

マルチブロック境界における粘性項評価の改良について

The modification of viscous term evaluation on the multi-block interface

○ 池田 友明, 宇宙航空研究開発機構, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, ikedat@chofu.jaxa.jp
鈴木 祐太, 浅井 雅人 首都大学東京 システムデザイン研究科, 東京都日野市旭が丘 6-6

Tomoaki IKEDA, JAXA, 7-44-1 Jindaiji-Higashimachi, Chofu, Tokyo

Yuta SUZUKI, Masahito ASAI, TMU, 6-6 Asahigaoka, Hino, Tokyo

This paper proposes the modification of viscous term evaluation on the multi-block interface boundary, where a one-sided difference is employed along with a central compact difference scheme applied to inner nodes. Unlike the convection term that utilizes the characteristic decomposition incorporated with upwinding treatment, the viscous term should be formulated based on the average over both sides of grid blocks, due to its diffusive nature. When viscous flux, or first-order derivative, is sought, the gradient averaged across an interface must be imposed as an explicit boundary condition for compact difference operation, to remove imaginary contribution of modified wavenumbers. The imaginary part associated with one-sided difference stencils would lead to unstable behavior at higher wavenumbers. The present formulation is validated via one-dimensional heat conduction and a three-dimensional application problem: flow around a sphere.

1. 緒言

近年、乱流計算や空力音響計算などの DNS, LES 等、高次精度手法が求められる数値解析分野において、格子生成が比較的容易な DG 法, FR 法や、物体形状を直接的に格子トポロジーで再現しない直交格子を用いる方法などの研究が進んでいる。一方、body-fitted 格子を用いる構造格子法は格子作成の労力は大きい、ステンシルを増やすことにより原理的には任意の次数の高次精度を達成することが可能であり、既存の構造格子計算コードを高次精度化するのにも比較的容易である。このため高精度評価が必要とされる研究開発分野において、構造格子法は現在でも少なからず利用されている。著者らは圧縮性高次精度解析に適した、特性インターフェイス接続によるマルチブロック構造格子を用いて、翼周り流れ場から発生する空力音響解析を行っている [1, 2]。

特性インターフェイス接続は、節点ベースの差分法をマルチブロック格子に適用する際、特性条件により風上側のブロックで評価された情報を接続面のアップデートに用いる手法である [3, 4]。ブロック間に overlap 領域を陽に定義する必要がなく、接続面をまたいで格子線が滑らかに接続することを要求しない。一般化座標の接続面に交わる座標軸を ξ とすると、Navier-Stokes 方程式は以下のように局所一次元非粘性 (Local One-Dimensional Inviscid, or LODI) 関係式に変換され、特性速度である固有値の正負により対応する特性量の差分式に関して、接続面のどちら側の情報を用いるか決定される：

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \bar{\lambda} \frac{\partial R}{\partial \xi} = \bar{P}^{-1} S_{\xi} \quad (1)$$

ここで R は特性量を、 $\bar{\lambda}$ は特性速度を固有値に持つ対角行列を、 \bar{P}^{-1} は特性分解変換行列を、 S_{ξ} は粘性項と ξ 方向以外の対流成分を含むソース項である。

この Eq. (1) の解釈に関して、Kim ら [4] は変換行列

\bar{P}^{-1} が係った粘性項も特性分解により評価すべきだと主張している。特性境界条件を拡張した [5] においても、粘性項は同様に特性分解されている。しかしながら本来圧縮性 Navier-Stokes 式の CFD 解析においては、対流項には特性分解に基づいた風上差分が適用されても、通常粘性項には特性分解と無関係に中心差分が用いられる。本稿では特性インターフェイス条件を粘性項まで拡張する扱いの妥当性及びより適切な手法について検討する。

2. 粘性項 Modified Wavenumber 解析

ここでは問題を簡略化して、一次元熱伝導方程式にインターフェイス接続を適用する際の安定性について考察する。有限区間 $0 \leq x \leq L$ で定義された関数 u に初期値を与え、周期境界条件を仮定する：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=L} \quad (2)$$

ここで、区間 $[0, L]$ はセル幅 $h = L/N$ に等分割する。周期境界条件にはインターフェイス接続を適用するものとする。空間差分スキームには、既報 [3] で提案されているマルチブロック向けのステンシル 5 点の標準 6 次精度コンパクトスキームの組み合わせを用い、一階差分スキームを 2 回作用させることで二階微分を近似する。但し、境界点 (例えば $j = 0$) における片側差分は、以下のような 4 点 2 次精度差分を採用する：

$$u'_j = -\frac{1}{6h} (10u_j - 15u_{j+1} + 6u_{j+2} - 2u_{j+3}) \quad (3)$$

Eq. (3) は [6] 中で A-Stability を達成する 4 点最適化 2 次精度時間陰解法として導出されている後退差分式と同等であり、標準 2 次精度片側差分と標準 3 次精度片側差分の算術平均である。この Eq. (3) を線形移流問題に空間風上差分として用いる場合、modified wavenumber の虚部は正にならず安定である。また、境界の隣の点では、標準 4 次精度 Pade スキームを適用する。

上述の外部境界条件の存在しない問題に対する二階の差分演算は、一般に行列 $a_{j,l}$ を用いて以下のように表せる：

$$\delta_{xx}^2 u_j = \frac{1}{h^2} \sum_l a_{j,l} u_{j+l} \quad (4)$$

l は二階差分に必要なステンシルの範囲で和を取る。一般にコンパクト差分を用いる場合には全点の情報が必要となる。Modified wavenumber 解析を行うにあたり、空間方向に離散フーリエ変換を施すと u_j は以下のように書ける：

$$u_j = \sum_n \hat{u}_n e^{ikhj} \quad (5)$$

ここで \hat{u}_n はフーリエモード係数、波数 $k = 2\pi n/L$, n に関する和は例えば偶数 N に対して $-N/2$ から $N/2 - 1$ の範囲で行う。この時、任意のフーリエモード n に対して解析的には

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j = -k^2 \hat{u}_n e^{ikx} \quad (6)$$

であるが、差分演算による modified wavenumber を κ とすると

$$\delta_{xx}^2 u_j = \frac{1}{h^2} \sum_l a_{j,l} \hat{u}_n e^{ikh(j+l)} \equiv -\kappa^2 \hat{u}_n e^{ikhj} \quad (7)$$

より

$$-(\kappa h)^2 = \sum_l a_{j,l} e^{ikh l} \quad (8)$$

と表される。Eq. (8) より、 $a_{j,l}$ が j に関して一様でない時、 κ は座標 j に依存することがわかる。このため単一のフーリエモードを初期条件としても、計算の進行と共に分散誤差が生じ、初期条件以外のモードが励起される。任意のフーリエモードが安定であるための十分条件は、 κ^2 の実部 $\text{Real}(\kappa^2) \geq 0$ である。

ここでは拡散項が本来正負両方向に拡散する作用を表すことを考慮に入れ、以下の 3 通りの方法を検討する：

Case A

コンパクトスキームによる差分演算を 2 回行った後、 $j = 0$ と N の拡散項を平均する。これにより、インターフェイス上で存在していた $\text{Imag}(\kappa^2)$ が打ち消され、形式上分散誤差が消失する。平均化演算は 1 度のみ。これはオリジナルの方法 [4] から分散誤差をキャンセルさせることに相当する。

Case B

一階微分 $\partial_x u$ の散逸誤差 $\text{Imag}(\kappa)$ を打ち消すために、差分演算を 1 回行った後、 $j = 0$ と N で平均を取り、その後 2 回目の差分演算を行う。得られた拡散項に関して再度 $j = 0$ と N で平均を取る。平均化演算は 2 度。

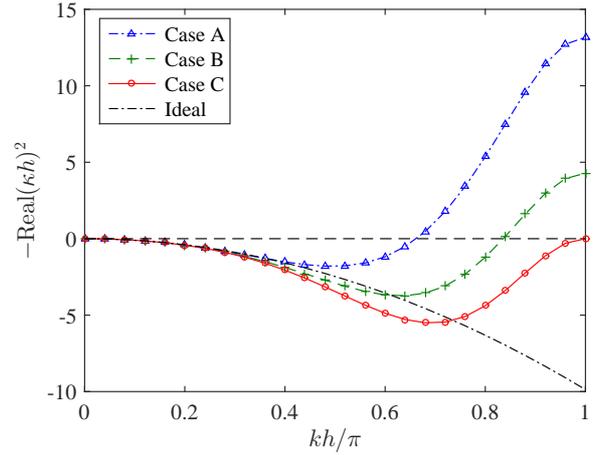


Fig. 1: Comparison of modified wavenumber profiles for 2nd-order difference schemes at the I/F boundary.

Case C

Case B と同じく 2 度平均化を施すが、1 度目はコンパクト差分演算を行う前に、Eq. (3) を用いて境界の微係数を求め、 $j = 0$ と N で平均を取る。その後、平均化された微係数を境界条件としてコンパクト差分演算を 2 度行い、再度拡散項に関して $j = 0$ と N で平均を取る。

今 $N = 50$ に取り、それぞれの方法について境界点 $j = 0$ & N における modified wavenumber κ^2 の実部と比較したのが Fig. 1 である。オリジナルの方法から分散誤差を取り除いた Case A では、高波数において拡散項は不安定となり、インターフェイス境界で発散する。この安定性に関しては分散誤差の有無は関係なく、オリジナルの方法 [4] と同じ不安定性を示す。これは、元一階微分 $\partial_x u$ を評価する際に境界で片側差分を用いるため、インターフェイス上の modified wavenumber κ に特に高波数で卓越する虚部が存在し、それが 2 乗されるためである。Case B では高波数の不安定は相当緩和されるが、依然として不安定な波数域が存在する。1 度目の平均化で境界部の κ 虚部はキャンセルされるものの、境界近傍の他の点では κ の高波数域に虚部が存在し [3]、2 度目の差分演算でそれが不安定として現れる。一方、Case C のように平均化した微係数を境界条件としてコンパクト差分を行うと、境界近傍の κ の虚部は minimal に抑えることができ、特に $kh = \pi$ において $\text{Imag}(\kappa) = 0$ となる。 $kh = \pi$ で波が減衰しない中立安定となる以外は、安定な計算が可能となる。

このように、一階コンパクト差分を 2 度作用させて拡散項を求める場合、境界条件を安定に組み入れるために注意が必要である。特に壁面などの温度境界条件をノイマン条件で与える場合、Case C と同様に境界で指定され

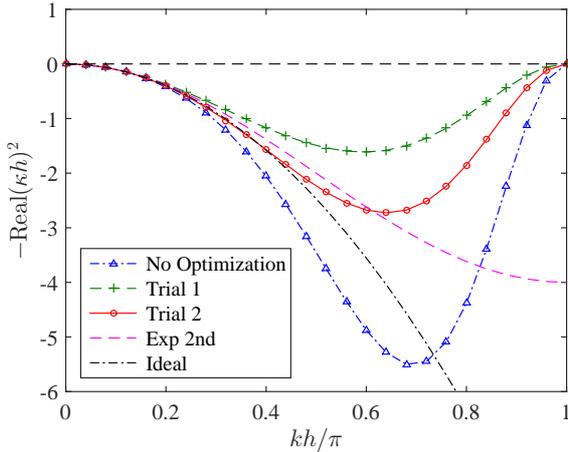


Fig. 2: Accuracy improvement at lower wavenumbers by changing the boundary schemes of the 2nd compact-difference operation.

た微係数をコンパクト差分の境界条件として陽に与え、温度勾配を求める必要がある。

Fig. 1 から Case C のアプローチが安定であることはわかったが、Ideal な振る舞いである $k = \kappa$ からのずれが依然として無視できない。境界スキームの係数の選び方を試行錯誤すると、1 度目の微係数を選ぶ際には Eq. (3) を用いて、2 度目の差分演算で片側差分の次数を下げると、低波数での精度が向上することがわかる。Fig. 2 にその一例を示す。Fig. 1 で求めた Case C では κ が過大評価されていたが (No Optimization)、境界を 1 次精度前進 (or 後退) 差分にすると逆に過小評価される傾向となる (Trial 1)。標準 1 次精度と標準 2 次精度片側差分の算術平均を用いると、ほぼ optimal な振る舞いが得られる (Trial 2)。

また Fig. 2 には、標準 2 次精度二階差分：

$$u_j'' = \frac{1}{h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (9)$$

との比較もされている (Exp 2nd)。およそ $kh < \pi/2$ の低波数では、optimal なコンパクト差分を使った高次精度スキームとの差が顕著であるが、 $kh \sim \pi$ のリミットでも拡散項の damping 作用が働くため、波数に関わらず安定である。今回のように一階差分演算子を 2 度作用させて粘性項を評価する場合には、高波数の極限で damping が作用しない。代わりに一般の計算にはローパスフィルタを適用する必要がある [7]。

3. 線形一次元問題

本節では Eq. (2) で表される熱伝導方程式を離散化して解き、手法間の比較を行う。 $L = 1$, $N = 50$ に選び、時間進行には 4 次精度の Runge-Kutta スキームを、無次

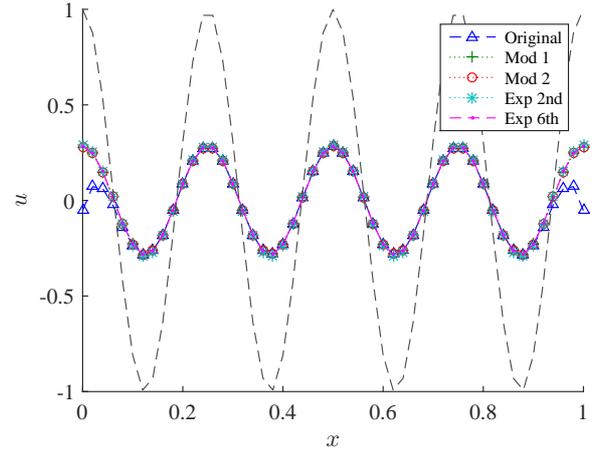


Fig. 3: Comparison of 1D heat equation at $t = 0.1$. Gray dashed line denotes initial sinusoidal distribution with wavenumber $m = 4$.

元時間ステップ幅に $\Delta t = 0.1h^2$ を選ぶ。比較する手法は、オリジナルの Case A (Original), 差分スキームに最適化を加えていない Case C (Mod 1), 最適化を加えた修正手法 (Mod 2), 通常の周期境界条件を課した 2 次精度中心差分 Eq. (9) (Exp 2nd), 同様にステンシル 7 点の 6 次精度中心差分 (Exp 6th) :

$$u_j'' = \frac{1}{h^2} (2u_{j+3} - 27u_{j+2} + 270u_{j+1} - 490u_j + 270u_{j-1} - 27u_{j-2} + 2u_{j-3}) / 180 \quad (10)$$

である。通常の周期境界条件を課す場合にはインターフェイス境界での精度低下がないため、Exp 6th の結果を最も解析解に近いと仮定して比較する。初期条件には波数を $2\pi m$ としたコサイン波：

$$u(x; t = 0) = \cos(2\pi m x / L)$$

を与える。以下、 $m = 4$ と $m = 12$ の 2 ケースの結果を示す。

Fig. 3 に初期条件 $m = 4$ の結果比較を示す。単純に低波数の単一モードの減衰問題であるが、境界近傍で Original 結果の他手法からのずれが卓越する様子がわかる。それ以外の 4 手法には明確な違いが見られない。一方、Fig. 4 に示すように初期条件の波数を上げた $m = 12$ の場合には、Original の発散傾向がより顕著になり、さらに Mod 1 も境界近傍で認識可能な差異が生じる。それぞれの Exp 6th からの L^2 誤差ノルムを Table 1 にまとめる。低波数ケースでは Mod 2 が最も誤差が小さいが、高波数ケースでは Exp 2nd がより誤差が小さい結果となる。この 2 手法に関して、高波数ケース $m = 12$ の L^2 誤差ノルムの時間履歴を Fig. 5 に示す。計算初期は Mod 2 がより誤差が小さ

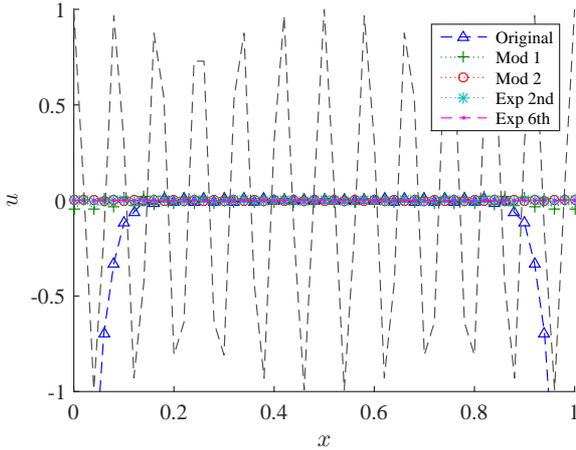


Fig. 4: Comparison of 1D heat equation with initial wavenumber $m = 12$.

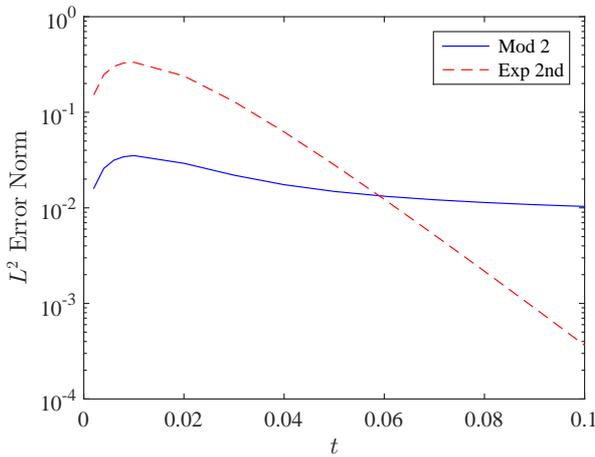


Fig. 5: Temporal decay of L^2 error norm for initial wavenumber $m = 12$.

いが、時間の進行と共に Mod 2 の誤差の減少は頭打ちになる。これは計算が進むにつれて高波数 $kh \sim \pi$ の波が出現し、Mod 2 スキームではそれ以上減衰しないためと考えられる。前述の通り、通常は適切に高波数を減衰させるフィルタもしくは人工粘性を用いることが望ましい。

4. 解析例 – 低レイノルズ数球周り流れ

今回導出した Mod 2 スキームを三次元流れ場解析に適用する。コンパクト差分の境界条件として与える微係数の算術平均を一般座標系に拡張する際には、既報 [3] と同様の座標変換を用いる。インターフェイス面に交わる軸方向の勾配は、ブロックをまたいで座標変換により表される。変換式により反対側ブロックの勾配を評価し、両ブロックの算術平均を計算する。

Tab. 1: Comparison of L^2 error norm of 1D heat equation at $t = 0.1$

Method	$m = 4$	$m = 12$
Original	5.54×10^{-1}	8.51
Mod 1	1.19×10^{-2}	1.37×10^{-1}
Mod 2	7.36×10^{-3}	1.03×10^{-2}
Exp 2nd	3.85×10^{-2}	3.64×10^{-4}

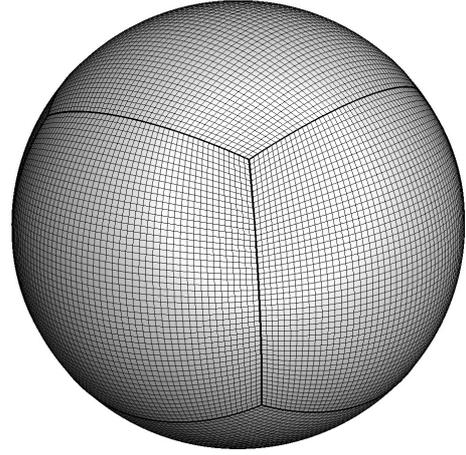


Fig. 6: Surface grid on the sphere.

ここでは例題として一様流中に置かれた球周り流れを解く。基礎式は圧縮性 Navier-Stokes 方程式とし、代表長に球直径 D 、代表速度に一様流速 U_∞ を取る。Re 数は 500、一様流マッハ数を 0.2 とする。Fig. 6 に示すように球表面を 6 ブロックに分割し、各ブロックは 50×50 のセルにより離散化する。径方向には 420 点、等比級数により格子幅を一律に伸ばし $70D$ まで解析空間とする。各格子ブロックをインターフェイス条件により接続する。対流項は既報 [3] にならって中心差分コンパクトスキーム+特性インターフェイス接続で離散化する。粘性項の接続条件には、3. 節で取り上げた Original 手法と Mod 2 を比較する。

流れ場が十分発達すると、球の後流で特長な渦変動が現れる。速度勾配テンソルの第二不変量である Q 値の瞬時等値面を、粘性項接続条件各々について Figs. 7 & 8 で比較する。Fig. 7 に示した Original の結果では、接続面近傍に速度勾配誤差が生じ、平面的な Q 値の等値面が不自然に現れている。Fig. 8 では、格子ブロックのエッジ近傍に変動が僅かに残るが、インターフェイス面近傍の卓越した誤差は全て消失している。

続いて球表面の温度分布を比較する。球の滑りなし壁面においては、断熱条件を与える。Mod 2 では粘性項温



Fig. 7: Instantaneous Q-vortex isosurfaces, solved with the *Original* scheme, at $Q = 1 \times 10^{-5}(U_{\infty}/D)^2$. Solid lines in the figure denote edge lines shared by adjoining three grid blocks, extended from the sphere surface.

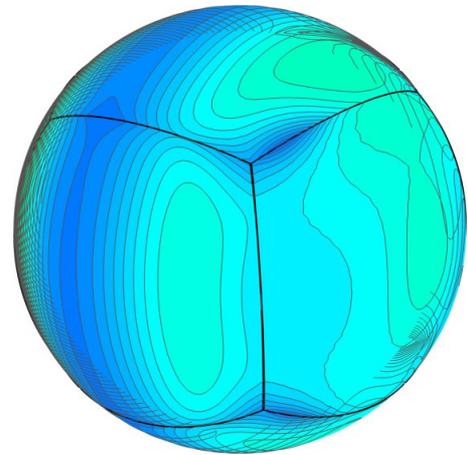


Fig. 9: Instantaneous surface temperature contours solved with the *Original* scheme.

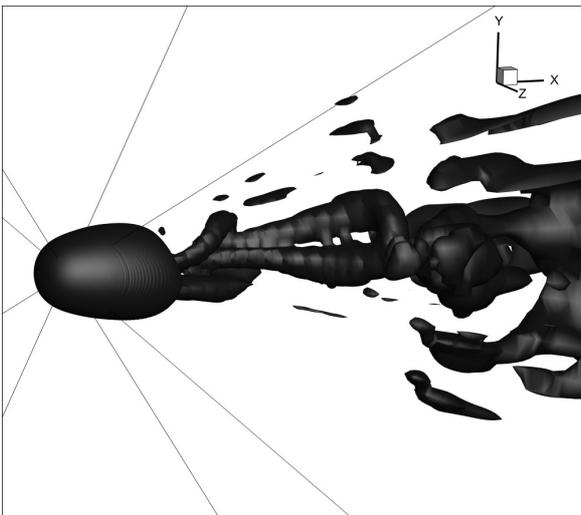


Fig. 8: Instantaneous Q-vortex isosurfaces solved with the *Mod 2* scheme.

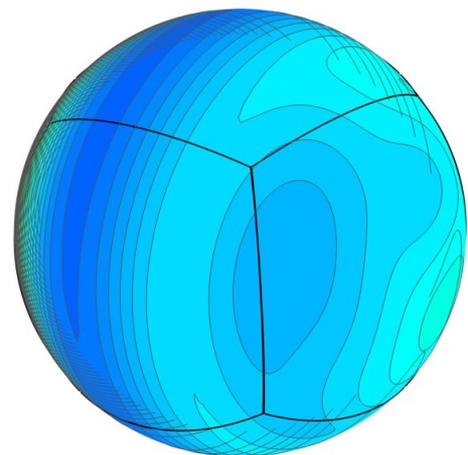


Fig. 10: Instantaneous surface temperature contours solved with the *Mod 2* scheme.

度勾配を求めるためのコンパクト差分演算を行う前に、壁垂直方向の温度勾配 0 を壁面の境界条件として陽に与えている。他方、Original では、境界条件無しで温度勾配を計算した後、粘性フラックスを計算する際に温度勾配 0 を与える。Figs. 9 & 10 に球の後流側温度分布比較を示す。Original ではブロック境界のエッジや角ではっきりと温度分布の低下が見られるが、Mod 2 では接続箇所に関係無く滑らかな分布が得られている。これら二つの結果から、粘性項の評価手法の違いにより流れ場の再現性が大きく改善していると言える。

5. まとめ

粘性項評価に関してコンパクト差分スキームをマルチブロック境界に適用する際の改良法を提案した。Overlap を設けないインターフェイス接続を行う場合、境界点では片側差分を採用する必要があるが、そこに起因する数値誤差により粘性項が不安定に作用し得ることが modified wavenumber 解析を通して明らかになった。一階差分演算を 2 度適用する際、ブロック両側の情報を用いた平均化により modified wavenumber に虚部が入らないように微係数を導出することで、安定な粘性項評価を達成した。提案された手法はマルチブロックにより分割された球周りの格子に適用され、Original 手法では接続部で顕著であった精度低下を大幅に改善することが出来た。

6. 謝辞

本研究は日本学術振興会科研費 No. 25420139 の助成を受けたものである。また計算リソースには JAXA スーパーコンピューターシステム JSS を用いている。

参考文献

- [1] T. Ikeda, T. Atobe, Y. Konishi, H. Nagai, and K. Asai. Numerical study of wind-tunnel acoustic resonance induced by two-dimensional airfoil flow at low Reynolds number. In *Proc. 29th Congress of Int. Council of Aeronautical Sciences*, Session 4.8.1, pp. 1–12, St. Petersburg, Russia, 2014.
- [2] T. Ikeda, T. Atobe, D. Fujimoto, A. Inasawa, and M. Asai. Self-noise effects on aerodynamics of cambered airfoils at low Reynolds number. *AIAA J.*, Vol. 53, No. 8, pp. 2256–2269, 2015.
- [3] T. Ikeda, T. Sumi, and T. Kurotaki. Interface conditions of finite difference compact schemes for computational aeroacoustics. *AIAA J.*, Vol. 47, No. 11, pp. 2658–2665, 2009.
- [4] J. W. Kim and D. J. Lee. Characteristic interface conditions for multiblock high-order computation on singular structured grid. *AIAA J.*, Vol. 41, No. 12, pp. 2341–2348, 2003.

- [5] J. W. Kim and D. J. Lee. Generalized characteristic boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA J.*, Vol. 38, No. 11, pp. 2040–2049, 2000.
- [6] V. N. Vatsa, M. H. Carpenter, and D. P. Lockard. Re-evaluation of an optimized second order backward difference (BDF2OPT) scheme for unsteady flow applications. *AIAA Paper 2010-122*, 2010.
- [7] M. R. Visbal and D. V. Gaitonde. Padé-type higher-order boundary filters for the Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, Vol. 38, No. 11, pp. 2103–2112, 2000.