, S.K. Lele “Localized artificial diffusivity scheme for discontinuity capturing on curvilinear meshes”,JCP 227(2008) 9498-9526

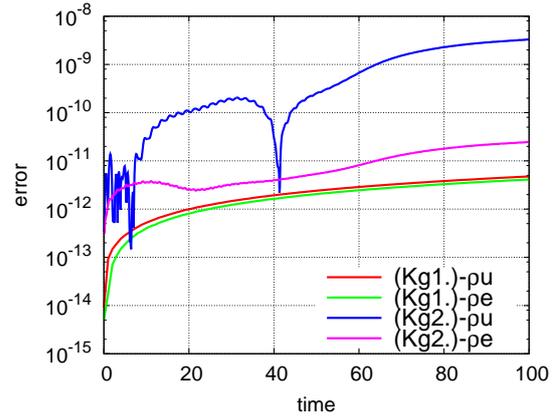


Fig. 2: 誤差の比較

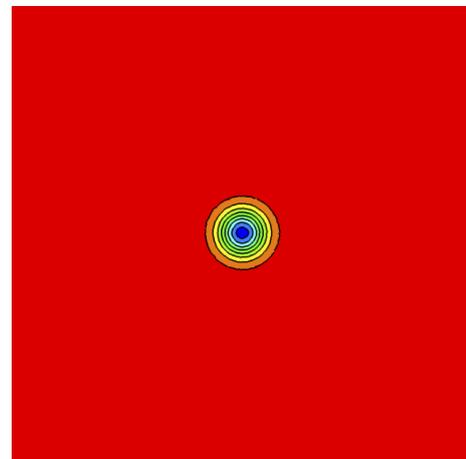


Fig. 3: 圧力場 (Kg1.)

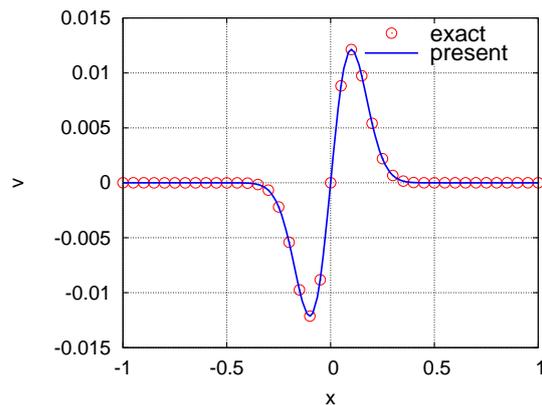


Fig. 4: y 方向の速度 (Kg1.)