

## 気体論スキームにおける衝撃波異常現象の対策：非構造格子の場合

### Remedy against Shock Anomalies in Kinetic Schemes: Case of Unstructured Mesh Systems

- 松原 大輔, 京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 (院)  
大和田 拓, 京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻, 京都市西京区京都大学桂,  
ohwada@kuaero.kyoto-u.ac.jp:  
Daisuke Matsubara, Department of Aeronautics and Astronautics, Kyoto University (graduate student)  
Taku Ohwada, Department of Aeronautics and Astronautics, Kyoto University

A simple remedy against shock anomalies, which is proposed in [Ohwada & Adachi, JCP **255**, 2013, p.106] for structured mesh systems, is extended to the case of unstructured ones. The two step kinetic Lax-Wendroff scheme yields nearly shock anomaly free results for various cases of unstructured mesh systems.

#### 1. はじめに

衝撃波捕獲スキーム研究の歴史は von Neumann が衝撃波を伴う一次元流の計算の提案を行った 1944 年にまで遡る。しかしこの CFD の黎明期から現在までの 70 年間の研究成果の粋を集めた現代衝撃波捕獲スキームをもってしても、その性能はエクセレンスに程遠い。航空機や宇宙機等の周りの高速気流解析では、衝撃波捕獲、すなわち数値的散逸性を利用して衝撃波を熱力学第二法則の破綻や偽の振動といった異常を伴うことなく数点の格子で捕らえることに加え、境界層捕獲、すなわち境界層を合理的な解像度で正しく捕らえることも要求される。境界層は非常に小さな物理的散逸性によって形成されることから、数値的散逸性は物理的散逸性に比べ無視できるほど小さくなければならない。即ち衝撃波捕獲には必須の数値的散逸性は境界層捕獲の観点から言えば排除すべきものである。このような二律背反的要求を満たす衝撃波捕獲スキームとして、Roe スキームや HLLC スキーム等があげられるが、これらのスキームは航空宇宙工学における極限状況下の流体解析における使用に耐える堅牢性を有しない。極超音速気流の数値計算結果はカーバンクル現象やポストショック振動といった異常な挙動をしばしば呈するが、散逸的で(すなわち境界層捕獲でない)堅牢性に定評のある例えば HLLC スキームや Rusanov スキームですら、これらの異常から免れないのである。

Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式の守備範囲は局所的に平衡状態として近似できる流体である。平衡状態における気体分子の速度分布はガウス分布 (Maxwell 分布) で表され、その重みつき積分は Euler 方程式のフラックスベクトルを与える。また気体中の情報の伝播は、微視的に見れば気体分子の運動そのものである。衝撃波捕獲スキームはこれらの気体論の初等的な知識から導出できるが、このような気体論スキームの特色は堅牢性にある。例えば気体論スキームの原種である Equilibrium Flux Method (EFM) は一次の空間精度の場合には、実質的にカーバンクル現象を免れ、ポストショック振動の大きさも同じ 1 次精度の Rusanov スキームよりもはるかに小さいという高い堅牢性を示す。しかし EFM はその大きな散逸性のために空間精度を 2 次にも境界層捕獲ではない。この欠陥は散逸性の比較的小さい気体論スキームとのハイブリッドスキーム (例えば気体論的 Lax-Wendroff スキーム、以下 KLW と呼ぶことにする) で克服されている。KLW は衝撃波近傍では 1 次精度の EFM に近づき、衝撃波から離れた物理量が滑らかな領域 (境界層) では古典的な Lax-Wendroff スキーム (2 次精度) に近づくように設計・制御されている。

KLW は衝撃波捕獲と境界層捕獲とを兼ね備えているものの、その堅牢性は空間 1 次精度の EFM には及ばない。しかし構造格子の場合には簡単な前処理を施して衝撃波近傍で KLW を空間一次精

度の EFM により近づけることで衝撃波異常現象を工学上問題のない程度まで抑制できることが文献 1 で示されている。しかし衝撃波波面が格子を横切る場合には、一次精度の EFM でもポストショック振動を完全に抑制できない。一方、非構造格子は形状が単純ではない物体周りの流体シミュレーションにおいてしばしば用いられるが、非構造格子の計算では衝撃波波面はセル境界を必然的に横切る。ところが非構造格子の場合の物理量の分布の離散的なデータからの再構成は構造格子の場合に比べ正確ではないので、スキームの散逸性がより引き出される。このように非構造格子の場合には衝撃波異常現象の促進および抑制の両面の効果が予想される。本講演では筆者が現在行っている非構造格子の場合の衝撃波異常現象の抑制と予防に関する研究の概要を紹介する。

#### 2. KLW の数値フラックス

##### 2.1. 基礎方程式と記号

ここでは二次元の圧縮性 Euler 方程式に対する説明を行う。時間を  $t$ 、空間直交座標を  $(x, y)$  とし、密度、流速の  $x, y$  方向成分、圧力をそれぞれ  $\rho, u, v, P$  とし、これら気体力学的変数(プリミティブ変数)をまとめて  $\mathbf{h} = (\rho, u, v, P)^T$  と略記する。理想気体を仮定し、温度  $T$  は状態方程式  $T = P/\rho$  に従うとする。二次元圧縮性 Euler 方程式系(外力なし、無次元)は次式で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \mathbf{0}.$$

ここに  $\mathbf{h}$  は保存量であり、 $\gamma$  を気体の比熱比とすると、 $\tilde{\mathbf{h}} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho(u^2 + v^2)/2 + P/(\gamma - 1))^T$  で定義される。 $\Phi$  および  $\Psi$  はフラックスベクトルで、これらはプリミティブ変数  $\mathbf{h}$  (あるいは保存量  $\tilde{\mathbf{h}}$ ) の関数である。

$$\Phi(\mathbf{h}) = \Phi(\tilde{\mathbf{h}}) = \left( \rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho u \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma Pu}{\gamma - 1} \right)^T,$$

$$\Psi(\mathbf{h}) = \Psi(\tilde{\mathbf{h}}) = \left( \rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho v \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma Pv}{\gamma - 1} \right)^T.$$

なお、単位質量あたりの気体定数を  $R$  として  $T$  を  $RT$  と読み換えると、無次元量を使った説明を有次元量に対するものとみなせる。

##### 2.2. 数値フラックスの公式

KLW は有限体積法に分類される。オリジナルの KLW ではフラックスベクトルの時間微分までを考慮して時間的に二次精度を達成し

ているが、本研究では線の方法を用いて二次精度を達成することにする。セル境界の代表点を原点にとり、その法線方向に $x$ 軸、接線方向に $y$ 軸をとる。原点におけるプリミティブ変数(あるいは保存量)の極限值

$$\begin{aligned} h^L &= \lim_{x \rightarrow -0} h, & h^R &= \lim_{x \rightarrow +0} h, \\ \tilde{h}^L &= \lim_{x \rightarrow -0} \tilde{h}, & \tilde{h}^R &= \lim_{x \rightarrow +0} \tilde{h}, \end{aligned}$$

から単位時間、単位長さあたりの数値フラックス $\mathbf{F}$ を以下の式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \alpha \mathbf{F}^D + (1 - \alpha) \mathbf{F}^C, \\ \mathbf{F}^D &= \frac{\Phi^L + \Phi^R}{2} + \frac{a^L \Phi^L - a^R \Phi^R}{2} + b^L \tilde{h}^L - b^R \tilde{h}^R, \\ \mathbf{F}^C &= \Phi(\tilde{h}^C), \\ \tilde{h}^C &= \frac{1 + a^L}{2} \tilde{h}^L + \frac{1 - a^R}{2} \tilde{h}^R + b^L d^L - b^R d^R, \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \exp\left(-C \frac{|P^L - P^R|}{P^L + P^R}\right), \\ \Phi^H &= \Phi(h^H) \quad (H = L, R), \\ \tilde{h}^H &= \tilde{h}^H + (0, 0, 0, P^H/2)^T \quad (H = L, R), \\ d^H &= (0, \rho^H, 0, \rho^H u^H/2)^T \quad (H = L, R), \\ a^H &= a\left(\frac{u^H}{\sqrt{2T^H}}\right), \quad b^H = \sqrt{T^H} b\left(\frac{u^H}{\sqrt{2T^H}}\right), \\ T^H &= P^H/\rho^H \quad (H = L, R), \\ a(x) &= \operatorname{erf}(x), \quad b(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2). \end{aligned}$$

なお、上の公式はオリジナルの KIW に対するものであるが、最近の研究で $\tilde{h}^H = \tilde{h}^H$ ,  $d^H = (0, \rho^H, 0, 0)^T$ としても性能の低下は見られないことが確認されている。

### 2.3. 再構成

計算領域が三角形のセルに分割されており、各セルの重心でセルの面積平均として $h$ の値が与えられているとする。 $h$ の各成分( $h$ )の分布は各セルごとに再構成される。再構成にはセル中心でその値と一致する一次式を使った近似を用いる。その傾き(空間変数の係数)は、図1に示す三角形 $ABC$ のセルの場合には、三角形 $ABC$ の重心 $O$ とこの三角形と辺を共有する3つの三角形の重心 $P$ ,  $Q$ ,  $R$ における $h$ の値 $h_O$ ,  $h_P$ ,  $h_Q$ ,  $h_R$ から最小二乗法によって計算された傾きに、 $0 \leq S_0 \leq 1$ の範囲にある定数 $S_0$ をかけて制限したものを採用する。制限をかける前の $h$ の分布に対する辺 $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ の中点 $l$ ,  $m$ ,  $n$ における $h$ の値を $h_l$ ,  $h_m$ ,  $h_n$ とすると、Barth と Jaspersen によって提案された定数 $S_0$ は次式で定義される(文献2)：

$$\begin{aligned} S_0 &= \min_{H=l,m,n} c_H, \\ c_H &= \begin{cases} \varphi\left(\frac{h_{\max} - h_O}{h_H - h_O}\right) & h_H - h_O > 0 \\ \varphi\left(\frac{h_{\min} - h_O}{h_H - h_O}\right) & h_H - h_O < 0 \\ 1 & h_H - h_O = 0 \end{cases}, \\ h_{\max} &= \max\{h_O, h_P, h_Q, h_R\}, \\ h_{\min} &= \min\{h_O, h_P, h_Q, h_R\}. \end{aligned}$$

本研究では関数 $\varphi(s)$ として、Venkatakrishnan によって提案されたものを用いる(文献3)：

$$\varphi(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + s + 2}.$$

### 2.4. 衝撃波異常現象への対策

文献\*では、衝撃波近傍でスキームを一次精度の EFM に近づけることが衝撃波異常現象の対策として有効であることが確認されている。その対策の要点は、 $\mathbf{F}^D$ と $\mathbf{F}^C$ の配合を決めるパラメータ $\alpha$ の値を近傍のセル境界における $\alpha$ の値の最大値で置き換え、その置き換わった $\alpha$ の値に応じて勾配を制限するということであるが、この方針は非構造格子の場合にも容易に適用できる。ここでは以下の手順を提案する。

(i) 一つのセルの境界上のフラックスを評価する点(図1の三角形 $ABC$ では点 $l$ ,  $m$ ,  $n$ )における $\alpha$ の値の最大値を $\beta_0^{(0)}$ とする。同様方法で他のセルに対して $\alpha$ の値の最大値をセル中心の値として割り当てる。

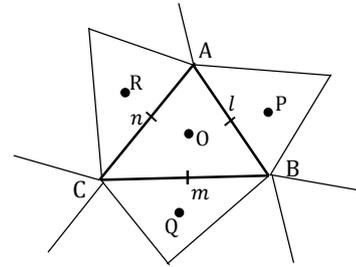


Fig.1. Cell-centered control volume.

(ii) 漸化式 $\beta_0^{(n)} = \max\{\beta_0^{(n-1)}, \beta_P^{(n-1)}, \beta_Q^{(n-1)}, \beta_R^{(n-1)}\}$ を使って

$\beta_0^{(N_{\max})}$ を求める。他のセル中心に対しても同じことを行う。

(iii) 傾きを制限する定数 $S_0$ を $S_0(1 - \beta_0^{(N_{\max})})$ に置き換え、 $h_l$ ,  $h_m$ ,  $h_n$ を再計算する。点 $l$ ,  $m$ ,  $n$ における $\alpha$ の値をそれぞれ

$$\max\{\beta_0^{(N_{\max})}, \beta_P^{(N_{\max})}\}, \max\{\beta_0^{(N_{\max})}, \beta_Q^{(N_{\max})}\},$$

$$\max\{\beta_0^{(N_{\max})}, \beta_R^{(N_{\max})}\}$$
に置き換える。

### 3. 結果

ここでは円柱を過ぎる Mach 数が6の気流の問題の結果(2原子分子,  $\gamma = 1.4$ )を紹介する。図2に示すように構造格子(周方向および動径方向の分割数をそれぞれ $n_\eta$ ,  $n_\xi$ とする)の各セルを二つの三角形に分割してできる非構造格子系に対する結果を示す。格子は円柱の中心を通り上流の流速方向となる軸に関して対称であり、数値解の非対称性はカーバンクル現象発症の指標になる。また本問題のような定常問題における数値解の残差はポストショック振動の大きさを表す指標になる。表1および2に種々の解像度の構造格子から作られた非構造格子の場合における非対称性と残差(密度で測定)を示す。衝撃波異常現象は残差に関しては対策を施さなくても工学上問題のない程度になっているが、非対称性に関しては $n_\eta$ が大きい場合には対策による劇的な改善は見られるものの、 $n_\eta$ が小さい場合には対策によって返って結果が悪くなることもある( $n_\eta = 80, n_\xi = 30, 60$ )。これは工学上問題になる程は大きくはないが、今後の検討課題である。図2および図3に対策無しの場合の結果と対策有りの場合の密度分布の等高線をそれ

それぞれ  $(n_\xi = 30, n_\eta = 160)$ . 表および図に示した結果は構造格子から作った非構造格子に対する結果であるが、ランダムに作られた非構造格子の場合でも、対策の効果は確認されている. 計算領域が 14400 個の三角形セルから構成される場合において、非対称性は  $10^{-2}$  程度から  $10^{-15}$  程度まで、残差は  $10^{-7}$  程度から  $10^{-8}$  程度まで、38400 個の三角形セルの場合には非対称性は  $10^{-3}$  程度から  $10^{-6}$  程度まで、残差は  $10^{-8}$  程度から  $10^{-9}$  程度まで、この対策によって低下することが確認されている.

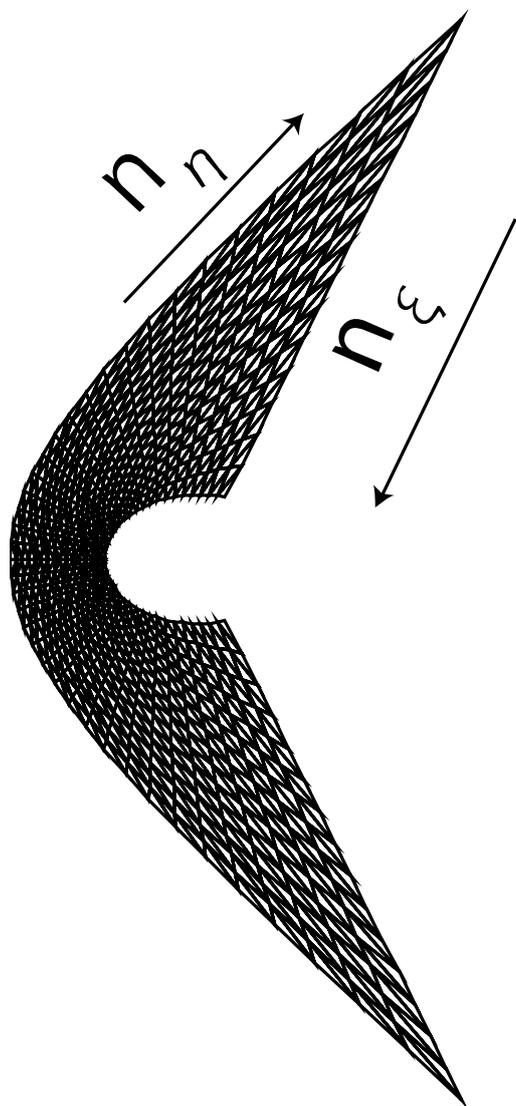


Fig. 2 Schematic of mesh system.

Table 1. Asymmetry

	対策なし			対策あり		
	$n_\xi=15$	$n_\xi=30$	$n_\xi=60$	$n_\xi=15$	$n_\xi=30$	$n_\xi=60$
$n_\eta=40$	1E-15	8E-16	2E-04	4E-16	1E-15	5E-04
$n_\eta=80$	1E-02	8E-14	1E-13	4E-16	1E-04	6E-05
$n_\eta=160$	1E-02	1E-02	2E-02	8E-16	7E-16	1E-15
$n_\eta=320$	4E-02	4E-02	4E-02	5E-10	3E-15	1E-15
$n_\eta=480$	7E-03	4E-02	5E-02	6E-05	5E-15	6E-12

Table 2. Residual

	対策なし			対策あり		
	$n_\xi=15$	$n_\xi=30$	$n_\xi=60$	$n_\xi=15$	$n_\xi=30$	$n_\xi=60$
$n_\eta=40$	0	2E-10	9E-08	2E-10	5E-19	2E-09
$n_\eta=80$	3E-10	9E-08	1E-08	4E-09	1E-08	2E-08
$n_\eta=160$	1E-07	3E-07	2E-07	1E-11	7E-19	6E-19
$n_\eta=320$	2E-06	2E-06	3E-06	3E-08	1E-08	2E-11
$n_\eta=480$	8E-07	4E-06	2E-06	6E-09	1E-11	1E-10

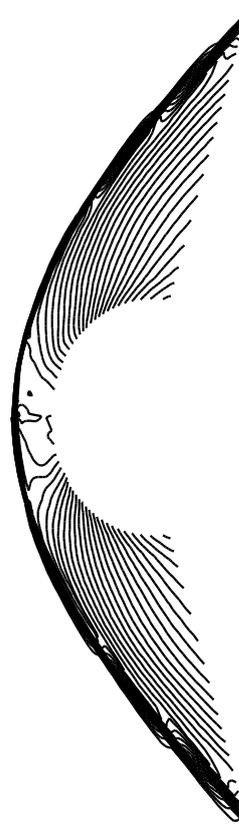


Fig. 3 The result of KLU without remedy.

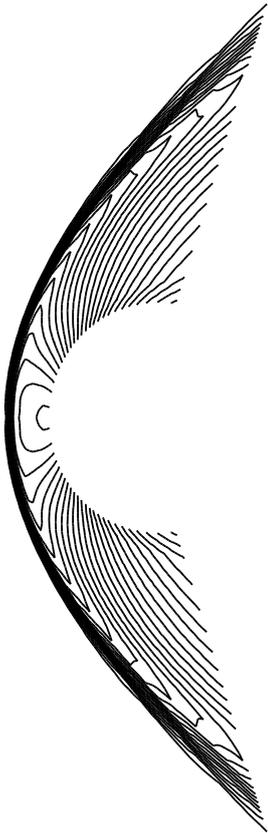


Fig.4 The result of K LW with remedy.

#### 参考文献

- (1) Ohwada, T., Adachi, R., Xu, K., and Luo, J., "On the remedy against shock anomalies in kinetic schemes", JCP **255**, 2013, pp.106-129.
- (2) Barth, T. J. and Jespersen, D.C. "The design and application of upwind schemes on unstructured meshes", AIAA Paper, 89-0366, 1989.
- (3) Venkatakrisnan, V., "On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady-State Solutions," AIAA paper 93-0880, 1993.