# Parareal 法による拡散方程式の時間並列計算

Parallel-in-Time Integration for Diffusion Equation by the Parareal Method

○ 飯塚幹夫，理研 計算科学研究機構, 〒 650-0047 神戸市中央区港島南町 7-1-26, E-mail：mikio.iizuka@riken.jp
小野謙二，理研 計算科学研究機構, 〒 650-0047 神戸市中央区港島南町 7-1-26, E-mail：keno@riken.jp
加藤千幸，東大生研, 〒 153-8505 目黒区駒場 4-6-1 東京大学生産技術研究所, E-mail：ckato@iis.u-tokyo.ac.jp
Mikio Iizuka, RIKEN AICS, 7-1-26 Minatojima-minami-machi Chuo-ku, Kobe, Hyogo 650-0047
Kenji Ono, RIKEN AICS, 7-1-26 Minatojima-minami-machi Chuo-ku, Kobe, Hyogo 650-0047
Chisachi Kato, Institute of Industrial Science The University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8505

In recent years the prareal method is expected as a hopeful algorithm producing new concurrency ahead of the exa-scale supercomputer era. We study problem scale dependencies of the number of the parareal iterations for diffusion equation. In addition, we consider the research and development trend of the parareal method. Then we show the issue of parallel-in-time integration using the parareal method. Finally we show the prospects of the solution to that issue.

## 1. 初めに

設計精度向上，最適化設計，不確定性の定量評価等のために時間発展現象シミュレーションの 1 ケース当たりの計算時間のより一層の短縮が望まれている．そのため，現在開発が進むエクサスケール級計算資源への期待がある．一方，その計算資源のアプリケーションに対する並列性の要求は現状のペタスケールに比べさらに数桁上がる見通しである．そのエクサスケール級計算資源の性能を利用するため，すでに並列性の向上が飽和状態にある従来の空間方向，波数方向，エネルギー方向等に加え，新たな方向での並列計算法が期待されている．そこで，本研究では時間並列計算に着目する．時間逐次計算では計算を実行している 1 つの時間ステップに演算プロセスを割り当てるが，時間並列計算では複数時間ステップに演算プロセスを割り当てるため並列性の向上が期待できる (Fig.1)．本研究では，新たな時間並列計算法として注

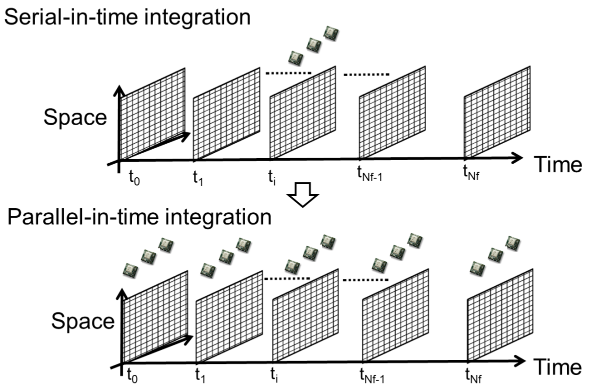


Fig. 1: Parallel-in-time integration.

目される Parareal 法 [1] をベースに研究開発を進めている．Parareal 法は解析をおこなう時間領域を複数領域に分割し，分割されたそれぞれの領域で並列に時間積分計算を行い反復計算により領域間の不整合を減少させ全時間領域の時間積分結果を収束させる並列計算手法である．Parareal 法は拡散方程式等の放物型偏微分方程式に対しては収束性が良く比較的応用効果が高いが，移流方程式や波動方程式等の双曲型偏微分方程式に対しては収束性に課題がある．そこで，本研究では拡散方程式から取組を始め，将来的には双曲型偏微分方程式に対する Paraeal 法の収束性の向上を可能とする計算手法の開発を目指し研究開発を行っている。

本論文では、初めに Parareal 法のアルゴリズムとその並列加速率の特性を述べる．放物型偏微分方程式に対する Parareal 法の応用効果は高いと言われているが、問題規模が Parereal 法の収束性に及ぼす影響はこれまで調べられていない．そこで，拡散問題の規模と Parareal 法の反復数の関係を数値的に調べ，その結果と課題を述べる．また，放物型偏微分方程式と双曲型偏微分方程式に対する Parareal 法の収束性の違いを明確に比較したものがないため，解析時間領域と時間ステップ数を共通として拡散方問題と単振動問題に対する Parareal 法の反復回数を比較した．単振動問題を用いた理由は，双曲型偏微分方程式である波動方程式 $\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u((t,x)$ を空間方向に $u(t,x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} v(t,k)dk$ とフーリエ変換をすると，$\partial_t^2 v(t,k) + (ck)^2 v((t,k) = 0$ となり，$k$ を固定すれば単振動の式 $d^2X/dt^2 + (2\pi/Tcyc)^2 X(t) = 0$ と同形となるためである，ここで $k$ は空間の波数ベクトル，$T_{cyc}$ は単振動の周期である．このように，単振動問題は双曲型方程式の最も簡単な方程式となっている．さらにこれら調査結果に加え，Parareal 法の研究開発動向も検討し，時間並列計算の課題とその解決の将来展望を述べる．

## 2. Parareal 法による時間並列計算法

Parareal 法では、解析を行う時間領域 $\Omega_t \in [0:T]$ を $N_c$ 個の時間領域幅 $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ の Time Slice と呼ばれる粗い時間領域 $\Omega_n \in [T_{n-1}, T_n]$ に分割する (Fig.2)．ここで $n, j, j'$ は Time Slice の番号，細かい積分演算及び粗視化積分演算のタイムステップ番号である．細かい積分演算とは時間発展現象を十分正確にシミュレーションするために必要な詳細な時間ステップ幅の演算で，通常の時間積分演算のことである．粗視化積分演算とは，Parareal 法の収束計算を行うための修正演算のことで，粗い時間ステップ幅，低次の時間積分法及び粗いモデル等を用いた計算負荷の低い時間積分演算のことである．Parareal

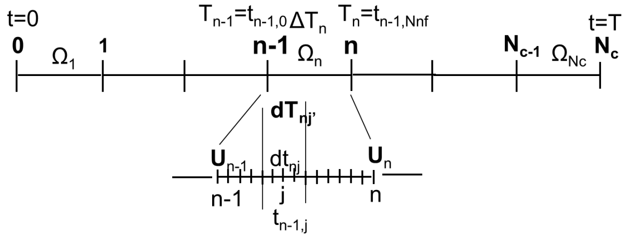


Fig. 2: Time decomposition. n is Time Slice No., j is fine time step sub No., j' is coarse time step sub No. dt is fine time step width, dT is coarse time step width

法では，それぞれの Time Slice $\Omega_n$ で，解くべき場の量の仮の始端値 $\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}$ を使った時間ステップ幅 $dt_{nj}$ の細かい積分演算 $\varphi_{\Delta T_n}(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$ により初期値問題を解きながら、粗視化積分演算 $\varphi_{\Delta T_n}^{c}(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$ を用いた修正計算を行

う．この時，粗視化積分演算においても，粗い時間ステップ幅 $dT_{nj'}$ 等を使い初期値問題を粗く計算する，ここで $\Delta T_n \geq dT_{nj'} >> dt_{nj}$ である．このように Parareal 法は時間方向のマルチレベル解法となっている．細かい積分演算と粗視化積分演算を、$\mathbf{U}_{n-1}^{k-1}$ の $T_{n-1}$ から $T_n$ までの積分であることを強調して、$F(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$ (Fine-solver, Fine-popagtor ともいう)、$G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$ (Coarse-solver, Coarse-popagtor ともいう) と書くことが行われている。このような書き方をすると，良く知られた Parareal 法の式 (1) が得られる。

$$\mathbf{U}_n^k = G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^k) - G(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) + F(T_n, T_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^{k-1}) \tag{1}$$

この式 (1) は，Time Slice 毎の端値 $\mathbf{U}_n^k$ を未知数とする $N_c$ の非線形方程式 $\mathbf{U}_n^k = \varphi_{\Delta T_n}(\mathbf{U}_{n-1}^{k-1})$ の解法を Newton Raphson 法で定式化し，Time Slice 内は初期値問題として細かい積分演算及び粗視化積分演算を適用するとすれば得られる [(2)]．

従来，時間並列計算法として研究開発が進めされきた時空間法では，例えば有限要素法による時間内挿関数法では既存のソフトウェアの時間発展部分を明示的に離散化し行列要素に変換するためコード自体が特殊なものとなりソフトウェア資産の継承の観点で困難があった．また，時間方向変数を陽に全て扱うため，変数の増加により必要メモリが激増してしまう問題があった．

一方，Parareal 法は，粗視化積分演算部分に粗い積分時間ステップ幅を利用するだけでなく，時間積分アルゴリズム，解析手法，物理モデル等を粗視化した演算等も利用でき，柔軟性に富み，その技術の発展に多くの可能性を持つ．また，各 Time Slice 毎の演算は初期値問題の時間積分演算を利用するため，時間積分演算に基づく既存のアプリケーションの多くの部分を再利用可能であり，ソフトウエア資産の蓄積・再利用・継承という意味からも大きな利点がある．さらに，Time Slice 毎の変数だけを保存すればよいので必要なメモリ容量を抑制可能である．このような理由から，現在 Parareal 法の研究開発は急速に活発化している．

## 3. Parareal 法の並列加速率

Parareal 法の通信は 1 次元方向の隣接通信でありまた計算とのオーバーラップにより隠蔽できる可能性があるため比較的通信負荷が軽い．そこで簡単化して通信時間を無視し，Time Slice 数 $N_c$ と並列数 $N_p$ を同数とし，逐次計算時間を並列計算時間で割り，さらに細かい積分演算の時間 $T_F$ で分子分母を割ると，Pararel 法の並列加速率 $\alpha$ は式 (2) のように粗視化積分演算と細かい積分演算の時間比 $\frac{T_G}{T_F}$，Time Slice 数 $N_c$，反復数 $K^{par}$ の関数となる. ここで，最も大きな影影響を与えるものは $K^{par}$ である．細かい積分演算と粗視化積分演算に同じ時間積分法を使う場合は $\frac{T_G}{T_F} = \frac{dt_{nj}}{dT_{nj'}}$ となる．本論文ではこの方法を使う．

$$\alpha \quad \left(N_c, \frac{T_G}{T_F}, K^{par}\right) = \frac{N_c}{(1 + \frac{T_G}{T_F} N_c) K^{par} + \frac{T_G}{T_F} N_c} \tag{2}$$

これから $\frac{T_G}{T_F}$ が小さいと $\alpha(\frac{T_G}{T_F}, N_c, K^{par}) \rightarrow N_c / K^{par}$ となる．そのため Parareal 法の並列加速率を向上させるためには，粗視化積分演算法を工夫し $\frac{T_G}{T_F}$ の減少と $K^{par}$ の減少を同時に達成することが必要となる．

$K^{par}$ は時間並列計算を行う方程式の特性，離散化手法，シミュレーションの問題設定（規模等），$\frac{T_G}{T_F}$，粗視化積分演算法等により影響を受けると推定される．すなわち，

$$K^{par} = K^{par}\left(N_c, \frac{T_G}{T_F}, \text{方程式}, \text{離散化手法}, \text{シミュレーション問題設定}, G, etc.\right). \tag{3}$$

本論文では放物型偏微分方程式の収束性を数値実験的に調べるため，$N_c, \frac{T_G}{T_F}$ に加えて，方程式として拡散方問題と単振動問題の式を扱い，シミュレーションの問題設定とし拡散問題の規模と単振動問題の振動周期 $T_{cyc}$ をパラメータとして $K^{par}$ 調べた．

## 4. 拡散問題と単振動問題の数値計算法

**拡散問題**　物質濃度 $C$ の拡散問題は円筒座標系で以下の放物型偏微分方程式にて記述される．空間方向を有限体積法で時間方向を Crank-Nicolson 法で離散化した．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] C \tag{4}$$

Crank-Nicolsonh 法の $(C_j - C_{j-1})/dt = \theta\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_j + (1 - \theta)\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{j-1}$ の $\theta$ は 0.5 とした．その結果各 Time Slice $n$ について Parareal 法の反復 k 回目に対して

$$\mathbf{A}_{diff}(Q)\mathbf{C}_{j,n-1}^{k-1} = \mathbf{B}_{diff}(Q)\mathbf{C}_{j-1,n-1}^{k-1}, \quad \mathbf{C}_{0,n-1}^{k-1} = \mathbf{C}_{n-1}^{k-1}(T_{n-1}),\ t \in [T_{n-1}, T_n] \tag{5}$$

と離散化された積分演算の式が得られる，ここで，$\mathbf{C}$ は拡散問題の濃度ベクトル変数，$\mathbf{A}_{diff}(Q), \mathbf{B}_{diff}(Q)$ は上記離化により得られた 5 重対角行列，$Q$ は，細かい積分演算では $Q = dt_{nj}$，粗視化積分演算では $Q = dT_{nj'}$ である．

**単振動問題**　単振動問題 (simple harmonic motion:shm) は以下の時間方向の 2 階の常微分方程式にて記述される．

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{Tcyc}\right)^2 X = 0 \tag{6}$$

時間方向を Newmark-$\beta$ 法で以下のように離散化した．

$$\begin{aligned}\Delta X_j &= X_j - X_{j-1} = \\ &= dt(dX/dt)_{j-1} + \frac{dt^2}{2}(d^2X/dt^2)_{j-1} \\ &\quad + \beta dt^2[(d^2X/dt^2)_j - (d^2X/dt^2)_{j-1}]\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Delta(dX/dt)_j &= (dX/dt)_j - (dX/dt)_{j-1} \\ &= dt[\delta(d^2X/dt^2)_j + (1-\delta)(d^2X/dt^2)_{j-1}]\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$\delta = 0.5, \beta = 0.25$ の定数で，この場合いかなる $dt$ であっても振幅は保存される．さらに，$dt$ を以下のように修正すると位相も正確に保存する計算手法となる．以下この修正を行うものを位相誤差修正付き Newmark-$\beta$ 法 [(3)] と呼ぶ．

$$dt \leftarrow dt\left\{\frac{2\pi}{Tcyc}\sqrt{\left(\sin^2 \pi \frac{dt}{Tcyc}\right)^{-1} - 1}\right\}^{-1} \tag{9}$$

ただし，この式から分かるように，位相誤差修正付き Newmark-$\beta$ 法はターゲットする周期 $T_{cyc}$ の位相のみを

正確に保存する．そのため多自由度系の位相計算全体の精度を上げることはできない．ただし論文 [3] の調査結果は，最も周期の長い $T_{cyc}$ を用いれば，多自由度系においてもこの方法は全体として高精度な位相計算を可能とすることを示している．以上から各 Time Silce n について Parareal 法の反復 k 回目に対して

$$A_{shm}(Q)X^{k-1}_{j,n-1} = B_{shm}(Q)X^{k-1}_{j-1,n-1} + f(Q)^{k-1}_{j-1,n-1},$$
$$X^{k-1}_{0,n-1} = X^{k-1}_{n-1}(T_{n-1}),\ t \in [T_{n-1}, T_n] \qquad (10)$$

と離散化された積分演算の式が得られる．ここで、$X$ は単振動の振幅変数，$A_{shm}(Q), B_{shm}(Q)$ は上記離化により得られたスカラー係数，$f$ は付加項，$Q$ は拡散問題の時と同じものである．

以下ではこれらの積分演算の式を用いた Parareal 法による計算を行った．

## 5. Parareal 法の計算特性の調査方法

**問題設定** 解析時間領域を $\Omega_t \in [0:T], T = 400$，$\Omega_t$ 全体にわたる詳細な積分時間ステップ数 $N_f = 8000$，時間ステップ幅 $dt_{nj} = 0.05$ と両問題に対して共通に固定した．拡散問題と単振動問題の概要を Fig.3 に示す．拡散が

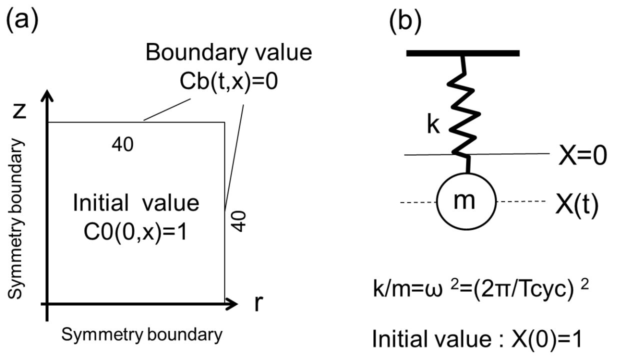


Fig. 3: Numerical analysis model. (a) Diffution (diff),(b) Simple harmonic motion (shm).

領域全体に及ぶ特徴時間を解析時間領域 $\Omega_t \in [0:400]$ と同じとするため，$T = L^2/2/D$ を利用し，$L = 40, D = 2$ と設定した．セル数は，$160\times160, 80\times80, 40\times40, 20\times20, 10\times10, 5\times5$ と $r, z$ 方向のセル分割数を変化させて問題規模が収束へ与える影響を調べた．単振動問題では $T_{cyc} = 400, 100, 25, 10, 5, 2$ と変化させて解析時間領域内での振動回数が収束へ与える影響を調べた．

**時間並列計算の条件設定** 前記より Parareal 法の並列加速率は $K^{par}$ に最も影響を受けるため，今回は $K^{par}$ の挙動を調べた．パラメータとしては $N_c$，$R_{fc} = \frac{T_F}{T_G} = \frac{dT_{nj'}}{dt_{nj}}$ を変化させた．$N_c = 8, 16$，$R_{fc} = 10, 20, 50, 100$ とした．1 Time Slice 当たりの詳細な積分演算のタイムステップ数を $N_{tsf} = N_f/N_c$ で，粗視化積分演算のタイムステップ数 $Ntsc = N_f/N_c/R_{fc}$ とした．収束判定は，各自由度の相対誤差の 2 乗和平均平方根 $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{NcN_{free}}(\sum_{n=1}^{Nc}\sum_{i=1}^{N_{free}}((U^k_{i,n-1} - U^{k-1}_{i,n-1})/U^{k-1}_{i,n-1})^2)}$ で $\varepsilon < 10^{-7}$ とした，ここで $N_{free}$ は問題の自由度である．反復回数が $N_c - 1$ より大きい時，未収束 (NC: No Convergence) とした．

## 6. 調査結果と考察

拡散問題と単振動問題の Pararel 法の反復数をそれぞれ Tab.1，Tab.2 に示す．(a) 拡散問題では問題規模が増加すると収束が悪化する．(b) 拡散問題は，その自由度:25〜25, 6000 が単振動問題の自由度:1 に比べて非常い大きいが，収束する場合にはその反復回数はほぼ単振動問題のものと同じ程度であり収束性は良い．(c) 単振動問題では周波数が増加すると収束が悪化する．(d)Time Slice 数 $N_c$ が収束に与える影響は今回の条件では明確でない．(e)$R_{fc}$ の増加（粗視化積分演算の時間ステップ幅の増加）はどちらの問題でも収束を悪化させるが，拡散問題の方がその悪化はより明瞭である．また表には示していないが，位相誤差修正付き Newmark-$\beta$ 法を用いた単振動問題での反復回数は，いかなる条件でも 2〜3 回であった．

以上の結果からこれまで指摘されているように拡散問題のような放物型偏微分方程式の収束性は，双曲型偏微分方程式に比べて非常に良いことを確認した．一方，拡散問題の規模の増大は急速な収束性の悪化を引き起こすことが分かった．また，$R_{fc} = \frac{dT_{nj'}}{dt_{nj}}$ の増加，すなわち粗視化積分演算の時間ステップ幅の増加も急速な収束性の悪化を引き起こすことが分かった．したがって，大規模な放物型偏微分方程式に対しても，計算負荷が低くかつ高精度な粗視化積分演算法の開発は課題である．このことからすでに拡散問題に対する時空間でのマルチレベル法を用いた粗視化積分演算法の研究が進められている [4]．さらに，単振動問題の結果は，波動問題の高周波数成分が収束に極めて悪い影響を与えることを示している．一方，高精度な位相計算を可能とする時間積分法はその悪影響を抑制する可能性を持つことも示された．Tab.2 における最も厳しい条件の $T_{cyc} = 2, R_{fc} = 100$ では，1 サイクルの中に細かい積分演算の時間ステップ数が 40，粗視化積分演算の時間ステップ数が 0.4 である．それは，位相誤差修正付 Newmark-$\beta$ 法を用いれば，一自由度の場合ではあるが，1 サイクルの中の粗視化積分演算の時間ステップ数が一個以下でも，parareal 法は高速に収束することを示している．

Tab. 1: $K^{par}$ for diffution problem. NC: No Cnvergence.

| $N_c$ | $R_{fc}$ | $N_{tsc}$ | Number of cells | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 25,600 | 6,400 | 1,600 | 400 | 10 | 25 |
| 8 | 10 | 100 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| | 20 | 50 | NC | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 50 | 20 | NC | NC | NC | NC | 3 | 3 |
| | 100 | 10 | NC | NC | NC | NC | NC | 3 |
| 16 | 10 | 50 | 9 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 20 | 25 | NC | 8 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | 50 | 10 | NC | NC | NC | NC | 4 | 3 |
| | 100 | 5 | NC | NC | NC | NC | NC | 4 |

Tab. 2: $K^{par}$ for simple harmonic motion problem. NC: No Cnvergence.

| $N_c$ | $R_{fc}$ | $N_{tsc}$ | $T_{cyc}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 400 | 100 | 25 | 10 | 5 | 2 |
| 8 | 10 | 100 | 3 | 3 | 5 | NC | NC | NC |
| | 20 | 50 | 3 | 3 | 7 | NC | NC | NC |
| | 50 | 20 | 4 | 5 | NC | NC | NC | NC |
| | 100 | 10 | 4 | 5 | NC | NC | NC | NC |
| 16 | 10 | 50 | 4 | 4 | 5 | 11 | NC | NC |
| | 20 | 25 | 4 | 4 | 7 | NC | NC | NC |
| | 50 | 10 | 4 | 6 | 13 | NC | NC | NC |
| | 100 | 5 | 4 | 8 | NC | NC | NC | NC |

## 7. 研究開発動向から見た課題とのその解決の見通し

Parareal 法の登場後、その収束性の調査が行われ放物型偏微分方程式への有効性と双曲型偏微分方程式での収

束性の課題が指摘された [5,6,7]．その後，その課題解決のための研究開発が続けられている．共通しているのは，粗視化積分演算法を工夫し収束性を改善し，高い並列加速率を達成可能とすることを目指すことである．具体的には，次のようないくつかの方法がすでに提案されている．これらは，基礎的ではあるが有効性がすでに示されている．

(A) 計算された収束過程の情報を利用し収束性を向上させる方法:(a) クリロフ部分空間 parareal 法-収束過程の全解ベクトルデータから QR 法により収束情報を含む粗視化積分演算の基底を構成し収束性を上げる方法である．重要な少数の基底毎に細かい積分演算を行い計算負荷を低減しつつ高精度化を実現する手法を提案している．しかし，線形方程式のみに適用可能で計算負荷が大きいという欠点がある．(b) 基底次元低減法 [8]-クリロフ部分空間 parareal 法を改善する方法である．収束過程の各段階の解ベクトルデータから特異値分解により収束情報を含む粗視化積分演算の次元低減をした基底を構成し収束性を上げる方法である．基底の次元が低減されており，その基底による細かい積分演算の計算負荷はより一層低減されている．また基底の計算法を工夫すると非線形問題にも適用可能である．次元低減された基底を求める計算負荷はクリロフ部分空間 parareal 法に比べ小さいがまだ大きく，その改善に余地がある．

(B) 粗視化積分演算精度の次数を向上させる方法:(a) DC(Deferred Correction:誤差修正) 法-比較的低次の時間積分法により DC 法の反復を繰り返し低い計算負荷で高次の修正を行う方法である．(b) 下記の SDC 法を利用する方法である．

(C) マルチグリッド法により収束性の改善をおこなう方法：PFASST-非線形マルチグリッド法 (FAS) の考えを利用し，より効果的な SDC 法のマルチレベル化を行い収束性を上げる方法である [9]．時空間をマルチグリッド化するため，コード化負荷は大きい．

(D) 反復計算による並列計算も可能な極めて積分精度の高い時間積分である SDC(Spectral Deferred Correction ) 法 [10] を Parereal 法と組み合わせ，その 2 つの反復法のループをオーバーラップさせ，見かけ上並列性能を向上させる手法 [11] である．この手法は，根本的に Parareal 法の反復回数を減じる可能性を有しており有望である．

## 8. まとめ

放物型偏微分方程式に対する Parareal 法適用の有効性を確認した．一方問題規模増加に伴う収束性の悪化を克服するためには，時間ステップ幅の粗視化による粗視化積分演算法では不十分で、計算負荷が抑制された高精度な粗視化積分演算法の開発が必要である．また双曲型偏微分方程式により記述される振動問題では，高周波数領域で大きな課題がある．

研究開発動向から見て，これら課題解決の基本的な方向は既に示されている．しかし，それらは数学分野をベースにする研究者による基礎的な研究段階であり，今後実応用問題を対象にそれら手法を評価・改良してより効果的な手法へ発展される必要がある．特に，大規模問題での経験が少ないため，大規模問題での課題を把握し，大規模計算技術として早急に技術を発展させていくことも必要である．

## 謝辞

本研究は，文部科学省科学技術試験研究委託事業「近未来型ものづくりを先導する革新的設計・製造プロセスの開発」の助成を受けている．

## 参考文献

(1) J.-L. LIONS, Y. MADAY, AND G. TURINICI, “A parareal in time discretization of PDEs”, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 332 (2001), pp.661-668.

(2) M. J. Gander and S. Vandewalle, “Analysis of the parareal time parallel time integration method”,SIAM Journal on Scientific Computing , vol.29, no.2 (2007), pp.556-578.

(3) 水田洋司，西山研一，平井一男，“ Newmark $\beta$ 法における位相遅れ補正の一方法”，土木学会論文報告集 第 268 号 （1977）,pp.15-21.

(4) R. Speck, D. Ruprecht, M. Emmett, M. Bolten, R. Krause, “A space-time parallel solver for the three-dimensional heat equation”, Parallel Computing: Accelerating Computational Science and Engineering (CSE)M./ ed.: M. Bader, A. Bode, HJ. Bungartz, M. Gerndt, G.R. Joubert, F.J. Peters, Advances in Parallel Computing Vol. 25, IOS Press, (2014), pp.263-272.

(5) G. Bal, and Y. Maday,”A parareal time discretization for non-linear pdes with application to the pricing of an American put”, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol.23 (2002), pp.189-202.

(6) Bal, “On the convergence and the stability of the parareal algorithm to solve partial differential equations, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol.40 (2005), pp.425-432.

(7) Gunnar Andreas Staff and Einar M. Ronquist,”Stability of the parareal algorithm”, In Proceedings of the 15th international domain decomposition conference,Springer LNCSE,vol.40 (2003), pp.449-456.

(8) Feng Chen, Jan S. Hesthaven, Xueyu Zhu, “On the use of reduced basis methods to accelerate and stabilize the Parareal method”, Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction Volume 9 of the series MS&A-Modeling, Simulation and Applications, (2014), pp.187-214.

(9) MATTHEW EMMETT AND MICHAEL L. MINION,”TOWARD AN EFFICIENT PARALLEL IN TIME METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS”, COMM. APP. MATH. AND COMP. SCI.Vol.7, No.1 (2012).

(10) A. Dutt, L.,“Greengard, V. Rokhlin, Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations”, BIT 40 (2000) , pp.241-266.

(11) MATTHEW EMMETT AND MICHAEL L. MINION, “TOWARD AN EFFICIENT PARALLEL IN TIME METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS”,COMM. APP. MATH. AND COMP. SCI.Vol.7, No.1 (2012).